MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 2, 1975, pp. 161 – 170

ZUR BERECHNUNG DER ABSOLUTEN PROJEKTIONSKONSTANTEN ENDLICH–DIMENSIONALER NORMIERTER VEKTORRÄUME

von

PETER POTTINGER

(Duisburg)

Zahlreiche Autoren (vgl. etwa E. W. CHENEY und K. PRICE [1], D. J. H. GARLING und Y. GORDON [3], D. B. GOODNER [4] und B. GRÜNBAUM [6]) untersuchten *stetige lineare Projektionen* $P : Y \to X$, wobei X ein Teilraum des normierten Vektorraumes Y *) ist, um durch $Py \in X$ eine günstige Approximation des Elementes $y \in Y$ zu gewinnen. Die Abschätzung (vgl. E. W. CHENEY und K. PRICE [1])

$$\|y - Py\| \leqslant (\|P\| + 1) \cdot \operatorname{dist}(y, X),$$

mit

$$\operatorname{dist}(y, X) := \inf_{x \in X} \|y - x\|,$$

zeigt, daß die Größe $\|P\|$ ein Maß für die Approximationsgüte von $y \in Y$ durch $Py \in X$ ist. Deshalb treffen wir

Definition 1. *Ist X ein Teilraum des normierten Vektorraumes Y, so heißt*

$$P(X, Y) := \begin{cases} \inf \{\|P\| \in \mathbf{R} : P \text{ stetige lineare Projektion von } Y \text{ auf } X\} \\ \infty, \text{ falls keine stetige lineare Projektion von } Y \text{ auf } X \text{ existiert} \end{cases}$$

*) Als Skalarkörper verwenden wir im weiteren Verlauf der Arbeit stets die reellen Zahlen.

die relative Projektionskonstante von X in Y. Ist X ein normierter Vektorraum, so ist

$$P(X) := \sup_Y P(X, Y),$$

wobei das Supremum über alle normierten Obervektorräume Y von X genommen wird, die absolute Projektionskonstante von X.

Da für jeden unendlich-dimensionalen Banachraum, der separabel oder reflexiv ist, gilt (vgl. M. M. DAY [2] und A. GROTHENDIECK [5])

$$P(X) = \infty,$$

konzentriert sich das Interesse hauptsächlich auf die Berechnung absoluter Projektionskonstanten endlich-dimensionaler normierter Vektorräume. Als wesentliches Problem bei der Entwicklung einer allgemeinen Methode zur Bestimmung von absoluten Projektionskonstanten endlich-dimensionaler normierter Vektorräume ergibt sich folgende Fragestellung von E. W. CHENEY und K. PRICE [1]:

Gilt für jeden endlich-dimensionalen normierten Vektorraum X

$$P(X) = \sup_Y P(X, Y),$$

wobei das Supremum nur über alle endlich-dimensionalen normierten Obervektorräume Y von X genommen wird?

Diese Frage werden wir in Satz 10 positiv beantworten. Zu diesem Zweck beweisen wir die oben genannte Aussage zunächst für solche endlich-dimensionalen normierten Vektorräume, deren Einheitskugel des Dualraumes nur endlich viele Extremalpunkte besitzt. Dann übertragen wir dieses Ergebnis mittels eines Approximationsprozesses auf beliebige endlich-dimensionale normierte Vektorräume.

Zuvor stellen wir einige Hilfsmittel zusammen.

LEMMA 2 (S. R. PHILLIPS [7]). *Ist $m(S)$ der Vektorraum der auf der Menge S beschränkten reellwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm, so gilt $P(m(S)) = 1$.*

LEMMA 3 (D. B. GOODNER [4]). *X sei ein Teilraum des normierten Vektorraumes Y mit $P(Y) = 1$; dann gilt $P(X) = P(X, Y)$.*

Mit diesen Aussagen erhalten wir folgendes Teilergebnis:

SATZ 4. *X sei ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, und die Einheitskugel des topologischen Dualraumes X' (versehen mit der starken Topologie) besitze nur endlich viele Extremalpunkte $E = \{\pm\Phi_i \in X' : 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Dann existiert ein normierter Obervektorraum Y von X mit den Eigenschaften*

$$P(Y) = 1, \; P(X, Y) = P(X)$$

und $\dim Y = k$.

Beweis. Nach dem Satz von Krein-Milman gilt für die konvexe Hülle co (E) der Extremalpunktmenge E und für die Einheitskugel $S(X')$ des topologischen Dualraumes X' von X

$$S(X') = \mathrm{co}\,(E).$$

Hieraus ergibt sich mit dem Satz von Hahn-Banach für jedes $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{x' \in E} |x'(x)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\Phi_i(x)|.$$

Hierbei ist die Abbildung

$$\|\cdot\| : X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$$

die Norm auf X. Definieren wir den normierten Vektorraum m^k durch

$$m^k := (\mathbf{R}^k, \|\ \|_\infty)$$

mit

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbf{R}^k \ni (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} \mapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i| \in \mathbf{R},$$

so ist die Abbildung

$$A : X \ni x \mapsto (\Phi_i(x))_{1 \leqslant i \leqslant k} \in m^k$$

eine isometrische Einbettung. Durch Umbenennen der Elemente Ax in x und durch Übernahme der Vektorraumstruktur sowie der Norm von m^k erhalten wir mit Lemma 2 einen normierten Obervektorraum Y von X mit

$$P(Y) = P(m^k) = 1.$$

Nach Lemma 3 gilt

$$P(X) = P(X, Y) \text{ und } \dim Y = \dim m^k = k. \blacksquare$$

Um die Aussage von Satz 4 auf beliebige endlich-dimensionale normierte Vektorräume übertragen zu können, approximieren wir die Ausgangsnorm durch geeignete neue Normen.

SATZ 5. *$(X, \|\cdot\|)$ sei ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, und die Menge E der Extremalpunkte der Einheitskugel des Dualraumes X' von X bestehe aus unendlich vielen Punkten. Dann existiert zu jeder reellen Zahl $1 > \varepsilon > 0$ eine Norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ auf X, die erzeugt wird als duale Norm zum Minkowskifunktional der absolutkonvexen Hülle* aco (E_m) *von E_m mit*

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1} \cdot \|x\|_\varepsilon \text{ für alle } x \in X.$$

Hierbei ist E_m eine geeignete endliche Teilmenge von E.

Beweis. Da X ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum ist, ist die Menge

$$\partial S(X') := \{x' \in X' : \|x'\| = 1\}$$

kompakt. Damit existieren zu jeder reellen Zahl $1 > \varepsilon > 0$ Punkte $y'_i \in \partial S(X')$ für $1 \leqslant i \leqslant d$ mit der Eigenschaft:

Zu jedem $x' \in \partial S(X')$ existiert ein Element y'_{i_0} mit

$$\|x' - y'_{i_0}\| \leqslant \varepsilon.$$

Ferner gilt für die Einheitskugel $S(X')$ von X' und für die konvexe Hülle $\mathrm{co}\,(E)$ von E nach dem Satz von Krein-Milman $S(X') = \mathrm{co}\,(E)$. Also existiert zu jedem y'_i für $1 \leqslant i \leqslant d$ eine Darstellung.

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{ik} \cdot x'_{ik} \text{ mit } \lambda_{ik} > 0, \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{ik} = 1 \text{ und } x'_{ik} \in E.$$

Ferner definieren wir die Menge

$$E_m := \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d} \bigcup_{k=1}^{n_i} \{x'_{ik}\} \text{ mit } m = \sum_{i=1}^{d} n_i.$$

Gegebenenfalls ergänzen wir E_m so, daß span $(E_m) = X'$ gilt. Dann ist die absolutkonvexe Hülle $\mathrm{aco}\,(E_m)$ der Menge E_m beschränkt, abgeschlossen und absorbierend in X'. Also liefert das Minkowskifunktional von $\mathrm{aco}\,(E_m)$ eine Norm auf X' mit der Einheitskugel $\mathrm{aco}\,(E_m)$ (vgl. z. B. A. E. TAYLOR [10]). Wegen der Inklusion $\mathrm{aco}\,(E_m) \subset S(X')$ gilt für die duale Norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ auf X:

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \|x\| \text{ für alle } x \in X.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert zu jedem $x \in X$ ein Element $x' \in \partial S(X')$ mit $x'(x) = \|x\|$. Zu x' existiert ein Element $y'_{i_0} \in \mathrm{aco}\,(E_m)$ mit

$$\|x' - y'_{i_0}\| \leqslant \varepsilon.$$

Wir erhalten also

$$\|x\| = x'(x) \leqslant |y'_{i_0}(x)| + \varepsilon \cdot \|x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y' \in \mathrm{aco}\,(E_m)} |y'(x)| + \varepsilon \cdot \|x\| =$$
$$= \|x\|_\varepsilon + \varepsilon \cdot \|x\| \text{ für alle } x \in X.$$

Insgesamt folgt für alle $x \in X$

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1} \cdot \|x\|_\varepsilon. \blacksquare$$

Bemerkung 6.

(a) *Die Aussage von Satz 5 ist trivial erfüllt, falls die Einheitskugel von X' nur endlich viele Extremalpunkte besitzt.*

(b) *Für die Menge der Extremalpunkte $\tilde{E}$ der Menge* $\mathrm{aco}\,(E_m)$ *aus Satz 5 gilt*

$$\tilde{E} = (-E_m) \cup E_m.$$

Ist nämlich

$$E_m = \{x'_i \in X' : 1 \leqslant i \leqslant m(\varepsilon)\},$$

so folgt aus einer Darstellung

$$x'_i = \lambda \cdot f_1 + (1 - \lambda) f_2 \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \text{ und } f_1, f_2, \in \mathrm{aco}\,(E_m).$$

notwendig $f_1, f_2 \in S(X')$ und somit $f_1 = f_2 = x'_i$, da $x'_i \in E$ ist für $1 \leqslant i \leqslant m$. Ist andererseits $f \in \tilde{E}$, so existiert eine Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x'_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leqslant 1.$$

Da f ein Extremalpunkt von der Einheitskugel $\mathrm{aco}\,(E_m)$ in der Norm $\|\cdot\|_{\varepsilon'}$, ist, die vom Minkowskifunktional von $\mathrm{aco}\,(E_m)$ erzeugt wird, gilt

$$\|f\|_{\varepsilon'} = 1 \text{ und daher } \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| = 1.$$

Wählen wir nun ein λ_{i_0} mit $|\lambda_{i_0}| > 0$ und $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, so gilt

$$f = |\lambda_{i_0}| \cdot f_1 + (1 - |\lambda_{i_0}|) \cdot f_2$$

mit

$$f_1 = \mathrm{sign}\, \lambda_{i_0} \cdot x'_{i_0}$$

und

$$f_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \frac{\lambda_i}{1 - |\lambda_{i_0}|} \cdot x'_i \in \mathrm{aco}\,(E_m).$$

Aus der Annahme $f \in \tilde{E}$ folgt also $f = f_1$ und somit $f \in E_m \cup (-E_m)$. Wir erhalten daher $\tilde{E} = (-E_m) \cup E_m$.

Lemma 7 (B. GRÜNBAUM [6]). *X und Y seien normierte Vektorräume und die Abbildung $A : X \to Y$ ein topologischer Vektorraumisomorphismus mit*

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \leqslant \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \neq 0.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{\lambda} \cdot P(Y) \leqslant P(X) \leqslant \lambda \cdot P(Y).$$

Mit Satz 5 und Bemerkung 6 erhalten wir im Zusammenhang mit Satz 4

Korollar 8. *$(X, \|\cdot\|)$ sei ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum. Dann existiert eine Folge normierter Vektorräume $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $X_k := (X, \|\cdot\|_k)$, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(i) *Für jede natürliche Zahl $k > 1$ und für jedes Element $x \in X$ gilt*

$$\|x\|_k \leqslant \|x\| \leqslant \frac{k}{k-1} \cdot \|x\|_k.$$

(ii) *Zu jedem normierten Vektorraum X_k existiert ein endlichdimensionaler normierter Obervektorraum Y_k mit*

$$P(Y_k) = 1 \text{ und } P(X_k) = P(X_k, Y_k).$$

(iii) *Es gilt*

$$P(X_k) \to P(X) \text{ für } k \to \infty.$$

Beweis. Besitzt die Einheitskugel $S(X')$ von X' nur endlich viele Extremalpunkte, so ist die Behauptung nach Satz 4 erfüllt. Hat $S(X')$ unendlich viele Extremalpunkte, so konstruieren wir gemäß Satz 5 zu $\varepsilon = 1/k$ mit $k > 1$ eine Folge normierter Vektorräume $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $X_k = (X, \|\cdot\|_k)$ derart, daß für jedes $k \in \mathbf{N}$ die Einheitskugel des Dualraumes $S(X'_k)$ nur endlich viele Extremalpunkte besitzt und für alle $x \in X$ gilt

(i) $$\|x\|_k \leqslant \|x\| \leqslant \frac{k}{k-1} \cdot \|x\|_k.$$

Nach Lemma 7 folgt

$$\frac{k-1}{k} \cdot P(X_k) \leqslant P(X) \leqslant \frac{k}{k-1} \cdot P(X_k).$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß die beschränkte reelle Zahlenfolge $(P(X_k))_{k \in \mathbf{N}}$ konvergiert, sonst wählen wir eine konvergente Teilfolge. Damit gilt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k-1}{k} \cdot P(X_k) \leqslant P(X) \leqslant \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k-1} \cdot P(X_k)$$

und

$$\lim_{k \to \infty} P(X_k) \leqslant P(X) \leqslant \lim_{k \to \infty} P(X_k).$$

Also folgt

(iii) $$\lim_{k \to \infty} P(X_k) = P(X).$$

Da $S(X_k)$ nur endlich viele Extremalpunkte enthält, ist nach Satz 4 die Eigenschaft (ii) ebenfalls erfüllt. ∎

Für relative Projektionskonstanten ergibt sich folgende Lemma 7 entsprechende Aussage:

Lemma 9. *Sind X und Y normierte Vektorräume und die Abbildung $A: X \to Y$ ein topologischer Vektorraumisomorphismus mit*

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \leqslant \lambda \in \mathbf{R}, \ \lambda \neq 0,$$

so gilt für jeden Teilraum X_1 von X und für $A(X_1) = Y_1$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot P(Y_1, Y) \leqslant P(X_1, X) \leqslant \lambda \cdot P(Y_1, Y).$$

Beweis. Ist $P(X_1, X) = \infty$, so folgt $P(Y_1, Y) = \infty$; denn aus $P(Y_1, Y) < \infty$ würde für jede stetige lineare Projektion $\overline{P}: Y \to Y_1$ die Existenz einer stetigen linearen Projektion

$$A^{-1} \cdot \overline{P} \cdot A : X \to X_1$$

folgen. Analog erhalten wir aus $P(Y_1, Y) = \infty$ die Gleichung $P(X_1, X) = \infty$. Es gelte nun $P(Y_1, Y)$ und $P(X_1, X) < \infty$. Dann liefern für alle stetigen Projektionen $P: X \to X_1$ und $\overline{P}: Y \to Y_1$ die Transformationen

$$P_A : A \cdot P \cdot A^{-1} : Y \to Y_1$$

und

$$\overline{P}_A : A^{-1} \cdot \overline{P} \cdot A : X \to X_1$$

stetige lineare Projektionen mit

$$\|P_A\| \leqslant \lambda \cdot \|P\| \quad \text{und} \quad \|\overline{P}_A\| \leqslant \lambda \cdot \|\overline{P}\|.$$

Somit erhalten wir

$$P(Y_1, Y) \leqslant \lambda \cdot P(X_1, X) \text{ und } P(X_1, X) \leqslant \lambda \cdot P(Y_1, Y);$$

also gilt

$$\frac{1}{\lambda} \cdot P(Y_1, Y) \leqslant P(X_1, X) \leqslant \lambda \cdot P(Y_1, Y). \ \blacksquare$$

Mit den nun bereitgestellten Ergebnissen beweisen wir die zu Beginn zitierte Vermutung von E. W. CHENEY und K. PRICE [1].

SATZ 10. *Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, dann gilt*

$$P(X) = \sup_Y P(X, Y),$$

wobei das Supremum nur über alle endlich-dimensionalen normierten Obervektorräume Y von X genommen wird.

Beweis. Gemäß Korollar 8 existiert eine Folge von normierten Vektorräumen $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $X_k := (X, \|\cdot\|_k)$ und $P(X_k) \to P(X)$ für $k \to \infty$. Außerdem können wir für $k > 1$ die normierten Vektorräume X_k so wählen, daß für alle $x \in X$ gilt

$$\|x\|_k \leqslant \|x\| \leqslant \frac{k}{k-1} \cdot \|x\|_k$$

und zu jedem normierten Vektorraum X_k ein endlich-dimensionaler Obervektorraum Y_k existiert mit

$$P(X_k, Y_k) = P(X_k) \text{ und } P(Y_k) = 1.$$

Zu einer vorgegebenen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ bestimmen wir eine natürliche Zahl $k_0 > 1$ mit

$$P(X) \leqslant P(X_{k_0}) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k_0 - 1} P(X) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun konstruieren wir einen geeigeneten normierten Obervektorraum $\tilde{Y}_{k_0}$ von X. Jedes $x' \in X'$ ist ebenfalls ein Element aus X'_{k_0} mit

$$\|x'\|_{X'_{k_0}} \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1} \cdot \|x'\|_{X'}.$$

Also existiert insbesondere zu jedem $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$ nach dem Satz von Hahn-Banach eine stetige Fortsetzung $\bar{x}' \in Y'_{k_0}$ mit

$$\|\bar{x}'\|_{Y'_{k_0}} \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1}.$$

Wir definieren nun die Menge

$$G := \left\{ y' \in Y'_{k_0} : \|y'\|_{Y'_{k_0}} \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1} \text{ und } \|y'|_X\|_{X'} = 1 \right\}.$$

Die Abbildung

$$\|\cdot\|_\sim : Y_{k_0} \ni y \mapsto \max\left(\|y\|_{Y_{k_0}}, \sup_{y' \in G} |y'(y)|\right) \in \mathbf{R}$$

liefert eine Norm auf dem Vektorraum Y_{k_0}. Wir definieren daher den normierten Vektorraum $\tilde{Y}_{k_0}$ durch

$$\tilde{Y}_{k_0} := (Y_{k_0}, \|\cdot\|_\sim).$$

Ferner induziert die Norm von $\tilde{Y}_{k_0}$ auf X die Ausgangsnorm; denn für alle $x \in X$ gilt:

$$\|x\|_\sim = \max\left(\|x\|_{Y_{k_0}}, \sup_{y' \in G} |y'(x)|\right) =$$

$$= \max\left(\|x\|_{X_{k_0}}, \|x\|\right) = \|x\|.$$

Also ist $\tilde{Y}_{k_0}$ ein endlich-dimensionaler normierter Obervektorraum von X. Um Lemma 9 anwenden zu können, bestimmen wir nun die Norm des topologischen Isomorphismus

$$A : \tilde{Y}_{k_0} \ni y \mapsto y \in Y_{k_0}.$$

Für jedes Element $y \in \tilde{Y}_{k_0}$ gilt

$$\|A(y)\|_{Y_{k_0}} = \|y\|_{Y_{k_0}} \leqslant \|y\|_\sim;$$

also folgt $\|A\| \leqslant 1$. Unter der inversen Abbildung

$$A^{-1} : Y_{k_0} \ni y \mapsto y \in \tilde{Y}_{k_0}$$

ergibt sich für jedes Element $y \in Y_{k_0}$ die Abschätzung

$$\|A^{-1}(y)\|_\sim = \|y\|_\sim = \max\left(\|y\|_{Y_{k_0}}, \sup_{y' \in G} |y'(y)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1} \cdot \|y\|_{Y_{k_0}},$$

da nach Konstruktion von G für alle $y' \in G$ gilt

$$\|y'\|_{Y'_{k_0}} \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1}.$$

Wir erhalten also

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1} \quad \text{und} \quad \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1}.$$

Mit Lemma 9 folgern wir

$$P(X_{k_0}, Y_{k_0}) \leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1} \cdot P(X, \tilde{Y}_{k_0}),$$

da $A(X) = X_{k_0}$ ist. Insgesamt gilt die Abschätzung

$$P(X) \leqslant P(X_{k_0}) + \frac{\varepsilon}{2} = P(X_{k_0}, Y_{k_0}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_0}{k_0 - 1} \cdot P(X, \tilde{Y}_{k_0}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant P(X, \tilde{Y}_{k_0}) + \frac{1}{k_0 - 1} \cdot P(X) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant P(X, \tilde{Y}_{k_0}) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist die Behauptung bewiesen. ∎

Die in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse werden in [8] und [9] dazu verwendet, eine allgemeine Methode zur Bestimmung von absoluten Projektionskonstanten endlich-dimensionaler normierter Vektorräume herzuleiten.

LITERATUR

[1] Cheney, E. W. und K. Price, *Minimal projections.* Erschienen in: Talbot A. (ed.) *Approximation Theory.* New York—London: Academic Press 1970, 261—289.

[2] Day, M. M., *Normed linear spaces.* Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer 1962.

[3] Garling, D. J. H. und Y. Gordon, *Relations between some constants associated with finite-dimensional Banach-spaces.* Israel J. Math. **9**, 346—361 (1971).

[4] Goodner, D. B., *Projections in normed linear spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 89—109 (1950).

[5] Grothendieck, A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. **16**, 1955.

[6] Grünbaum, B., *Projection constants.* Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 451—465 (1960).

[7] Phillips, S. R., *On linear transformations.* Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 516–541 (1940).
[8] Pottinger, P., *Absolute Projektionskonstanten endlich-dimensionaler normierter Vektorräume.* Dissertation. Bochum 1973.
[9] Pottinger, P., *Zur Fortsetzung stetiger linearer Abbildungen.* ZAMM **55**, T257–T259 (1975).
[10] Taylor, A. E., *Introduction to functional analysis.* New York–London: Wiley 1958.

Eingegangen am 6. IX. 1973.

Gesamthochschule Duisburg
Institut für Mathematik