MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 5, N° 1, 1976, pp. 97—111

CRITÈRES POUR LA CONVEXITÉ D'ORDRE n DES FONCTIONS

par
IOAN ŞERB
(Cluj-Napoca)

1. Introduction.

Dans tout cet article les fonctions qui interviendront sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Suivant E. NORLUND [13], par le terme différence divisée d'ordre n d'une fonction f sur les points différents $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ du domaine de définition de la fonction f on entend le coefficient de x^n du polynôme d'interpolation de Lagrange relatif à la fonction f et aux noeuds x_1, $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Nous désignons la différence divisée d'ordre n de la fonction f sur les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ par :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f]. \tag{1.1}$$

Les différences divisées vérifient la relation de récurrence suivante :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} ; f] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} ; f] - [x_1, x_2, \ldots, x_n ; f]}{x_{n+1} - x_1}, \tag{1.2}$$

$$[x_1 ; f] = f(x_1).$$

Dans le travail [15] T. POPOVICIU a établi le théorème de la moyenne suivant :

THÉORÈME 1.1 *Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, m points différents de l'ensemble de définition de la fonction f et $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ et $x_{i_1} = x_1$, $x_{i_{n+1}} = x_m$, alors a lieu la formule de la moyenne suivante pour les différences divisées d'ordre n :*

$$(1.3) \qquad [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n} A_i [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f],$$

où $A_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m - n$ et $\sum_{i=1}^{m-n} A_i = 1$.

Les coefficients A_i, $i = 1, 2, \ldots, m - n$ ne dépendent pas de la fonction f.

Une conséquence immédiate de la formule (1.3) est la suivante :

$$(1.4) \qquad \min_{i=1,2,\ldots,m-n} ([x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f]) \leqq [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f] \leqq$$
$$\leqq \max_{i=1,2,\ldots,m-n} ([x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f]).$$

La formule (1.3) sera utilisée fréquemment sous la forme particulière suivante :

$$(1.3)' \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f] =$$
$$= \frac{x_i - x_1}{x_{n+1} - x_1} [x_1, x_2, \ldots, x_n; f] + \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1} - x_1} [x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; f].$$

D é f i n i t i o n 1.2, [15]. *La fonction f définie sur l'ensemble E sera appelée convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe ou concave d'ordre n sur l'ensemble E suivant que les différences divisées d'ordre $n + 1$ sur tous les groupes de $n + 2$ points de E sont* > 0, $\geqq 0$, $= 0$, $\leqq 0$, < 0.

Les fonctions qui satisfont à l'une des inégalités de la définition 1.2 sont dites fonctions d'ordre n et n peut prendre les valeurs $-1, 0, 1, 2, \ldots$. Les fonctions d'ordre -1 sur E sont les fonctions qui conservent un signe constant sur E et les fonctions d'ordre 0 sur E sont les fonctions monotones sur E.

Conformément à la définition 1.2 les fonctions convexes d'ordre 1 sur l'ensemble E satisfont à l'inégalité :

$$(1.5) \qquad [x_1, x_2, x_3; f] > 0$$

pour tous les points distincts x_1, x_2, x_3, de l'ensemble E. Si, par exemple, E est l'intervalle fini et fermé $[a, b]$, alors l'inégalité (1.5) est équivalente à l'inégalité :

$$(1.6) \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

pour chaque paire de points distincts $x, y \in [a, b]$ et $\lambda \in (0, 1)$ quelconque, c'est-à-dire dans ce cas les fonctions convexes d'ordre 1 sont les fonctions convexes au sens usuel.

2. Les fonctions convexes du premier ordre.

Dans ce qui suit nous supposerons que l'ensemble E est un intervalle fini et fermé $[a, b]$, $a < b$.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les fonctions convexes d'ordre 1 sont caractérisées par l'inégalité (1.5) respectivement (1.6). Une fonction qui satisfait à l'inégalité (1.6) pour chaque couple de points distincts $x, y \in [a, b]$, $\lambda \in (0, 1)$ fixé sera appelée fonction λ-convexe Jensen. Pour $\lambda = 1/2$ nous retombons sur les fonctions convexes dans le sens de Jensen.

Soient maintenant $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ trois nombres réels fixés. Nous supposons que la fonction f satisfait à l'inégalité suivante :

$$(2.1) \qquad [x + \alpha_1 h, x + \alpha_2 h, x + \alpha_3 h; f] > 0, \ \forall x + \alpha_1 h, x + \alpha_3 h \in [a, b],$$

avec $h \neq 0$. Nous désignerons ce fait par la relation :

$$f \in \mathcal{C}_1(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2).$$

Si f satisfait à l'inégalité (2.1) avec la restriction $h > 0$, alors nous écrirons $f \in \mathcal{C}_1^+(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2)$. De manière similaire on définit l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}_1^-(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2)$. On vérifie immédiatement que :

$$(2.2) \qquad \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda) y) =$$
$$= (y - x)^2 \lambda (1 - \lambda) [x, \lambda x + (1 - \lambda) y, y; f].$$

Si nous faisons dans (2.2) la changement de variable $\lambda = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1}$, $y = x + \alpha_3 h$ on vérifié facilement que la relation $f \in \mathcal{C}(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2)$ est équivalente à la λ-convexité de la fonction f où $\lambda = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1}$. Avec les notations introduites ci-dessus nous avons les égalités suivantes :

a) $$\mathcal{C}_1(\alpha, \beta) = \mathcal{C}_1(d\alpha, d\beta), \ \forall d > 0$$

b) $$\mathcal{C}_1^-(\alpha, \beta) = \mathcal{C}_1^+(\beta, \alpha)$$

c) $$\mathcal{C}_1(\alpha, \beta) = \mathcal{C}_1^+(\alpha, \beta) \cap \mathcal{C}_1^-(\alpha, \beta) = \mathcal{C}_1^+(\alpha, \beta) \cap \mathcal{C}_1^+(\beta, \alpha).$$

De a) il résulte qu'il suffit de faire un changement de variable convenable, et chaque fonction qui satisfait à l'inégalité (2.1) aura satisfait à une inégalité équivalente avec celle de la forme :

$$(2.3) \qquad [x, x + h, x + \alpha h; f] > 0, \quad \forall x, x + \alpha h \in [a, b],$$

avec $\alpha > 1$, $h \neq 0$, c'est-à-dire qu'il suffit d'ètudier les ensembles de la forme $\mathcal{C}_1(1, \alpha - 1)$. Nous remarquons maintenant que les fonctions convexes dans le sens de Jensen sont les fonctions de l'ensemble $\mathcal{C}_1(1, 1)$.

THÉORÈME 2.1. *Si $f \in \mathcal{C}_1(1, \alpha)$ sur $[a, b]$ alors $f \in \mathcal{C}_1(1,1)$ sur $[a, b]$.*

D é m o n s t r a t i o n. On considère les points de division $x, x + h$, $x + 2h \in [a, b]$. Nous divisons l'intervalle $[x, x + 2h]$ de la manière suivante : x, $x + \frac{1}{\alpha + 1} h$, $x \quad h$, $x + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} h$, $x + 2h$.

Alors en appliquant le théorème 1.1 il en résulte que :

$$[x,\ x+h,\ x+2h\,;\ f] = A_1\left[x,\ x+\frac{1}{\alpha+1}h,\ x+h\,;\ f\right] +$$

$$+ A_2\left[x+\frac{1}{\alpha+1}h,\ x+h,\ x+\frac{\alpha+2}{\alpha+1}h\,;\ f\right] +$$

$$+ A_3\left[x+h,\ x+\frac{\alpha+2}{\alpha+1}h,\ x+2h\,;\ f\right],$$

où A_1, A_2, A_3 sont des nombres positifs.

Du fait que $f \in \mathcal{C}_1(1, \alpha) = \mathcal{C}_1^+(1, \alpha) \cap \mathcal{C}_1^+(\alpha, 1)$, il en résulte que chaque des différences divisées du second membre sont positives, donc $[x, x+h, x+2h\,; f] > 0$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{C}_1(1, 1)$.

Autrement dit ce théorème exprime le fait que si la fonction f est λ-convexe Jensen alors elle est convexe dans le sens usuel. Le théorème réciproque n'est pas vrai pour chaque α. Si le théorème était vrai pour chaque α, cela signifierait que chaque fonction convexe Jensen est λ-convexe pour chaque $\lambda \in (0, 1)$, c'est-à-dire qu'elle est convexe dans le sens de la définition 1.2. Mais une telle fonction est continue et il est bien connu qu'on peut construire des solutions totalement discontinues qui satisfont à l'inégalité de Jensen.

THÉORÈME 2.2 *Si $f \in \mathcal{C}_1(1,1)$ alors $f \in \mathcal{C}_1(1, \alpha)$ où α est un nombre rationnel.*

Ce théorème est bienconnu. Nous en donnerons ici une démonstration, en utilisant une méthode utilisée dans le travail de T. POPOVICIU [16]. Soit x, $x+h$, $x+(\alpha+1)h \in [a, b]$. Parce que α est un nombre rationnel, il existe une division équidistante de l'intervalle $[x, x+(\alpha+1)h]$ telle que les points x, $x+h$, $x+(\alpha+1)h$ sont dans l'ensemble des points de cette division. Si nous appliquons le théorème 1.1 nous trouvons que $[x, x+h, x+(\alpha+1)h\,; f]$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs des différences divisées de la forme $[y, y+h_1, y+2h_1\,; f]$, qui par hypothèse sont toutes positives. Par conséquent on a $f \in \mathcal{C}_1(1, \alpha)$.

Corollaire. *Des théorèmes 2.1 et 2.2 il résulte immédiatement que $\mathcal{C}_1(1, 1) = \mathcal{C}_1(1, \alpha)$ avec α nombre rationnel.*

Lemme 2.3 *Si $f \in \mathcal{C}_1^+(1, \alpha)$ avec $\alpha > 1$ et f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors $f \in \mathcal{C}_1^+(1, \alpha - 1)$.*

Lemme 2.3′ *Si $f \in \mathcal{C}_1^+(1, \alpha)$ avec $\alpha < 1$ et f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors $f \in \mathcal{C}_1^+(1-\alpha, \alpha)$.*

Nous démontrerons la lemme 2.3. Considérons les noeuds :
x, $x+h$, $x+(\alpha+1)h$, $x+(\alpha^2+\alpha+1)h$, $\ldots$, $x+(\alpha^n+\alpha^{n-1}+\ldots+1)h$ dans l'intervalle $[a, b]$, avec $h > 0$.

Alors d'après le théorème 1.1 :

$$[x,\ x+(\alpha^{n-1}+\ldots+\alpha+1)h,\ x+(\alpha^n+\alpha^{n-1}+\ldots+\alpha+1)h\,;\ f] = \sum_{i=0}^{n-1} A_i[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}\,;\ f]$$

où x_i sont des noeuds considérées ci-dessus, $A_i > 0$ et $\sum_{i=0}^{n-1} A_i = 1$.

Parce que toutes les différences divisées du second membre de l'inégalité précédente sont du type $[x, x+h, x+(\alpha+1)h\,; f]$ avec $h > 0$ il en résulte que $\left[x,\ x+h_1,\ x+\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha^n-1}h_1\,;\ f\right] > 0$ où $h_1 = (\alpha^{n-1}+\ldots+1)h$. En faisant n tendre vers l'infini et en tenant compte de la continuité de la fonction f il en résulte que : $[x, x+h, x+\alpha h\,; f] > 0$ pour chaque x, $x+\alpha h \in [a, b]$ et $h > 0$, donc $f \in \mathcal{C}_1^+(1, \alpha - 1)$. Aprés le passage la limite l'inégalité est restée stricte.

En effet, si sur 3 points distincts x, $x+h$, $x+\alpha h$ la différence divisée de la fonction f était nulle, alors il est bien connu [15] que à l'intérieur de cet intervalle nous aurions $[x_1, x_2, x_3; f] \equiv 0$ ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

La lemme 2.3′ se démontre d'une manière tout à fait analogue.

THÉORÈME 2.4 *Si f est continue et $f \in \mathcal{C}_1^+(1, \alpha)$ alors $f \in \mathcal{C}_1(1,1)$.*

Démonstration. Nous supposons que $\alpha > 1$. Alors en appliquant succesivement le lemme 2.3 il résulte que :

$$f \in \mathcal{C}_1^+(1,\ \alpha-1) \cap \mathcal{C}_1^+(1,\ \alpha-2) \cap \ldots$$

Soit $\alpha^* = \min\limits_{i=0,1,2,\ldots} \{\alpha_i | \alpha_i > 1,\ \alpha_i = \alpha - i\}$. Nous considérons les points x, $x+h$, $x+2h \in [a, b]$, $h > 0$ et une division construite succesivement à la manière suivante :

x, $x+h_1$, $\ldots$ avec $h_1 > 0$, h_1 suffisamment petit et on continue avec les divisions telles que tous les triplets consécutifs sont ou bien du type $\mathcal{C}_1^+(1, \alpha^*)$ ou bien du type $\mathcal{C}_1^+(1, \alpha^*-1)$. En outre, au moment où la suite des différences consécutives entre les noeuds fait le saut d'un nombre plus petit que h_1 à un nombre plus grand que h_1, (respectivement un saut inverse), à ce moment nous avons dans la suite des triplets consécutifs, des passages des triplets du type $\mathcal{C}_1^+(1, \alpha^*)$ à des triplets du type $\mathcal{C}_1^+(1, \alpha^*-1)$ (respectivement inversement). De cette manière nous avons :

$$x_{i+1} - x_i \in [(\alpha^*-1)h_1,\ \alpha^* h_1]$$

pour chaque couple x_i, x_{i+1} de points consécutifs des divisions. Parce que $x_{i+1} - x_i \geqslant (\alpha^*-1)h_1 > 0$ après un nombre fini de points de la division le n-ème noeud surpasse le noeud $x + 2h$. À ce moment la construction est terminée. Si nous choisissons h_1 suffisamment petit,

$$[x,\ x+h,\ x+2h\,;f] = [x,\ x_j,\ x_{n-1}\,;\ f] \pm \varepsilon(h_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-3} A_i[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}\,;\ f] \pm \varepsilon(h_1)$$

où x_j est le plus proche de $x + h$ parmi les noeuds de la division. En passant à la limite on a : $[x,\ x+h,\ x+2h\,;f] \geqslant 0$ et parce que l'égalité $[x,\ x+h,\ x+2h\,;f]=0$, ne peut avoir lieu ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus, il en résulte l'inégalité stricte, c'est-à-dire $f \in \mathcal{C}_1^+(1,\ 1)$ Q.E.D.

Si $\alpha < 1$, alors on peut donner une démonstration analogue en utilisant successivement le lemme 2.3'.

C o r o l l a i r e 2.5. *Si $f \in \mathcal{C}_1^+(1,\ \alpha)$ et est continue, il résulte que f est convexe du premier ordre. En effet du théorème 2.4 il résulte que f est convexe Jensen et continue, donc f est convexe dans le sens usuel.*

3. Les fonctions convexes du deuxième ordre. Critères de convexité.

De même que dans le paragraphe précédent on désigne par $\mathcal{C}_2(1,\ \alpha,\ \beta)$ avec $\alpha,\ \beta > 0$, l'ensemble des fonctions qui satisfaiont à l'inégalité :

$$[x,\ x+h,\ x+(\alpha+1)h,\ \ x+(\alpha+\beta+1)h\,;\ f] > 0 \tag{3.1}$$

pour chaque $x,\ x+(\alpha+\beta+1)\ h$ de $[a,\ b]$, $h \neq 0$. Par comparaison nous définissons les ensembles :

$$\mathcal{C}_2^+(1,\ \alpha,\ \beta),\ \mathcal{C}_2^-(1,\ \alpha,\ \beta),\ \mathcal{C}_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Nous avons aussi dans ce cas les propriétés suivantes :

a') $\quad \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1) = \mathcal{C}_2^+(1,\ 1,\ 1) = \mathcal{C}_2^-(1,\ 1,\ 1),$

b') $\quad \mathcal{C}_2^-(1,\ \alpha,\ \beta) = \mathcal{C}_2^+(\beta,\ \alpha,\ 1),\quad \alpha,\ \beta > 0,$

c') $\quad \mathcal{C}_2(1,\ \alpha,\ \beta) = \mathcal{C}_2^+(1,\ \alpha,\ \beta) \cap \mathcal{C}_2^-(1,\ \alpha,\ \beta) = \mathcal{C}_2^+(1,\ \alpha,\ \beta) \cap \mathcal{C}_2^+(\beta,\ \alpha,\ 1)$

d') $\quad \mathcal{C}_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \mathcal{C}_2(d\alpha,\ d\beta,\ d\gamma),\ d > 0.$

Les fonctions de l'ensemble $\mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$ sont les fonctions convexes Jensen d'ordre 2.

THÉORÈME 3.1 $\mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1) \supset \mathcal{C}_2^+(1,\ \alpha,\ \beta) \cap \mathcal{C}_2^+(\alpha,\ \beta,\ 1) \cap \mathcal{C}_2^+(\beta,\ 1,\ \alpha)$

D é m o n s t r a t i o n. Considérons la division constituée par les points :

$$x,\ x+\frac{1}{\alpha+\beta+1}h,\ x+\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}h,\ x+h,\ x+\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}h,\ x+$$

$$+\frac{2\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}h,\ x+2h,\ x+\frac{2\alpha+2\beta+3}{\alpha+\beta+1}h,\ x+\frac{3\alpha+2\beta+3}{\alpha+\beta+1}h,\ x+3h,$$

(au totale 10 points).

En appliquant le théorème 1.1 on trove :

$$[x,\ \ x+h,\ \ x+2h,\ \ x+3h\,;f] = \sum_{i=1}^{7} A_i[x_i,\ \ x_{i+1},\ \ x_{i+2},\ \ x_{i+3}\,;\ f]$$

$A_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{7} A_i = 1$, x_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ soyont les points de division.

Vu que toutes les différences divisées du deuxième membre sont alternativement du type $\mathcal{C}_2^+(1,\ \alpha,\ \beta)$ ou $\mathcal{C}_2^+(\alpha,\ \beta,\ 1)$ ou bien $\mathcal{C}_2^+(\beta,\ 1,\ \alpha)$, il en résulte que $f \in \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$ Q.E.D.

Suivant une marche analogue à celle qui a démontré le théorème 2.2 on obtient le :

THÉORÈME 3.2 *Si $f \in \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$ alors $f \in \mathcal{C}_2(1,\ \alpha,\ \beta)$ où $\alpha,\ \beta > 0$ sont des nombres rationnels.*

THÉORÈME 3.3 $\mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1,) = \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 2) = \mathcal{C}_2(2,\ 1,\ 3)$.

1) Nous démontrons que $\mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1) = \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 2)$. Du théorème 3.2 il résulte que $\mathcal{C}_2(1,1,1) \subset \mathcal{C}_2(1,1,2)$. On suppose que $f \in \mathcal{C}_2(1,1,2)$ et on considère la division $x,\ x+h,\ x+3/2h,\ x+2h,\ x+3h$. Alors de la formule (1.3)' il résulte : $[x,\ x+h,\ x+2h,\ x+3h\,;\ f] = 1/2\,[x,\ x+h,\ x+3/2\ h,\ x+2h\,;\ f] + 1/2\,[x+h,\ x+3/2\ h,\ x+2h,\ x+3h\,;\ f]$ et parce que $f \in \mathcal{C}_2^+(1,\ 1,\ 2) \cap \mathcal{C}_2^+(2,\ 1,\ 1)$ il résulte que le membre droit de l'égalité est positif et $[x,\ x+h,\ x+2h,\ x+3h\,;\ f] > 0$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$. Donc $\mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 2) \subset \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$ et de la double inclusion il s'ensuit le résultat de l'énoncé.

2) Nous démontrons maintenant que $\mathcal{C}_2(2,\ 1,\ 3) \subset \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$. On considère la même division arrangée de cette manière :

$$x+h,\ x,\ x+3/2\ h,\ x+3h,\ x+2h$$

et on appliquera la formule (1.3)'. Alors :

$$[x,\ x+h,\ x+2h,\ x+3h;\ f] = 1/2\,[x,\ x+3/2h,\ x+2h,\ x+3h\,;\ f] +$$
$$+ 1/2\,[x,\ x+h,\ x+3/2\ h,\ x+3h\,;f]$$

et du fait que $f \in \mathcal{C}_2^+(2,\ 1,\ 3) \cap \mathcal{C}_2^+(3,\ 1,\ 2)$ il résulte que $f \in \mathcal{C}_2(1,\ 1,\ 1)$.

Le dernier résultat représente une amélioration d'un résultat obtenu par T. POPOVICIU dans [19], théorème 2.

THÉORÈME 3.4. *Si f est continue et $f \in \mathcal{C}_2(1, 2, 4)$ alors f est convexe d'ordre* 2.

Démonstration. Soit la suite des points de division x, $x + h$, $x + (1 + 2)h$, $x + (1 + 2 + 4)h$, $\ldots$, $x + (1 + 2 + \ldots + 2^n)h$. Alors :

$$[x,\ x + (1 + \ldots + 2^{n-2})h,\ x + (1 + \ldots + 2^{n-1})h,\ x + (1 + \ldots + 2^n)h\,; f] =$$
$$= \sum_i A_i\,[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}\,; f] > 0,\ A_i > 0,$$

où x_i sont des points consécutifs de la suite. Il en résulte que $f \in \mathcal{C}_2\left(1, \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}, \frac{2^n}{2^{n-1}-1}\right)$. De la continuité de la fonction f il résulte que f appartient à $\mathcal{C}_2(1, 1, 2)$, et du théorème 3.3 il résulte que $f \in \mathcal{C}_2(1, 1, 1)$. Mais une fonction continue et convexe Jensen d'ordre 2 est convexe d'ordre 2.

Remarque. Si f est mesurable (dans le sens de Lebesgue) et $f \in \mathcal{C}_2(1, 1, 2)$ où $f \in \mathcal{C}_2(2, 1, 3)$ alors f est convexe Jensen d'ordre 2 sur $[a, b]$, la mesurabilité de la fonction f pouvant être remplacée par la propriété de la fonction d'être bornée sur un ensemble de mesure positive ou sur un ensemble de deuxième catégorie avec la propriété de Baire. (Comme on peut voir par exemple dans W. SIERPINSKI [20], T. POPOVICIU [17], Z. CIESIELSKI [3], S. KUREPA [10], etc.)

4. Les fonctions convexes d'ordre superieur. Critères de convexité.

Nous désignons à présent par $\mathcal{C}_n(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ où $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ qui satisfont à l'inégalité :

(4.1) $[x, x+h, x + (\alpha_1 + 1)h, \ldots, x + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + 1)h\,; f] > 0$

pour chaque x, $x + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 1)h \in [a, b]$ et $h \neq 0$.

On peut considérer aussi l'ensemble $\mathcal{C}_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ qui revient au précédent. D'une manière analogue à celle adoptée aux précédents nous désignons par $\mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ respectivement $\mathcal{C}_n^-(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ l'ensemble des fonctions qui satisfont à la relation (4.1) avec $h > 0$, respectivement $h < 0$. Dans ces notations ont lieu les propriétés suivantes :

a'') $\mathcal{C}_n(1, 1, \ldots, 1) = \mathcal{C}_n^+(1, 1, \ldots, 1) = \mathcal{C}_n^-(1, 1, \ldots, 1)$

b'') $\mathcal{C}_n^-(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{C}_n^+(\alpha_n, \ldots, \alpha_1, 1)$

c'') $\mathcal{C}_n(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$
$$= \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap \mathcal{C}_n^-(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap \mathcal{C}_n^+(\alpha_n, \ldots, \alpha_1, 1)$$

d'') $\mathcal{C}_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) = \mathcal{C}_n(d\alpha_1, d\alpha_2, \ldots, d\alpha_{n+1})$, $d > 0$

Les fonctions de l'ensemble $\mathcal{C}_n(1, 1, \ldots, 1)$ ne sont autres que les fonctions convexes d'ordre n dans le sens de Jensen, c'est-à-dire les fonctions qui satisfont à la relation :

$$[x,\ x + h,\ x + 2h,\ \ldots,\ x + (n + 1)h\,;\ f] = \Delta_h^{n+1} f(x)/h^{n+1}(n + 1)\,! > 0$$
$$\text{où } \Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} f(x + ih).$$

THÉORÈME 4.1. *Nous avons l'inclusion :*

$$\mathcal{C}_n(1,1, \ldots, 1) \supset \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap \mathcal{C}_n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1) \cap \ldots$$
$$\ldots \cap \mathcal{C}_n^+(\alpha_n, 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Démonstration. On suppose que f appartient à l'intersection de l'énoncé. On considère la suite de points :

$$x,$$
$$x + \frac{1}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,\quad x + \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,\ \ldots,\ x + \frac{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,$$
$$x + \frac{2 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,\quad x + \frac{2 + 2\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,\ \ldots,\ x + \frac{2 + 2\alpha_1 + \ldots + 2\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x + \frac{n + 1 + n\alpha_1 + \ldots + n\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,\quad x + \frac{n + 1 + (n + 1)\alpha_1 + \ldots + n\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h,\ \ldots,$$
$$x + \frac{n + 1 + (n + 1)\alpha_1 + \ldots + (n + 1)\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}h.$$

Il y a en tout $(n + 1)^2 + 1$ points de $[a, b]$ et on suppose que $h > 0$. En appliquant le théorème 1.1 pour le système de noeuds situé sur la dernière colonne on trouve :

$$[x, x + h, \ldots, x + (n + 1)h\,; f] = \sum_{i=1}^{(n+1)^2-n} A_i\,[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\,; f]$$

où $A_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{(n+1)^2-n} A_i = 1$ et x_i sont les points de la suite considérée ci-dessus écrits dans l'ordre croissant. Mais les différences divisées du deuxième membre sont positives, parce que f appartient à l'intersection de l'énoncé. Donc $f \in \mathcal{C}_n(1, 1, \ldots, 1)$.

THÉORÈME 4.2. *Si $f \in \mathcal{C}_n(1, 1, \ldots, 1)$ alors $f \in \mathcal{C}_n(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres rationneles positifs.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.2.

THÉORÈME 4.3. *Si $k \geqslant 1$ est un nombre naturel quelconque alors :*

a)
$$\mathcal{C}_{2k+1}(\underbrace{1, \alpha,}_{k+1} 1, \alpha, \ldots, 1, \alpha) \subset \mathcal{C}_{2k+1}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2k+2})$$

b)
$$\mathcal{C}_{2k+2}(\underbrace{2, 2, \ldots, 2,}_{k} 1, 1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k+1}) = \mathcal{C}_{2k+2}(\underbrace{4, 2, \ldots, 2,}_{k} 1, 1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k+1}) =$$
$$= \mathcal{C}_{2k+2}(\underbrace{2, 4, 2, 2, \ldots 2,}_{k} 1, 1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k+1}) = \ldots =$$
$$= \mathcal{C}_{2k+2}(\underbrace{2, 2, \ldots, 2,}_{k} 4, 1, 1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k+1}) =$$
$$= \mathcal{C}_{2k+2}(\underbrace{2, 2, \ldots, 2,}_{k} 3, 1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k+1}) = \mathcal{C}_{2k+2}(1, 1, \ldots, 1).$$

Démonstration. a) On suppose que $f \in \mathcal{C}_{2k+1}(\underbrace{1, \alpha,}_{k+1} \ldots, 1, \alpha)$ et on considère la suivante division de l'intervalle $[x, x + (2k + 2)h]$:

$$x, x + \frac{1}{\alpha + 1} h, x + h, x + h + \frac{1}{\alpha + 1} h, \ldots, x + (2k + 1)h, x + (2k + 1)h +$$
$$+ \frac{1}{\alpha + 1} h, x + (2k + 2)h.$$

Alors du théorème 1.1 il résulte :

$$[x, x + h, \ldots, x + (2k + 2)h ; f] = \sum_{i=1}^{2k+3} A_i[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+2k+2} ; f]$$

avec $A_i > 0$ et où x_i, $i = 1, 2, \ldots, 4k + 5$ sont les noeuds en ordre croissant de la suite précédente. Parce que chaque différence divisée du deuxième membre est du type $\mathcal{C}^{+}_{2k+1}(1, \alpha, \ldots, 1, \alpha)$ où $\mathcal{C}^{+}_{2k+1}(\alpha, 1, \ldots, \alpha, 1)$ il en résulte que $f \in \mathcal{C}_{2k+1}(1, 1, \ldots, 1)$ Q.E.D.

b) Nous démontrerons que : $\mathcal{C}_{2k+2}(\underbrace{2, 2, \ldots, 2,}_{k} 1, 1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k+1}) = \mathcal{C}_{2k+2}(1, 1, \ldots, 1)$. L'inclusion $\mathcal{C}_{2k+2}(1, 1, \ldots, 1) \subset \mathcal{C}_{2k+2}(2, 2, \ldots, 2, 1, 1, 2, 2, \ldots 2)$ résulte du théorème 4.2. Il reste à démontrer l'inclusion inverse. On suppose que : $f \in \mathcal{C}_{2k+2}(2, 2, \ldots, 2, 1, 1, 2, 2, \ldots, 2)$ et on considère maintenant les points de division

$$x, x + h, x + 2h, \ldots, x + (k + 1)h, x + (k + 3/2)h,$$
$$x + (k + 2)h, \ldots, x + (2k + 3)h.$$

Alors en appliquant la formule (1.3)' on trouve :

$$[x, x + h, x + 2h, \ldots, x + (2k + 3)h ; f] =$$
$$= \frac{1}{2} [x, x + h, \ldots, x + (k + 1)h, x + \left(k + \frac{3}{2}\right) h, x + (k + 2)h, \ldots,$$
$$\ldots, x + (2k + 2)h ; f] + \frac{1}{2} [x + h, \ldots, x + (k + 1)h, x + \left(k + \frac{3}{2}\right) h,$$
$$x + (k + 2)h, \ldots, x + (2k + 3)h ; f]$$

et parce que $f \in \mathcal{C}_{2k+2}(2, 2, \ldots, 2, 1, 1, 2, \ldots, 2)$ il en résulte que $f \in \mathcal{C}_{2k+2}(1, 1, \ldots, 1)$. En utilisant la même suite comme ci-dessus mais écrite avec un ordre des points modifié, on peut obtenir les autres égalites de l'énoncé du théorème.

Les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 donnent quelques conditions suffissantes ou même nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction satisfaisant à une inégalité de la forme (4.1) soit convexe Jensen d'ordre n. Des conditions pour que la fonction f convexe Jensen d'ordre n soit convexe d'ordre n (dans le sens de la définition 1.2) ont été données par de nombreux auteurs, Z. CIESIELSKI [3], T. POPOVICIU [17], R. GER [7], S. KUREPA [10], A. OSTROWSKI [14], S. MARCUS [11], R. GER et M. KUKZMA [8], etc.

5. Les dérivées généralisées et les fonctions convexes d'ordre supérieur.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un voisinage du point x. S'il éxiste des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ indépendants de h tels que :

$$f(x + h) = f(x) + h\alpha_1 + \frac{h^2}{2!} \alpha_2 + \ldots + \frac{h^{r-1}}{(r - 1)!} \alpha_{r-1} + 0(h^{r-1}) \tag{5.1}$$

alors le nombre α_k s'appelle la dérivée de Peano d'ordre k (on dit également la dérivée d'ordre k de de la Vallée Poussin) de f dans le point x et on écrit $\alpha_k = f_k(x)$. S'il éxiste la dérivée Peano d'ordre n de f dans le point x, alors il éxiste aussi la dérivée d'ordre m, $0 \leqslant m \leqslant n$. Nous designerons par $f^{(n)}(x)$ la dérivée usuelle d'ordre n de la fonction f dans le point x.

Si $f^{(n)}(x)$ existe, alors il existe tant $f_n(x)$ que $f^{(n)}(x) = f_n(x)$. L'affirmation inverse est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n > 1$ l'affirmation n'est pas vraie. A. DENJOY dans [6] a donné un exemple de fonction qui admet la dérivée de Peano d'ordre $n \geqslant 2$ qui a la dérivée usuelle discontinue dans chaque point d'un ensemble non-dense E.

On écrit

$$f_{n,E}(x) = \lim_{h \to 0} n ! [x + \alpha_1 h, x + \alpha_2 h, \ldots, x + \alpha_{n+1} h ; f], \tag{5.2}$$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1}$ si cette limite existe ; E désigne l'ensemble $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. Quand $E = \{-n, -n + 2, \ldots, n - 2, n\}$ on obtient la dérivée symétrique de Riemann. La limite de (5.2) a été appelée par A. DENJOY [6], le n-éme dérivée généralisée de la fonction f relative à l'ensemble E. S'il existe la dérivée de Peano, alors il existe aussi la dérivée généralisée $f_{n,E}(x)$ relative à chaque système de $n+1$ nombres et $f_{n,E}(x) = f_n(x)$.

Il est à mentionner le fait que si $f_{n,E}(x) = 0$ pour chaque $x \in [a, b]$ il ne résulte pas que $f(x)$ est un polynome de degré tout au plus $n - 1$. C'est le résultat de A. DENJOY [6], qui a montré que si nous additionnons a un polynome de degré 2 une fonction de la forme:

(53.) $$\sum_k C_k \omega(x - c_k)$$

où c_k est un ensemble de points non-dense dans $[a, b]$, $\omega(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

et C_k des coefficients arbitraires, alors $f_{3,E}(x) \equiv 0$ si $\varepsilon = \{-\gamma, -\beta, \beta\gamma, 1\}$.

En suivant des raisonnements analogues à ceux des théorèmes 4.1 et 4.2 et en passant a la limite dans une suite d'égalités on obtient les théorèmes:

THÉORÈME 5.1. *Si* $f_{n,E_i}(x) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ *ou* $E_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ $E_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} + \alpha_1\}, \dots, E_{n+1} = \{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} + \alpha_1, \alpha_{n+1} + \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} + \alpha_1 + \dots + \alpha_n\}$ *alors il existe* $f_{n,E}(x)$ *et* $f_{n,E}(x) > 0$, *ou* $E = \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

THÉORÈME 4.2. *Si* $f_{n,E}(x) > 0$, $E = \{1, 2, \dots, n + 1\}$ *alors* $f_{n,E'}(x)$ *existe et est positive. Ici* $E' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}\}$ *et les rapports de deux nombres* α_i *quelconques sont des nombres rationnels.*

Nous supposons maintenant que f satisfait à la condition:

(5.4) $$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f_1(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f_n(x) + o(h^n)$$

et nous désignons par $f_{n+1}(x)$, $\bar{f}_{n+1}(x)$, $\bar{f}_{n+1,+}(x)$ respectivement par la limite la limite supérieure et la limite supérieure a droite (c'est-à-dire avec $h > 0$) de l'expression:

(5.5) $$\frac{(n+1)!}{h^{n+1}} \left\{ f(x + h) - \sum_{i=0}^{n} \frac{h^i}{i!} f_i(x) \right\}$$

quand h tend vers zéro:

THÉORÈME 5.3. *Soit* f *une fonction satisfaisant aux conditions:*
(i) $f_n(x)$ *existe et est finie dans* $[a, b]$,
(ii) $f_{n+1,+}(x) > -\infty$, *pour chaque* $x \in [a, b] \setminus C$ *où* C *est dénombrable,*
(iii) $f_{n+1,+}(x) = +\infty$, *au plus sur un ensemble* E *avec* $|E| = 0$,
(iv) $f \in \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Alors f *est convexe d'ordre* n *sur* (a, b).

D é m o n s t r a t i o n. Soit x un point où l'expression (5.5) a une limite à droite $f_{n+1,+}(x)$ finie. Alors, pour $h > 0$:

(5.6) $$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f_1(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f_n(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} [f_{n+1,+}(x) + \varepsilon(x, h)], \quad \varepsilon(x, h) \to 0, \quad h \to 0.$$

En appliquant la différence divisée du type $\mathcal{C}_n(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans (5.6) aux fonctions considérées comme des fonctions de la variable h, on trouve:

(5.7) $$[x, x + h, x + (1 + \alpha_1)h, \dots, x + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)h; f] = \frac{f_{n+1,+}(x)}{(n+1)!} + \sum_{i=1}^{n+1} C_i \varepsilon(x, (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i)h)$$

C_i nondépendant que de α_i. Parce que $\varepsilon(x, (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i)h) \to 0$ quand $h \searrow 0$ il en résulte que le membre gauche a une limite à droit quand $h \searrow 0$ et qu'elle est égale à $f_{n+1,+}(x)$ et parce que $f \in \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ il en résulte que $f_{n+1,+}(x) \geq 0$ pour chaque $x \in [a, b]$ où $f_{n+1,+}(x)$ est fini c'est-à-dire sur $[a, b] \setminus E'$ avec $|E'| = 0$.

Cette dernière condition de pair avec (*i*) et (*ii*) implique conformément au théorème 19 [2], que f est nonconcave d'ordre n sur (a, b). Mais, comme nous l'avons vu, il n'existe aucun système de points sur lequel la différence divisée s'annule sans que sur l'intervalle le plus petit qui contient ces points la fonction ne soit un polynome de degré n. Mais, parce que $f \in \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ il en résulte que f est même convexe d'ordre n sur (a, b).

THÉORÈME 5.4. *Si* f *a une dérivée usuelle d'ordre* $(n - 1)$ *continue et* $f \in \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *alors* f *est convexe d'ordre* n.

D é m o n s t r a t i o n. Dans [18] T. POPOVICIU a démontré la formule suivante de la moyenne:

Si f a une dérivée d'ordre $k < n$ continue sur $[a, b]$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sont $n - k$ points distincts appartenant à $[a, b]$ alors il existe $x_1' < x_2' < \dots < x_{n-k}'$, $n - k$ points distincts dans $[x_1, x_n]$ tels que:

(5.8) $(n - 1)! [x_1, x_2, \dots, x_n; f] = (n - k - 1)! [x_1', x_2', \dots, x_{n-k}'; f^{(k)}]$.

Particulièrement il éxiste dans l'intervalle $[x, x + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)h]$, $h > 0$ les points distincts ξ_1, ξ_2, ξ_3 tel que:

$$(n + 1)! [x, x + h, x + (1 + \alpha_1)h, \dots, x + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)h; f] = 2! [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n-1)}]$$

et parce que $f \in \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ il en résulte que quel que soit un voisinage à droite de x, il existe dans ce voisinage trois points distincts ξ_1', ξ_2', ξ_3' tels que $[\xi_1', \xi_2', \xi_3'; f^{(n-1)}] > 0$. En choisissant un point $x \in (a, b)$ nous trouverons que dans chaque voisinage de x la fonction continue f a une différence divisée positive.

Si nous désignons par $\overline{D_2}f^{(n-1)}(x)$ la limite supérieure de toutes les valeurs des différences divisées de la fonction f dans un voisinage de x, d'après les considerations antérieures il résulte que $\overline{D}_2f^{(n-1)}(x) \geqslant 0$. Mais parce que $f^{(n-1)}$ est continue nous avons :

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b], \qquad [x_1, x_2, x_3 ; f] \geqq \inf_{a<x<b} \overline{D}_2 f(x) \geqq 0$$

(voir par exemple M. NICOLESCU [12] ; C. KASSIMATIS [9], P.S. BULLEN [1]).

Donc $f^{(n-1)}$ est nonconcave d'ordre 1, c'est-à-dire f este nonconcave d'ordre n. Mais comme $f \in \mathcal{C}_n^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ il en résulte que f est convexe d'ordre n.

R e m a r q u e s. La condition que f admette une dérivée usuelle d'ordre $n-1$ continue, peut être rémplacée par l'existence de f_{n-1} continue, parce que d'après le résultat de E. COROMINAS [4] il existe une formule de la moyenne analogue à la formule (5.8), mais relative à la dérivée de Peano. Mais l'amélioration est non esentielle parce que si $f_{n-1}(x)$ est continue sur $[a, b]$, alors il existe $f^{(n-1)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x) = f_{n-1}(x)$. D'autre part dans les théorèmes 5.3 et 5.4 dans le cas particulier étudié par exemple dans le théorème 4.3, on peut renoncer à quelques conditions, parce qu'il est suffisant, par éxemple, que au lieu de la dérivabilité des fonctions on suppose leurs continuité.

Aussi la plupart des résultats de cet article peut s'étendre en considérant, par exemple, un système interpolatoire de fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ et les différences divisées d'une fonction f sur des noeuds distincts et relatives à ce système interpolatoire, respectivement en considérant la convexité d'ordre supèrieur relative au système interpolatoire considéré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B u l l e n, P.S. — *Construction of primitives of generalized derivatives with applications to trigonometric series*, Canad. J. Math. **13** 48—58, (1961).

[2] B u l l e n, P.S, M u k h o p a d h y a y, S.N. — *On the Peano derivatives*, Canad. J. Math. **25**, 1, 127—140, (1973).

[3] C i e s i e l s k i, Z. — *Some properties of convex fonctions of higher orders*, Annales Polon. Math. **VII** (1) 1—7, (1959).

[4] C o r o m i n a s, E. — *Contribution a la théorie de la dérivation d'ordre supérieur*, Bull. Soc. Math. France, **81** 177—222, (1953).

[5] C s a s z a r, A. — *Konvex halmazokrol és fuvggényekrol*, Mat. Lapok **9**, 273—282, 1958.

[6] D e n j o y, A. — *Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur* — Fund. Math. **25** 273—326, (1935).

[7] G e r, R. — *Some new conditions of continuity of convex functions*, Mathematica, Cluj, **12** (35), 2, 271—277, (1970).

[8] G e r, R, K u k z m a, M. — *On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions* Aequat. Math. **4**, 1—2, 157—162, (1970).

[9] K a s s i m a t i s, C. — *Functions wich have generalized Riemann derivatives*, Canad. J. Math. **10**, 1, 413—420, (1958).

[10] K u r e p a, S. — *Convex functions*, Glasnik Math. Fiz. Astron. (2), **11**, 89—94, (1956).

[11] M a r c u s, S. — *Généralisation, aux fonctions de plusieurs variables, des théoremes de Alexander Ostrowski et de Masuo Hukuhara concernant les fonctions convexes J.*

[12] N i c o l e s c u, M. — *Analiză matematică*, vol. **2**, Ed. Tehnică, 1959, București.

[13] N o r l u n d, E. — *Lecons sur les series d'interpolation*, Paris, 1925, Gauthier — Villars.

[14] O s t r o w s k i, A. — *Uber die Functionalgleichung der Exponentialfunction und verwandte Functionalgleichungen*, Jahresbericht, D. Math. Ver. **38**, 54—62, (1929).

[15] P o p o v i c i u, T. — *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, Cluj, **8**, 1—85, (1934).

[16] P o p o v i c i u, T. — *Sur certaines equations fonctionnelles definissant des polynomes*, Mathematica, **10**, 194—208, (1935).

[17] P o p o v i c i u, T. — *Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines equations fonctionnelles*, Mathematica, **14**, 47—106, (1938).

[18] P o p o v i c i u, T. — *Folytonos fugvenyek kozepertekteteleirol* Magyar. Tud. Acad. Mat. Fiz. Oszt. Kozlemenyel **4**, 353—356, (1954).

[19] P o p o v i c i u, T. — *Otnositelno nekotorih neravenstv mejdu srednimi*, Mathematica, 1, (24), **1**, 81—93, (1959).

[20] S i e r p i n s k i, W. — *Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$*, Fundamenta Math. **1**, 116—122 (1920).

Recu le 29. IX. 1976.

Institutul de Matematică
al Universității „Babeș—Bolyai"
Cluj-Napoca.