MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 2, 1975, pp. 157 – 159

OBSERVATIONS SUR LA NOTION DE CONVEXITÉ

par
ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

1. L'idée de l'interpolation, ayant comme point de départ les oeuvres de Cauchy, de Lagrange et celles d'Hermitte, s'est developée non seulement vers les méthodes de calcul, mais aussi vers l'étude du comportement par rapport à un ensemble de fonctions, doué d'une certaine propriété d'interpolation. Pour préciser, il suffit de donner comme exemple la théorie des fonctions convexes d'ordre suppérieure [5], et la convexité par rapport à un ensemble interpolatoire [1, 2, 3]. La convexité d'ordre suppérieur n'est autre chose que le résultat de l'étude du comportement d'une fonction par rapport à l'ensemble des polynomes d'un degrès fixé, qui ont des valeurs communes avec la fonction considérée, sur certains points. On exprime le résultat de cet étude par le signe des différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, quand il s'agit de la convexité d'ordre n, $n \geqslant -1$.

2. Soit f une fonction réelle, définie sur un ensemble $X \subseteq \mathbf{R}$ $\mathbf{R}$ étant l'axe réel. Le nombre $n \geqslant -1$ étant donné, on suppose que l'ensemble X contient au moins $n+2$ points distincts. Considérons les points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \tag{1}$$

où $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$. Le fait que la fonction f est convexe d'ordre n sur les points (1) s'exprime par l'inégalité

$$f(x_{n+1}) - L(\mathfrak{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) > 0 \tag{2}$$

où $L(\mathfrak{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ est le polynome de Lagrange construit pour f sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. L'inégalité (2) peut être exprimée aussi par

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0, \tag{3}$$

compte tennant de la formule

$$f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{L}_n\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\,; f)(x_{n+2}) = \tag{4}$$
$$= (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \ldots (x_{n+2} - x_{n+1})[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,; f],$$

qu'on trouve dans [3, 5]. Mais l'inégalité (3) signifie que le polynome de degrès $n + 1$ qui prend les valeurs de la fonction f sur les points (1), c'est à dire le polynome

$$P_f = L(\mathfrak{L}_{n+1}\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,; f), \tag{5}$$

a le coefficient de x^{n+1} positif, ce qui peut être traduit par

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,; P_f] > 0. \tag{6}$$

L'inégalité (6) signifie que le polynome (5) est il même une fonction convexe d'ordre n sur les points (1).

3. Considérons maintenant une fonctionnelle $A : F \to \mathbf{R}$, où F est un ensemble interpolatoire d'ordre n sur un intervalle $[a, b]$. Le nombre naturel $n \geqslant 2$ est fixé. On entend par cet propriété que les éléments de l'ensemble F sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et que pour chaque système de n points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$ et quels que soient les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe dans F une fonction et une seule, qui prend sur les points x_i, respectivement les valeurs y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Supposons que la fonctionnelle A ne se réduit pas à une constant sur F et que l'ensemble F a un sousensemble $E \subset F$, où E est interpolatoire d'ordre $n - 1$ sur $[a, b]$ et si $h \in E$, alors $A(h) = \alpha$. Étant donné l'ensemble $Y \subseteq [a, b]$ qui contient au moins n points distincts, soit g une fonction réelle définie sur Y. Considérons les points distincts

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_n, \tag{7}$$

de l'ensemble Y. Nous designons par $L(F\,;\ u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)$ la fonction de l'ensemble F, uniquement déterminée, qui prend les valeurs de la fonction g sur les points (7), c'est à dire

$$L(F\,;\ u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)(u_i) = g(u_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Définition 1. *La fonction g est (A, F)-convexe ((A, F)-polynomialle respectivement (A, F)-concave) sur les points (7) si l'on a $A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) > \alpha (A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) = \alpha$, respectivement $A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) < \alpha)$.*

Définition 2. *La fonction g est (A, F)-convexe ((A, F)-nonconcave, (A, F)-polynomialle, (A, F)-nonconvexe, respectivement (A, F)-concave) sur l'ensemble Y, si l'on a toujours $A(L(F, u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) > \alpha$ $(A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) \geqslant \alpha$, $A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) = \alpha$, $A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) \leqslant \alpha$, respectivement toujours $A(L(F\,; u_1, u_2, \ldots, u_n\,; g)) < \alpha)$ quels que soient les points (7) de l'ensemble Y.*

Dans les travaux [2, 4] nous avons considéré des fonctionnelles qui satisfont les conditions imposées à la fonctionnelle A. Dans [3], nous avons aussi défini la propriété de monotonie par épis d'une telle fonctionnelle A.

Si l'ensemble Y se réduit à m points

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_m \tag{8}$$

où $m \geqslant n$, alors on peut considérer la fonction $L(F\,; u_1, u_2, \ldots u_n\,; g)$ pour chaque système (7) de points de l'ensemble (8) et le problème qui se pose est de trouver des conditions qui assurent *une* des propriétés contenues dans la définition 2, pour g, sur l'ensemble (8).

THÉORÈME. *Si la fonctionnelle A est monotonne par épis, alors la condition nécéssaire et suffisante pour que la fonction g soit (A, F)-convexe sur l'ensemble de points (8) est qu'elle soit (A, F)-convexe sur chaque système (7) de n points consécutifs de l'ensemble (8).*

La démonstration est une conséquence du théorème de la moyenne qui est valable pour une fonctionnelle A qui est monotone par épis [3].

On peut énoncer des théorèmes correspondants pour les autres propriétés contenue dans la définition 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Elena Popoviciu (Moldovan), *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate*, Studii și Cerc. Șt. Seria Mat. (Cluj), 6, 3–4, 65–73 (1955).

[2] — *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica (Cluj, 1 (24), 49–80 (1959).

[3] — *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj, 1972.

[4] — *Sur une propriété de monotonie des différences divisées*, Mathematical Structures, Computational Mathematics, Mathematical Modelling, Sofia, 399–403, 1975.

[5] Tiberiu Popoviciu, Les fonctions convexes, 1945, Paris.

Reçu le 15. V. 1975.