MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 5, N° 1, 1976, pp. 63–67

SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS À L'AIDE DES SUITES À ÉLÉMENTS DANS UN ESPACE DE BANACH

par
ION PĂVĂLOIU
(Cluj-Napoca)

Soit X un espace de Banach et Y un espace linéaire normé.

On considère l'équation :

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

où $P: X \to Y$ et θ est l'élément nul de l'espace Y.

Nous désignons par $\Sigma = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, une suite à éléments dans l'espace X et par k un nombre naturel arbitraire.

Définition 1. *On dit que la suite Σ a l'ordre k par raport à l'application P, s'il existe une constante non-négative ρ qui ne dépend pas de n, et telle que pour chaque $n = 0, 1, \ldots$ soient satisfaites les inégalités suivantes :*

$$\|P(x_{n+1})\| \leqq \rho \, \|P(x_n)\|^k$$

Définition 2. *On dit que la suite Σ a l'ordre de convergence k par rapport à l'application P, si les conditions suivantes sont remplies :*

a) *la suite Σ a l'ordre k par rapport à l'application P ;*

b) *la suite Σ este convergente.*

Si $S \subset X$ est un ensamble à éléments dans l'espace X, nous désignerons par $S^* = \mathrm{Int}\,(S)$, l'intérieur de cet ensemble.

Soit $s \geqq 2$ un nombre naturel donné et P l'application qui détermine l'équation (1).

Dans cette note nous chercherons des conditions imposées à l'application P et à la suite Σ, pour que la suite Σ ait l'ordre de convergence s par rapport à l'application P et de plus, si nous désignons par $\bar{x} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, pour que nous ayons alors $P(\bar{x}) = 0$.

Par rapport au problème ci-dessus posé, on peut énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Si la suite Σ, l'application P et le nombre réel et positif δ sont tels que pour chaque point $x \in \operatorname{Int}(S)$, où $S = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$, les conditions suivantes sont remplies :*

i) *l'application P admet des dérivées du type Fréchet, jusqu'a l'ordre s $(s \cancel{\leq} 2)$ inclusivement, sur chaque point de l'ensemble $\operatorname{Int}(S)$ et*

$$\sup_{x \in \operatorname{Int}(S)} \|P^{(s)}(x)\| \leq M < +\infty ;$$

ii) *Il existe une constante réelle et non-négative α, que ne dépend pas de n, telle que les inégalités suivantes sont remplies*

$$\left\| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^i \right\| \leq \alpha \|P(x_n)\|^s,$$

où $x_n \in \Sigma \cap S^*$, $n = 0, 1, \ldots$;

iii) *Il existe une constante réelle et non-négative β qui ne dépend pas de n et telle que les inégalités suivantes sont remplies*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta \|P(x_n)\|,$$

où

$$x_n \in \Sigma \cap S^*, \; n = 0, 1, \ldots ;$$

iv) *les constantes α, β et les nombres réels M et δ satisfont aux inégalités suivantes :*

$$\rho_0 = v \cdot \|P(x_0)\| < 1 \text{ et } \frac{\beta \rho_0}{(1 - \rho_0) \cdot v} \leq \delta \quad \text{où}$$

$$v = \left(\alpha + \frac{M \beta^s}{s!} \right)^{\frac{1}{s-1}}$$

alors relativement à l'équation (1) et à la suite Σ ont lieu les propriétés suivantes :

j) *la suite Σ a l'ordre de convergence s et si $\bar{x} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, alors $P(\bar{x}) = 0$.*

jj) $\bar{x} \in S$

jjj) $\|\bar{x}_{n+1} - x_n\| \leq \dfrac{\beta \rho_0^{s^n}}{v}$

jv) $\|\bar{x} - x_n\| \leq \dfrac{\beta \rho_0^{s^n}}{v(1 - \rho_0^{s^n})}$

v) $\|P(x_n)\| \leq \dfrac{\rho_0^{s^n}}{v}$

Démonstration

Nous démontrerons en premier lieu que les éléments de la suite Σ sont contenus en S^*, si les conditions du théorème énoncé sont remplies. Pour x_1 on a :

(2) $$\|x_1 - x_0\| \leq \beta \|P(x_0)\| \leq \frac{\beta v \|P(x_0)\|}{v} \leq \frac{\beta \rho_0}{v} < \frac{\beta \rho_0}{v(1 - \rho_0)} \leq \delta,$$

d'où il résulte que $x_1 \in S^*$. En effet, en utilisant la formule de Taylor généralisée on déduit.

$$\|P(x_1)\| \leq \left\|P(x_1) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_0)(x_1 - x_0)^i\right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_0)(x_1 - x_0)^i \right\| \leq \frac{M}{s!} \|x_1 - x_0\|^s + \alpha \|P(x_0)\|^s \leq$$

$$= \left(\frac{M \beta^s}{s!} + \alpha \right) \cdot \|P(x_0)\|^s,$$

≤ faux = ?

d'où on déduit :

(3) $$\|P(x_1)\| \leq v^{s-1} \cdot \|P(x_0)\|^s.$$

Nous supposons que les propriétés suivantes sont remplies : propriétés

1) $x_i \in S^*$; $\quad i = 0, 1, \ldots, n$;

2) $\|x_i - x_{i-1}\| \leq \dfrac{\beta}{v} \cdot \rho_0^{s^{i-1}}$; $\quad i = 1, 2, \ldots, n$;

3) $\|P(x_i)\| \leq v^{s-1} \|P(x_{i-1})\|^s$; $\quad i = 1, 2, \ldots, n$;

et dans ces hypothèses nous démontrerons que :

$$x_{n+1} \in S^*, \; \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta}{v} \rho_0^{s^n} \text{ et } \|P(x_{n+1})\| \leq v^{s-1} \cdot \|P(x_n)\|^s.$$

D'après ce que nous avons démontré ci-dessus, il résulte que les propriétés 1) — 3) sont vérifiées pour $i = 1$.

En multipliant par v l'inégalité 3) et en désignent par $\rho_i = v\|P(x_i)\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nous déduisons facilement les inégalités :

$$\rho_i \leq \rho_0^{s^i}; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Des inégalités (4) et de iii) on déduit

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta \|P(x_n)\| = \frac{\beta v \|P(x_n)\|}{v} \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v}. \tag{5}$$

De (5) on déduit :

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{\beta}{v} \sum_{i=0}^{n} \rho_0^{s^i} < \frac{\beta \rho_0}{v(1 - \rho_0)} \leq \delta$$

d'où il résulte $x_{n+1} \in S^*$.

L'inégalité 2) pour $i = n + 1$ résulte de (5).
Pour la dernière inégalité on a :

$$\|P(x_{n+1})\| \leq \left\|P(x_{n+1}) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^i\right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^i \right\| \leq \left(\alpha + \frac{M\beta^s}{s!}\right) \cdot \|P(x_n)\| = v^{s-1} \|P(x_n)\|^s.$$

Par conséquent les propriétés 1) -- 3) sont remplies pour chaque $n = 1, 2, \ldots$

La propriété 3) montre que la suite Σ a l'ordre s.
Nous démontrerons dans ce qui suit que la suite Σ est convergente.
Pour ce faire nous démontrerons d'abord que la suite Σ est fondamentale.

Soient n et p deux nombres naturels.
On a :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|x_{i+1} - x_n\| \leq \frac{\beta}{\rho} \sum_{i=n}^{n+p-1} \cdot \rho_0^{s^i} \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v\left(1 - \rho_0^{s^n}\right)}. \tag{6}$$

De l'inégalité (6) il résulte que Σ este convergente.
Soit $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, alors de (6) il résulte l'inégalité :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\rho_0^{s^n}}{v\left(1 - \rho_0^{s^n}\right)}; \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Il en résulte que $\bar{x} \in S$ et nous avons aussi obtenu l'inégalité jv).
L'inégalité jjj) résulte de (6.) pour $p = 1$.

Il reste à démontrer que $\bar{x}$ est la solution de l'équation (1).
Nous avons prouvé que l'inégalité (4) est vraie pour chaque $n = 0, 1, \ldots$. Alors on obtient :

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0$$

mais $\rho_n = v\|P(x_n)\|$ et donc $\lim_{n \to \infty} P(x_n) = P(x) = \theta$.

Ceci achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Ghinea, Monique**, *Sur la résolution des équations operationnelles dans les espaces de Banach*. Revue Francaise de traitement de l'information. **8**, 3--22, (1965).
[2] **Păvăloiu, Ion**., *Sur les procédés iteratifs a un ordre élevé de convergence*. Mathematica, **1--2 (35)**, 2, 309--324, (1970).
[3] **Traub, J. F.**, *Iterative methods for the solution of equations*. Prentice-Holl Inc. Englewood Cliffs N. J. (1964).

Recu le 30. VI. 1976.