MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 2, 1975, pp. 123—130

KONVERGENZORDNUNG EINER FOLGE POSITIVER LINEARER OPERATOREN

von

WERNER HAUSSMANN und HANS-BERND KNOOP
(Duisburg)

Wir betrachten im folgenden das kompakte reelle Intervall $K := [-1, 1]$ und den Banach-Raum $C(K)$ der auf K stetigen reellwertigen Funktionen unter der Čebyšev-Norm

$$\| \cdot \| : C(K) \ni f \to \|f\| := \sup_{x \in K} |f(x)| \in \mathbf{R}.$$

Ferner sei T_m mit

$$T_m(x) := \cos (m \cdot \arccos x)$$

für $m \in \mathbf{N}$ das Čebyšev-Polynom m-ten Grades mit den Nullstellen $x_1^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)} \in K$. Nach D. D. STANCU [5] kann jedem $f \in C(K)$ eindeutig ein Polynom $K_m f$ vom Grad $\leqslant 4m - 1$ zugeordnet werden durch die Interpolationsbedingungen

$$(1) \qquad (K_m f)(x_k^{(m)}) = f(x_k^{(m)}) \quad (k = 1, \ldots, m)$$

und

$$(K_m f)^{(n)} (x_k^{(m)}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m \,;\, n = 1, 2, 3).$$

Dieses Polynom läßt sich in der Form

$$(2) \qquad (K_m f)(x) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k^{(m)}) \cdot B_k^{(m)}(x)$$

mit

$$B_k^{(m)}(x) := \left\{(1 - xx_k^{(m)})^2 + \frac{(4m^2-1)(1-xx_k^{(m)})-3}{6}(x - x_k^{(m)})^2\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{T_m(x)}{m(x - x_k^{(m)})}\right)^4$$

(vgl. D. D. STANCU [5], H.-B. KNOOP [2]) darstellen. Die Polynome $B_k^{(m)}$ erfüllen dabei für alle $k = 1, \ldots, m$ und alle $x \in K$ die Bedingungen

(3) $$B_k^{(m)}(x) \geqslant 0 \qquad (x \in K)$$

und

(4) $$\sum_{k=1}^{m} B_k^{(m)}(x) = 1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

D. D. STANCU [5] benutzte diese Polynome zum Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß und erhielt folgendes Ergebnis:

(5) $$\|f - K_m f\| < 2\cdot\omega\left(f, \sqrt{\frac{2m^2+6m+1}{3m^2}}\right),$$

wobei ω der Stetigkeitsmodul ist. H.-B. KNOOP [2] untersuchte den Operator K_m auf Positivität und zeigte, daß

$$\frac{1}{(1 - x_k^{(m)2})^2}\left\{(1 - xx_k^{(m)})^2 + \frac{(4m^2-1)(1 - xx_k^{(m)}) - 3}{6}(x - x_k^{(m)})^2\right\} \geqslant \frac{1}{8}$$

ist.

In dieser Note wollen wir die Abschätzung (5) verbessern und zeigen, daß sogar

$$\|f - K_m f\| \leqslant C\cdot\omega\left(f, \frac{\log m}{m}\right)$$

gilt. Weiter zeigen wir, daß sich diese Abschätzung größenordnungsmäßig nicht verbessern läßt.

Ähnliche Aussagen für die Hermite-Fejér-Interpolation gehen auf E. MOLDOVAN [3], V. G. AMELKOVIČ [1], O. SHISHA und B. MOND [4] sowie P. O. H. VÉRTESI [6] zurück.

1. Vorbereitende Abschätzungen

SATZ 1. *Es sei $p \in \mathbf{N}$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ mit $0 < \alpha \leqslant 1$. Dann gilt für alle $x \in K$ und alle $m \in \mathbf{N}$:*

$$\sum_{k=1}^{m} |x - x_k^{(m)}|^\alpha \cdot (1 - xx_k^{(m)})^p \cdot \frac{T_m^{2p}(x)}{(x - x_k^{(m)})^{2p}} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} c_p\cdot m^{2p-\alpha} & \text{für } p \geqslant 2 \text{ und } 0 < \alpha \leqslant 1,\\ c_\alpha\cdot m^{2-\alpha} & \text{für } p = 1 \text{ und } 0 < \alpha < 1,\\ c_1\cdot m\cdot\log m & \text{für } p = 1 \text{ und } \alpha = 1.\end{cases}$$

Dabei sind die positiven Konstanten c_p, c_α und c_1 von m und x unabhängig. Die Konstante c_p kann außerdem von p und α unabhängig gewählt werden.

Beweis. Wir benutzen die Transformation $x = \cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ und erhalten

$$t_k^{(m)} := \arccos x_k^{(m)} = \frac{2k-1}{2m}\pi \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Setzen wir weiter $t_0^{(m)} := 0$ und $t_{m+1}^{(m)} := \pi$, so gilt

$$t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < t_2^{(m)} < \ldots < t_m^{(m)} < t_{m+1}^{(m)}.$$

O. SHISHA und B. MOND [4] und P. O. H. VÉRTESI [6] zeigten die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$0 \leqslant (1 - xx_k^{(m)})\cdot\frac{T_m^2(x)}{(x - x_k^{(m)})^2} = \frac{(1 - \cos t\cos t_k^{(m)})\cdot\cos^2 mt}{(\cos t - \cos t_k^{(m)})^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\left(\frac{\sin m(t - t_k^{(m)})/2}{\sin(t - t_k^{(m)})/2}\right)^2.$$

Weiter gelten die Abschätzungen

(6) $$\left|\frac{\sin my}{\sin y}\right| \leqslant m \quad \text{für alle } y \in \mathbf{R}$$

und

(7) $$\frac{y}{\sin\frac{y}{2}} \leqslant \pi \quad \text{für } 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Sei nun $t \in [0, \pi]$ gegeben und j $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$ so gewählt, daß $t_j^{(m)} \leqslant t < t_{j+1}^{(m)}$ gilt. Dann wird mit (6) und (7)

(I)
$$|t - t_j^{(m)}|^\alpha \cdot \left(\frac{\sin m(t - t_j^{(m)})/2}{\sin (t - t_j^{(m)})/2}\right)^{2p} +$$
$$+ |t - t_{j+1}^{(m)}|^\alpha \cdot \left(\frac{\sin m(t - t_{j+1}^{(m)})/2}{\sin (t - t_{j+1}^{(m)})/2}\right)^{2p} \leqslant$$
$$\leqslant |t - t_j^{(m)}|^\alpha \cdot m^{2p} + |t - t_{j+1}^{(m)}|^\alpha \cdot m^{2p} \leqslant 2 \cdot \pi^\alpha \cdot m^{2p-\alpha}.$$

(II) Für $k = 1, 2, \ldots, j-1$ folgt: $t - t_k^{(m)} \geqslant (j-k) \cdot \frac{\pi}{2}$, also

$$|t - t_k^{(m)}|^\alpha \left(\frac{\sin m(t - t_k^{(m)})/2}{\sin(t - t_k^{(m)})/2}\right)^{2p} \leqslant$$
$$\leqslant |t - t_k^{(m)}|^{\alpha - 2p} \cdot |t - t_k^{(m)}|^{2p} \cdot \left(\frac{\sin m(t - t_k^{(m)})/2}{\sin(t - t_k^{(m)})/2}\right)^{2p} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|t - t_k^{(m)}|^{2p-\alpha}} \cdot \pi^{2p} \leqslant \frac{\pi^{2p} \cdot m^{2p-\alpha}}{\pi^{2p-\alpha} \cdot (j-k)^{2p-\alpha}} = \pi^\alpha \cdot \frac{m^{2p-\alpha}}{(j-k)^{2p-\alpha}}.$$

Also folgt

$$\sum_{k=1}^{j-1} |t - t_k^{(m)}|^\alpha \cdot \left(\frac{\sin m(t - t_k^{(m)})/2}{\sin(t - t_k^{(m)})/2}\right)^{2p} \leqslant \pi^\alpha m^{2p-\alpha} \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k^{2p-\alpha}}.$$

(III) Entsprechend folgt

$$\sum_{k=j+2}^{m} |t - t_k^{(m)}|^\alpha \cdot \left(\frac{\sin m(t - t_k^{(m)})/2}{\sin (t - t_k^{(m)})/2}\right)^{2p} \leqslant \pi^\alpha \cdot m^{2p-\alpha} \cdot \sum_{k=j+2}^{m} \frac{1}{k^{2p-\alpha}}.$$

Aus (I), (II) und (III) ergibt sich damit

$$\sum_{k=1}^{m} |t - t_k^{(m)}|^\alpha \cdot \left(\frac{\sin m(t - t_k^{(m)})/2}{\sin (t - t_k^{(m)})/2}\right)^{2p} \leqslant 2 \cdot \pi^\alpha \cdot m^{2p-\alpha} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^{2p-\alpha}}\right).$$

Diese Abschätzung gilt offenbar auch in dem Fall, daß $0 \leqslant t < t_1^{(m)}$ und $t_m^{(m)} \leqslant t \leqslant \pi$ ist. Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p-\alpha}}$ für $p \geqslant 2$ und beliebiges $0 < \alpha \leqslant 1$ sowie für $p = 1$ und beliebiges $0 < \alpha < 1$ sichert die Existenz der Konstanten c_p und c_α. Aufgrund der Abschätzung $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leqslant \frac{c_1}{2\pi} \cdot \log m$ folgt die letzte der Behauptungen. ■

2. Konvergenzordnung des Operators K_m

Für diejenigen Funktionen $f \in C(K)$, die in der Lipschitz-Klasse $\mathrm{Lip}_M \alpha$ liegen $(0 < \alpha \leqslant 1)$, ergibt sich nun

SATZ 2. *Es sei* $f \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha$ *mit* $M > 0$ *und* $0 < \alpha \leqslant 1$. *Dann gilt für alle* $m \geqslant 1$:

$$\|f - K_m f\| \leqslant \begin{cases} d_\alpha \cdot \dfrac{1}{m^\alpha} & \text{für } 0 < \alpha < 1, \\ d_1 \cdot \dfrac{\log m}{m} & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

Dabei gilt $d_\alpha \leqslant M \cdot \left(c_2 + \frac{2}{3} c_\alpha\right)$ *für* $0 < \alpha \leqslant 1$.

Beweis. Wegen (1) brauchen wir die Differenz $|f(x) - (K_m f)(x)|$ nur für $x \in K$, $x \neq x_k^{(m)}$ $(k = 1, \ldots, m)$, zu betrachten. Aus (2), (3) und (4) folgt für solche x:

$$|f(x) - (K_m f)(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} (f(x) - f(x_k^{(m)})) \cdot B_k^{(m)}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{m} |x - x_k^{(m)}|^\alpha \cdot B_k^{(m)}(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{m^4} \cdot \sum_{k=1}^{m} |x - x_k^{(m)}|^\alpha \cdot \left|(1 - x x_k^{(m)})^2 - \frac{1}{2}(x - x_k^{(m)})^2\right| \cdot \frac{T_m^4(x)}{(x - x_k^{(m)})^4} +$$
$$+ \frac{M}{m^4} \cdot \sum_{k=1}^{m} |x - x_k^{(m)}|^\alpha \cdot \frac{1}{6}(4m^2 - 1)(1 - x x_k^{(m)})(x - x_k^{(m)})^2 \cdot \frac{T_m^4(x)}{(x - x_k^{(m)})^4}.$$

Da für alle $x \in K$ die Abschätzung

$$(x - x_k^{(m)})^2 \leqslant (1 - x x_k^{(m)})^2$$

gilt, erhalten wir weiter

$$|f(x) - (K_m f)(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{m^4} \sum_{k=1}^{m} |x - x_k^{(m)}|^\alpha \cdot (1 - x x_k^{(m)})^2 \frac{T_m^4(x)}{(x - x_k^{(m)})^4} +$$
$$+ \frac{2M}{3m^2} \cdot \sum_{k=1}^{m} |x - x_k^{(m)}|^\alpha \cdot (1 - x x_k^{(m)}) \cdot \frac{T_m^2(x)}{(x - x_k^{(m)})^2}.$$

Mit Hilfe von Satz 1 folgt

$$|f(x) - (K_m f)(x)| \leqslant \begin{cases} M \cdot c_2 \cdot m^{-\alpha} + \frac{2}{3} M \cdot c_\alpha \cdot m^{-\alpha} & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ M \cdot c_2 \cdot m^{-1} + \frac{2}{3} M \cdot c_1 \cdot \frac{\log m}{m} & \text{für } \alpha = 1. \blacksquare \end{cases}$$

Für beliebiges $f \in C(K)$ erhalten wir dadurch eine Abschätzung von $\|f - K_m f\|$, daß wir f durch einen interpolierenden Polygonzug approximieren und dann Satz 2 anwenden. Zunächst benötigen wir dazu

Hilfssatz 3 (vgl. O. SHISHA und B. MOND [4]). *Sei $f \in C(K)$ und $N \in \mathbf{N}$. f_N sei der Polygonzug, der durch die Interpolationsbedingungen*

$$f_N\left(-1 + \frac{2j}{N}\right) = f\left(-1 + \frac{2j}{N}\right) \quad (j = 0, 1, \ldots, N)$$

bestimmt ist. Dann folgt:

(a) $f_N \in \mathrm{Lip}_M\, 1$ *mit der Konstanten* $M = \frac{N}{2} \cdot \omega\left(f, \frac{2}{N}\right)$.

(b) $\|f - f_N\| \leqslant \omega\left(f, \frac{2}{N}\right)$.

Hiermit erhalten wir

SATZ 4. *Es sei $f \in C(K)$ und $m \geqslant 3$. Dann gilt*

$$\|f - K_m f\| \leqslant d_2 \cdot \omega\left(f, \frac{\log m}{m}\right)$$

mit einer geeigneten Konstanten $d_2 > 0$.

Beweis. Wegen $\|K_m f - K_m f_N\| \leqslant \|f - f_N\|$ folgt

$$\|f - K_m f\| \leqslant \|f - f_N\| + \|f_N - K_m f_N\| + \|K_m f_N - K_m f\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \omega\left(f, \frac{2}{N}\right) + \left(c_2 + \frac{2}{3} c_1\right) \cdot M \cdot \frac{\log m}{m} =$$

$$= \omega\left(f, \frac{2}{N}\right) \cdot \left(2 + \left(c_2 + \frac{2}{3} c_1\right) \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{\log m}{m}\right).$$

Für $N = \left[1 + \frac{2m}{\log m}\right]$ $(m \geqslant 3)$ ergibt sich wegen $\frac{2m}{\log m} \leqslant N \leqslant 1 + \frac{2m}{\log m}$

weiter:

$$\|f - K_m f\| \leqslant \omega\left(f, \frac{\log m}{m}\right) \cdot \left(2 + \left(c_2 + \frac{2}{3} c_1\right)\left(1 + \frac{1}{2e}\right)\right)$$

(mit $e = 2{,}718\ldots$). $\blacksquare$

Es stellt sich nun die Frage, ob die Abschätzung aus Satz 2 (bzw. Satz 4) größenordnungsmäßig verbessert werden kann. Wie bei der Hermite-Fejér-Interpolation (vgl. P. O. H. VÉRTESI [6]) können wir zeigen, daß keine Verbesserung möglich ist. Dazu benutzen wir den

Hilfssatz 5. (P. O. H. VÉRTESI [6, Theorem 2.1]) *Ist m gerade, so gilt stets*

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{1}{|x_k^{(m)}|} > d_3 \cdot m \cdot \log m$$

mit einer Konstanten $d_3 > 0$.

SATZ 6. *Es existiert ein $f_0 \in \mathrm{Lip}_1\, 1$ derart, daß für $m = 2, 4, 6, \ldots$ gilt:*

$$\|f_0 - K_m f_0\| \geqslant \frac{1}{m^3} + d_3 \cdot \frac{\log m}{m}.$$

Hierbei ist d_3 die Konstante aus Hilfssatz 5.

Beweis. Wir benutzen — entsprechend wie P. O. H. VÉRTESI [6] im Falle der Hermite-Fejér-Interpolation — die Funktion f_0 mit $f_0(x) = |x|$. Wegen $\frac{2}{3} \cdot (m^2 - 1) \geqslant \frac{1}{2} m^2$ für $m \geqslant 2$ erhalten wir

$$\|f_0 - K_m f_0\| \geqslant |f_0(0) - (K_m f_0)(0)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(m)}| \cdot \frac{T_m^4(0)}{m^4 \cdot x_k^{(m)4}} + \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(m)}|^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (m^2 - 1) \cdot \frac{T_m^4(0)}{m^4 \cdot x_k^{(m)4}} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \cdot \frac{1}{m^4} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{1}{|x_k^{(m)}|^3} + \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{1}{|x_k^{(m)}|} \geqslant \frac{1}{m^3} + d_3 \cdot \frac{\log m}{m}. \blacksquare$$

LITERATUR

[1] A m e l k o v i č V. G., *Die Ordnung der Annäherung stetiger Funktionen mit Fejér-Hermite-Interpolationspolynomen*. Polytechn. Inst. Odessa, Naucnyje Sapiski **34**, 70–77 (1961) (Russisch).

[2] K n o o p H.-B., *Eine Folge positiver Interpolationsoperatoren*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **27**, (1976).

[3] M o l d o v a n E., *Observaţii asupra unor procedee de interpolare generalizate*. Acad. Rep. Pop. Romîne, Bul. Şti. Secţ. Şti. Mat. Fiz. **6**, 477–482 (1954).

[4] S h i s h a O. und B. M o n d, *The rapidity of convergence of the Hermite-Fejér approximation to functions of one or several variables*. Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 1269–1276 (1965).

[5] S t a n c u D. D., *Asupra unei demonstraţii a teoremei lui Weierstrass*. Bul. Inst. Politehn. Iaşi **V** (**IX**), 47–49 (1959).

[6] V é r t e s i P. O. H., *On the convergence of Hermite-Fejér interpolation*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **22**, 151–158 (1971).

Eingegangen am 6. IX. 1973.

Gesamthochschule Duisburg
Institut für Mathematik