MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 4, N° 2, 1975, pp. 171 — 178

SUR CERTAINES SUITES DE FONCTIONNELLES

par

ION RAŞA
(Cluj-Napoca)

0. On considère la suite $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ où $A_n : C[a, b] \to R$, $n = 1, 2, \ldots$ Soit $x_0 \in [a, b]$.

D'après un théorème de P. P. KOROVKINE, *si*

1° A_n est linéaire et positive, $n = 1, 2, \ldots$,

2° $A_n(1) \to 1$, $A_n(x) \to x_0$, $A(x^2) \to x_0^2$,

alors $A_n(f) \to f(x_0)$ pour chaque fonction $f \in C[a, b]$.

Nous démontrons un résultat plus général :

— au lieu de l'ensemble des fonctionnelles linéaires et positives nous allons introduire un ensemble $\mathcal{G}$ plus vaste de fonctionnelles linéaires,

— les conditions 2° seront remplacées par

$$b(A_n) = A_n(x^2) - \frac{A_n^2(x)}{A_n(1)} \to 0.$$

Alors la suite $(A_n(f))$ ne sera pas, en général, convergente ; nous pouvons indiquer seulement sa limite inférieure et sa limite supérieure. D'ici on peut retrouver le théorème de KOROVKINE comme un cas particulier.

Pour une fonctionnelle $A \in \mathcal{G}$ le nombre $b(A)$ coïncide avec la norme (dans un espace dual bien précisé) d'une fonctionnelle attachée à A ; on verra que ce nombre a aussi la signification d'une variance. D'ailleurs les résultats indiqués ont des interprétations naturelles en théorie des probabilités. Nous obtenons ainsi une formule de la moyenne pour les moments d'une variable aléatoire bornée, et certaines propositions en liaison avec la bien connue „méthode des moments".

Nous avons obtenu ces résultats à l'aide de la théorie des fonctionnelles de la forme simple, qui a été élaborée par TIBERIU POPOVICIU. Nous tenons aussi à remercier le prof. dr. doc. ELENA POPOVICIU.

1. Soit $[a, b]$ un intervalle borné et fermé de l'axe réel. Par $1, x, x^2$ nous désignerons les fonctions réelles f_0, f_1, f_2 définies sur $[a, b]$ telles que $f_i(t) = t^i$, $t \in [a, b]$, $i = 0, 1, 2$. Soit $C[a, b]$ l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[a, b]$.

Pour $x_0 \in [a, b]$ considérons le cône $K_{x_0} = \{f \in C[a, b] | f(x_0) = 0,$ f convexe d'ordre 1 sur $[a, b]\}$.

Définition 1. *On dit que la fonctionnelle* $A: C[a, b] \to R$ *est* g*—positive s'il existe* $x_0 \in [a, b]$ *tel que* $A(K_{x_0}) \subseteq (0, +\infty)$.

Soit $\mathcal{G}_0$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires et g-positives. Il est aisé de démontrer que si $A \in \mathcal{G}_0$ et si $x_0 \in [a, b]$ tel que $A(K_{x_0}) \subseteq (0, +\infty)$, alors $A(x) = x_0 \cdot A(1)$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$ soit d_{x_0} la fonctionnelle de DIRAC: $d_{x_0}(f) = f(x_0)$, $f \in C[a, b]$.

Soit $D = \{d_{x_0} | x_0 \in [a, b]\}$.

Posons $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cup R \cdot D$.

Définition 2. *On dit que la fonctionnelle linéaire* $A: C[a, b] \to R$ *a le degré d'exactitude 1 si* $A(1) = A(x) = 0$, $A(x^2) \neq 0$.

Définition 3 (TIBERIU POPOVICIU). *On dit que la fonctionnelle linéaire* $A: C[a, b] \to R$ *qui a le degré d'exactitude 1 est de la forme simple si, pour tout* $f \in C[a, b]$, *on peut trouver les points* x_0, x_1, x_2 *distincts de* $[a, b]$ *tels que*

$$A(f) = K[x_0, x_1, x_2; f].$$

où le nombre $K \neq 0$ *est indépendant de la fonction* f.

La symbole $[x_0, x_1, x_2; f]$ signifie la différence divisée de la fonction f sur les points x_0, x_1, x_2.

Soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $C[a, b]$, du degré d'exactitude 1, de la forme simple, et qui prennent la valeur 1 sur x^2.

Le théorème qui va suivre est dû à TIBERIU POPOVICIU.

THÉORÈME 1. *Si* $S: C[a, b] \to R$ *est linéaire et si*

1) $S(1) = S(x) = 0$, $S(x^2) = 1$,

2) $S(f) \neq 0$ *pour toute fonction* f *convexe d'ordre 1,*

alors $S \in \mathcal{S}_1$.

Pour la démonstration on peut consulter [2], [3]. Pour toute fonctionnelle $A: C[a, b] \to R$ notons

$$b(A) = \begin{cases} A(x^2) - \dfrac{A^2(x)}{A(1)}, & \text{si } A(1) \neq 0 \\ A(x^2), & \text{si } A(1) = 0. \end{cases}$$

Lemme 1. *La fonctionnelle linéaire* $A: C[a, b] \to R$, *est* g*-positive si et seulement si* $b(A) > 0$ *et il existe* $x_0 \in [a, b]$ *et* $S \in \mathcal{S}_1$ *tels que* $A = A(1) d_{x_0} + b(A) \cdot S$.

La démonstration s'appuie sur le théorème 1 et sur l'observation que si $A \in \mathcal{G}_0$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $A(x) = A(1)x_0$.

En utilisant le théorème 1 et un résultat qu'on peut trouver dans [5] (théorème 1), on peut démontrer le

Lemme 2. *Si* $A: C[a, b] \to R$ *est une fonctionnelle linéaire et positive nonnulle, et si nous posons* $x_0 = \dfrac{A(x)}{A(1)}$, *alors il existe* $S \in \mathcal{S}_1$ *tel que*

(i) $A = A(1)d_{x_0} + b(A)S$,

(ii) $b(A) \geqslant 0$,

(iii) *si* $b(A) = 0$, *alors* $A \in R \cdot D$.

Un cas particulier de ce lemme est étudié dans [1].

Maintenant il est aisé d'utiliser les lemmes 1 et 2 pour démontrer le

THÉORÈME 2. *Si* $A: C[a, b] \to R$ *est une fonctionnelle linéaire et positive, alors* $A \in \mathcal{G}$.

Le résultat suivant décrit la structure de l'ensemble $\mathcal{G}$.

PROPOSITION 1. a) *Si* $A \in \mathcal{G}$ *et* $c \in R$, $c \geqslant 0$, *alors* $cA \in \mathcal{G}$. b) *Si* $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$ *et* $A_1(1) \geqslant 0$, $A_2(1) \geqslant 0$, *alors* $A_1 + A_2 \in \mathcal{G}$.

Démonstration. L'affirmation a) peut être vérifiée à l'aide du lemme 1.

b) Soient $x_i \in [a, b]$, $S_i \in \mathcal{S}_1$ tels que

$$A_i = A_i(1)d_{x_i} + b(A_i)S_i, \quad i = 1, 2.$$

La fonctionnelle $A_0 = A_1(1)d_{x_1} + A_2(1)d_{x_2}$ est linéaire et positive, donc $A_0 \in \mathcal{G}$. Alors $A_0 = A_0(1)d_{x_0} + b(A_0)S_0$, où $x_0 \in [a, b]$, $S_0 \in \mathcal{S}_1$, $b(A_0) \geqslant 0$.

Soit $B = b(A_0)S_0 + b(A_1)S_1 + b(A_2)S_2$.

On a $A_1 + A_2 = A_0(1)d_{x_0} + B$.

Si $b(A_0) = b(A_1) = b(A_2) = 0$, alors $B = 0$ et $A_1 + A_2 \in R \cdot D \subset \mathcal{G}$.

S'il existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tel que $b(A_i) \neq 0$, alors $B(1) = B(x) = 0$, $B(f) > 0$ pour toute fonction convexe d'ordre 1. Donc $B(x^2) > 0$.

Soit $S = \dfrac{B}{B(x^2)}$. Le théorème 1 montre que $S \in \mathcal{S}_1$.

Alors $A_1 + A_2 = A_0(1)d_{x_0} + B(x^2) \cdot S$, d'où il résulte que $A_1 + A_2 \in \mathcal{G}$.

Le théorème est donc démontré.

Soit maintenant $s: [a, b] \to R$ une fonction à variation bornée, et considérons la fonctionnelle $S: C[a, b] \to R$, définie par $S(f) = \int_a^b f(t) ds(t)$.

THÉORÈME 3. Si

1°) $s(a) = s(b) = 0, \int_a^b s(t) dt = 0$;

2°) *il existe* $x_0 \in (a, b)$ *tel que* $s(t) \geqslant 0$ *pour* $t \in [a, x_0)$ *et* $s(t) \leqslant 0$ *pour* $t \in (x_0, b]$;

$$3°)\quad \int_a^{x_0} s(t)dt > 0,$$

alors $S(x^2) > 0$ *et* $\frac{S}{S(x^2)} \in \mathcal{S}_1$.

Démonstration. De 1°) on deduit $S(1) = S(x) = 0$.

Soit $f \in C[a, b]$ convexe d'ordre 1, telle que $S(f) \leqslant 0$. Alors $\int_a^b s\, df =$

$= -\int_a^b f\, ds = -S(f)$, donc

$$(1)\qquad \int_a^b s\, df \geqslant 0.$$

Le point x_0 étant intérieur à l'intervalle $[a, b]$, il existe (cf. [5]) un polynôme p de degré 1 tel que

$$(2)\qquad p(x_0) = f(x_0)\,;\ p(x) < f(x) \text{ pour } x \in [a, b],\ x \neq x_0.$$

On a $S(1) = S(x) = 0$, donc $S(p) = 0$, i.e.

$$(3)\qquad \int_a^b s\, dp = 0.$$

De (1) et (3) on déduit :

$$(4)\qquad \int_a^b s\, d(f - p) \geqslant 0.$$

La fonction $f - p$ est décroissante sur $[a, x_0]$ et croissante sur $[x_0, b]$; donc 2°) nous montre que

$$(5)\qquad \int_a^{x_0} s\, d(f - p) \leqslant 0,\ \int_{x_0}^b s\, d(f - p) \leqslant 0.$$

Il résulte $\int_a^b s\, d(f - p) = 0$, et donc

$$(6)\qquad \int_a^{x_0} s\, d(f - p) = 0,\quad \int_{x_0}^b s\, d(f - p) = 0.$$

Mais s est une fonction continue presque partout, et il existe un ensemble $M \subset [a, b]$ de mesure positive tel que $s(t) \neq 0$ pur $t \in M$ (cf. 3°) ; d'où il est aisé d'obtenir une contradiction avec (6).

Donc $S(f) > 0$ pour toute fonction $f \in C[a, b]$ convexe d'ordre 1 ; il reste à utiliser le théorème 1.

A l'aide du théorème 3, nous pouvons construire des fonctionnelles de $\mathcal{G}$ qui ne sont pas positives.

Soit $s_j : [0,2\pi] \to R$, $s_j(t) = \sin jt$ et posons $S_j : C[0,2\pi] \to R$, $S_j(f) =$ $= \int_0^{2\pi} f(t)\, ds_j(t) = j \int_0^{2\pi} f(t) \cos jt\, dt$, pour $j = 1, 2, \ldots$.

On a $S_j(1) = 0$, $\frac{j}{4\pi} S_j \in \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{G}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Si $S_0(f) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(t)dt$, alors $S_0(1) = \pi$, $S_0 \in \mathcal{G}$.

Soit $A : C[0, 2\pi] \to R$, $A = S_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot S_j$

D'après la proposition 1, $A \in \mathcal{G}$.

Mais $A(f) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt\right) f(t)dt = \int_0^{2\pi} D_n(t) \cdot f(t)dt$, où D_n est le bien connu noyau de DIRICHLET.

Il est clair que la fonctionnelle A n'est pas positive.

2. Soit $p : C[a, b] \to R \cup \{+\infty\}$,

$$p(f) = \sup \{|[x_0, x_1, x_2\,; f]| : a \leqslant x_0 < x_1 < x_2 \leqslant b\},$$

et soit $X_1 = \{f \in C[a, b] : p(f) < +\infty\}$.

Alors X_1 est un sous-espace vectoriel de $C[a, b]$, et $p : X_1 \to R$ est une prénorme.

Soit $P_1 \subset X_1$ le sous-espace ayant comme éléments les polynômes de degré 1. Il est clair que $P_1 = p^{-1}(\{0\})$, donc P_1 est un sous-espace fermé de (X_1, p).

L'espace quotient $X = X_1/P_1$ sera muni d'une norme si nous posons $\|\tilde{f}\|_p = \inf \{p(f + q) : q \in P_1\}$;

ici $\tilde{f} \in X$ est la classe d'équivalence de $f \in X_1$.

Il est aisé de vérifier que $\|\tilde{f}\|_p = p(f)$.

Soit $A \in \mathcal{G}$, donc $A = A(1)\, d_{x_0} + b(A) \cdot s$ où $x_0 \in [a, b]$ $s \in \mathcal{S}_1$. Considérons la fonctionnelle $F : X \to R$, $F(\tilde{f}) = (A - A(1)d_{x_0})(f)$, où $f \in \tilde{f}$.

On peut démontrer que $F \in X^*$ et que $\|F\| = b(A)$.

Si nous faisons la convention de noter $F = A - A(1)d_{x_0}$, alors

$$(7)\qquad b(A) = \|A - A(1)d_{x_0}\|,$$

la norme étant celle de X^*.

Donc on peut énoncer le

THÉORÈME 4. *Si* $A_n \in \mathcal{G}$, $A_n(x) = x_n \cdot A_n(1)$, $n = 1, 2, \ldots$, *alors les affirmations :*

(i) $b(A_n) \to 0$;

(ii) $A_n - A_n(1)d_{x_n} \to 0$ punctuellement dans X_1^* ;

(iii) $A_n - A_n(1)d_{x_n} \to 0$ fortement dans X^* ;

sont équivalentes.

L'affirmation (ii) signifie que si $f \in C[a, b]$, $p(f) < +\infty$, alors

$$\liminf A_n(f) = \liminf A_n(1) \cdot f(x_n)$$
$$\limsup A_n(f) = \limsup A_n(1) \cdot f(x_n).$$

Désignerons par $\|\cdot\|_c$ la norme de TCHÉBYCHEV sur $C[a, b]$.

THÉORÈME 5. *Soient* $A_n \in \mathcal{G}$, *continues sur* $(C[a, b], \|\cdot\|_c)$, *et* $x_n \in [a, b]$ *tels que* $A_n(x) = x_n A_n(1)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Si la suite* $(\|A_n\|_c)_{n+1}^{+\infty}$ *est bornée et si* $b(A_n) \to 0$, *alors quelle que soit la fonction* $f \in C[a, b]$:

$$\liminf A_n(f) = \liminf A_n(1) \cdot f(x_n)$$
$$\limsup A_n(f) = \limsup A_n(1) \cdot f(x_n)$$

Démonstration. Soit $\|A_n\|_c \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$. Si $f \in C[a, b]$, et $\varepsilon > 0$, alors il existe un polynôme p tel que $\|f - p\|_c < \frac{\varepsilon}{3K}$. Donc :

$$|A_n(f) - A_n(p)| \leqslant \|A_n\|_c \cdot \|f - p\|_c < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Il est clair que $p \in X_1$; conformément au théorème 4, il existe $n_1 \in N$ tel que

$$|A_n(p) - A_n(1)d_{x_n}(p)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n = n_1, n_1 + 1, \ldots. \tag{9}$$

Remarquons que $|A_n(1)| \leqslant \|A_n\|_c \leqslant K$, et que $|f(x_n) - p(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3K}$, $n = 1, 2, \ldots$. Donc

$$|A_n(1)d_{x_n}(p) - A_n(1)\, d_{x_n}(f)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

De (8), (9) et (10) on déduit que si $n \geqslant n_1$, alors $|A_n(f) - A_n(1)d_{x_n}(f)| < \varepsilon$.

Donc $A_n(f) - A_n(1) \cdot f(x_n) \to 0$; la conclusion du théorème 5 en résulte immédiatement.

Il est aisé d'obtenir le théorème de KOROVKINE comme un cas particulier.

3. Soit (Ω, K, P) un champ de probabilité, et $X : \Omega \to [a, b)$ une variable aléatoire bornée.

Désignerons par F sa fonction de répartition. Alors $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, et F est nondécroissante sur $[a, b]$.

Considérons la fonctionnelle linéaire et positive

$$A : C[a, b] \to R, \quad A(f) = \int_a^b f(t)\, dF(t).$$

Si $M(X)$ et $D^2(X)$ sont l'espérance mathématique et la variance de X, alors $A(x) = M(X)$, $b(A) = D^2(X)$, donc le nombre $b(A)$ a la signification d'une variance. Soit $M_k(X)$ le moment d'ordre $k \in N$ de X.

THÉORÈME 6. *Si* $X : \Omega \to [a, b)$ *est une variable aléatoire bornée, alors quel que soit* $k \in N$ *il existe* $c \in (a, b)$ *tel que*

$$M_k(X) - M^k(X) = \frac{k(k-1)}{2} D^2(X) \cdot c^{k-2} \tag{11}$$

Démonstration. Soit $x_0 = \frac{A(x)}{A(1)} = M(X)$.

Alors, d'après le lemme 2, il existe $s \in \mathcal{S}_1$ tel que l'on ait

$$A = A(1)d_{x_0} + b(A)s_{x_0} = d_{x_0} + D^2(X) \cdot s. \tag{12}$$

En vertu du théorème de la moyenne pour les différences divisées, il existe $c \in (a, b)$ tel que $s(x^k) = [x_0, x_1, x_2 ; x^k] = \frac{k(k-1)}{2} c^{k-2}$.

De (12) on déduit $A(x^k) = x_0^k + D^2(X) \cdot s(x^k)$.

Mais $A(x^k) = M_k(X)$, et $x_0 = M(X)$. Il en résulte (11).

Remarque. Pour $k = 2$, la formule (11) se réduit à une relation bien connue : $M_2(X) - M^2(X) = D^2(X)$.

Posons, pour $k \in N$, $D^k(X) = M_k(X) - M^k(X)$.

On peut déduire maintenant les deux corollaires suivants :

Corollaire 1. *Si* $X_n : \Omega \to [a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$, *et si* $D^2(X_n) \to 0$, *alors quel que soit* $k \in N : D^k(X_n) \to 0$.

Pour la démonstration il suffit d'appliquer le théorème 5 en posant $f = x^k$.

Corollaire 2. *Si* $0 \notin [a, b]$, $X_n : \Omega \to [a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$, *et s'il existe* $k \in N$, $k > 2$ *tel que* $D^k(X_n) \to 0$, *alors* $D^2(X_n) \to 0$.

Démonstration. Conformément au théorème 6 il existe $c_n \in (a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$, tel que l'on ait $\frac{k(k-1)}{2} D^2(X_n)\, c_n^{k-2} \to 0$. Mais $0 \notin [a, b]$, donc $D^2(X_n) \to 0$.

Remarque. Soient $X_n : \Omega \to [a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$.

La suite $(X_n - M(X_n))_{n=1}^{+\infty}$ est convergente en probabilité vers 0 si et seulement si $D^2(X_n) \to 0$; donc (en supposant $0 \notin [a, b]$) si et seulement s'il existe $k \in N$, $k \geqslant 2$, tel que $D^k(X_n) \to 0$.

Une autre condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires uniformément bornées soit convergente en probabilité vers 0 peut être trouvée dans [4] (VII, § 16,8).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arama, O., *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor lui S. N. BERNSTEIN şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor.* Studii şi Cerc. (Cluj), **VIII**, nr. 3–4, 195–210 (1957).

[2] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării.* Editura Dacia, Cluj (1972).

[3] Popoviciu, Tiberiu, *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica (Cluj), **1** (**24**), 95–143 (1959).

[4] Rényi, Alfréd, *Probability Theory.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

[5] Ziegler, Zvi, *Linear Approximation and Generalized Convexity.* J. Approximation Theory, **1**, 420–443 (1968).

Reçu le 25. V. 1976.