MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 5, N° 1, 1976, pp. 59–62

OBSERVATIONS CONCERNANT LA FORMULE D'EXTRAPOLATION D'AITKEN[1]

par

ANDREI NEY

(Cluj-Napoca)

Soit (s_n) une suite de nombres réels avec $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ et la suite de ses différences $\{\Delta s_n | \Delta s_n = s_{n+1} - s_n,\ n \in N$ et $\Delta\, s_0 = s_1\}$ soit ,,presque-géométrique'', c'est-à-dire que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta s_n}{\Delta s_{n-1}} = l \text{ où } |l| < 1.$$

Alors, la transformation définie par

$$\sigma_n = A s_n = s_n + \frac{\Delta s_{n-1} \cdot \Delta s_n}{\Delta s_{n-1} - \Delta s_n} = \frac{s_n^2 - s_{n-1} s_{n+1}}{2 s_n - (s_{n-1} + s_{n+1})} \tag{1}$$

et qui s'appelle *la formule d'extrapolation d'Aitken*, [1], accélère la convergence de la suite (s_n) à la limite s, ça veut dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n - s}{s_n - s} = 0.$$

On remarque, que la transformation (1) peut être facilement mise sous la forme

$$\sigma_n = A s_n = \frac{1}{2}\, \frac{s_n^2 - s_{n-1} s_{n+1}}{s_n - \dfrac{s_{n-1} + s_{n+1}}{2}}, \tag{2}$$

---

[1] Ce travail a été communiqué à la Session Commémorative dédiée à la mémoire de Tiberiu Popoviciu (à Cluj-Napoca, au mois de Mars, 1976).

ce qui donne du relief au fait que la transformée σ_n soit égale à la moitié du rapport formé par *l'écart de la moyenne géométrique* et *l'écart de la moyenne arithmétique* relativement à la suite originelle (s_n).

Nous introduisons, maintenant, une certaine notion de convexité généralisée.

Définition. *Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné et une application $f: X \to X$. Soit aussi une application $\mu : X^2 \to X$ telle, que pour chaque couple $(x, y) \in X^2$ pour lequel $x < y$, on ait $x < \mu(x, y) < y$; une telle application μ sera dite* application interjective *sur X. Si f jouit de la propriété*

(3) $$f(\mu(x, y)) \leqslant \mu(f(x), f(y)), \ \forall x, y \in X \text{ tel que } x < y,$$

alors f sera μ-convexe (avec l'inégalité $<$ dans (3) f sera strictement μ-convexe; l'inégalité $\geqslant$ définira la μ-concavité; l'égalité stricte, $=$, exprime l'absence de la μ-convexité et de la μ-concavité, c'est le cas d'une μ-droite).

La moyenne arithmétique respectivement celle géométrique vérifie $x < \frac{x+y}{2} < y$ respectivement $x < \sqrt{xy} < y$ si $0 < x < y < +\infty$, donc on pourra parler pour les fonctions qui satisfont (3) avec l'application interjective arithmétique respectivement géométrique, — d'une *convexité arithmétique* (celle de Jensen), respectivement d'une *convexité géométrique.*

La remarque ci-dessus à propos de la forme (2) de la formule d'Aitken exprime le fait que la transformée est la moitié du rapport de deux quantités, indiquant l'une la „grandeur" de la convexité géométrique et l'autre la „grandeur" de la convexité arithmétique.

Nous donnerons une démonstratin „sui generis" à la formule d'Aitken. Tout d'abord le

Lemme. *Si ρ_n $(n \in N)$ est une expression assymptotique du reste de la série convergente Σz_n à termes numériques (réels, complexes ou de quaternions) alors, en notant $s_n = \sum_1^n z_k$, la suite $\{\sigma_n \mid \sigma_n = s_n + \rho_n, \ n \in N\}$ convergera plus vite à la somme s de la série Σz_n, que la suite (s_n) des sommes partielles de Σz_n.*

Démonstration. En partant de la relation à la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{r_n} = 1$ (r_n étant le reste exact de la série), on aura

$$\frac{\sigma_n - s}{s_n - s} = \frac{s_n + \rho_n - s}{s_n - s} = 1 - \frac{\rho_n}{r_n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

On remarque, que le cas singulier où pour un certain n on pourrait avoir $s_n = s$, donc $r_n = 0$, a été éliminé de notre raisonnement.

La démonstration de la propriété de la transformation d'Aitken, d'accélérer la convergence, ressort de la façon suivante:

en partant des conditions précisées au commencement de ce travail — regardant la suite (s_n) — et tenant compte de travail [2] de l'auteur, l'expression

$$\rho_n = \frac{\Delta s_{n-1} \Delta s_n}{\Delta s_{n-1} - \Delta s_n} \qquad (n \in N)$$

est une expression assymptotique du reste de la série convergente $\Sigma \Delta s_{n-1}$; dans ce cas la suite (σ_n) définie par (1) convergera plus vite à s que la suite (s_n), — vu le lemme.

Notons le fait, que la transformation d'Aitken n'a pas de point fixe proprement dit, mais des *points fixes virtuelles*, notamment toutes les suites stationnaires — $(s, s, \ldots, s, \ldots)$ —. En effet, partant de $As_n = s_n$ $(n \in N)$ on arrive à $(s_n - s_{n-1})(s_n - s_{n+1}) = 0$ d'où $s_n = s_{n-1}$ ou bien $s_n = s_{n+1}$ $(n \in N)$. Mais la suite stationnaire (s) conduit la transformation As à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, à laquelle on peut attribuer par définition la valeur s; la suite (s) a la limite s et on ne peut pas — évidement — accélérer sa convergence à s.

Il est intéressant de remarquer, que si on note $r_n = s - s_n$ et $\mathcal{R}_n = s - \sigma_n$, alors, *entre $\mathcal{R}_n$ et r_n a lieu de même la relation d'Aitken* (ce qu'on peut facilment vérifier): $\mathcal{R}_n = Ar_n$.

Enfin, une certaine généralisation de la transformation d'Aitken sera énoncée par le.

Théorème. *Soit (s_n) une suite de nombres réels positifs, strictement croissante et bornée; la suite (Δs_n) des différences satisfaisant la forme limite du critérium de Kummer*

(4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \Delta s_{n-1} - a_{n+1}\Delta s_n}{\Delta s_n} = \mu_0 > 0\,; \ \lim_{n\to\infty} a_n \Delta s_{n-1} = 0.$$

La transformation A, définie par

(5) $$\sigma_n = As_n = \frac{a_{n+1} s_n^2 - a_n s_{n-1} s_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) s_n s_{n+1}}{(a_n + a_{n+1}) s_n - a_n s_{n-1} - a_{n+1} s_{n+1}}$$

accélère la convergence de la suite (s_n) à la même limite

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

Démonstration. En nous basant sur (4) — vu aussi le travail [3] de l'auteur, on aura pour le reste de la série $\Sigma \Delta s_n$ la formule assymptotique

$$r_n \cong \frac{a_n \cdot \Delta s_{n-1}}{\mu_0}$$

et

$$\mu_0 \cong \frac{a_n \Delta s_{n-1} - a_{n+1} \Delta s_n}{\Delta s_n}$$

d'où

$$r_n \cong \rho_n = \frac{a_n \Delta s_{n-1} \cdot \Delta s_n}{a_n \Delta s_{n-1} - a_{n+1} \Delta s_n}.$$

En formant la somme $\sigma_n = s_n + \rho_n$, on aura

$$\sigma_n = s_n + \frac{a_n (s_n - s_{n-1})(s_{n+1} - s_n)}{a_n (s_n - s_{n-1}) - a_{n+1}(s_{n+1} - s_n)},$$

et après les calcules effectués on arrive à (5), C.Q.F.D.

On mentionne, que (5) peut être mise sous la forme

$$\sigma_n = A s_n = \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} \cdot \frac{s_n^2 - \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} s_{n-1} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} s_n\right) s_{n+1}}{s_n - \left(\frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} s_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} s_{n+1}\right)}, \tag{6}$$

ce qui met en évidence un écart arithmétique au dénominateur et un écart géométrique généralisé par une moyenne arthmétique pondérée dans l'un des facteurs. La formule (6) redonne la transformation d'Aitken pour $a_n = 1\ (n \in N)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Björch, A., Dahlquist, G., *Numerische Methoden.* Oldenburg Verlag, München-Wien 1972.

[2] Ney, A., *O condiție necesară și legătura ei cu restul seriilor.* Studia Univ. ,,Babeș-Bolyai" (Cluj). Ser. I. fasc. 1. Mathematica-Physica, 137—145, (1961).

[3] Ney, A., *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi.* Studii și Cerc. de Matem. (Cluj), **12**, 2, 315—332 (1961).

Reçu le 30. VII. 1976.

Universitatea ,,Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică, Catedra de Analiză.