MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 5, N° 2, 1976, pp. 219—224

SUR UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE NONLINÉAIRE AVEC CONTRAINTES DE TYPE INCLUSION

par

ŞTEFAN TIGAN

(Cluj-Napoca)

1. Introduction

En pratique, il se passe souvent que certains coefficients des contraintes d'un problème d'optimisation ne soient pas connus qu'approximativement. Parfois, on connait seulement quelques relations qui interviennent entre ces coefficients.

Tels problèmes sont des problèmes de programmation mathématique avec données inexactes et ils peuvent etre formulés comme des problèmes de programmation mathématique avec contraintes de type inclusion.

Des recherches recentes concernant la résolution des problèmes de programmation linéaire avec données inexactes ont été realisés par SOYSTER [3] et F.J. GOULD [2]. Nous rappelons encore les recherches de SOYSTER [4] et DUCA D. [1] sur la dualité du problème de programmation linéaire avec données inexactes.

Let but de cette note est d'obtenir des conditions afin qu'un problème de programmation mathématique nonlinéaire avec contraintes de type inclusion soit equivalent à un problème de programmation mathématique aux coefficientes déterminés.

Le résultat, qui sera présenté, généralise un résultat similaire obtenu par SOYSTER [3] au cas de la programmation linéaire avec contraintes de type inclusion.

2. Probleme de programmation nonlinéaire avec contraintes de type inclusion

Pour l'énnoncé du problème, nous supposons donnés les éléments suivants :

— les fonctions $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g_{ij}:\mathbf{R}^{q_j} \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m\,;\, j = 1, 2, \ldots, p)$ et $h_j:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$;

— les ensembles nonvides $T \subseteq \mathbf{R}^n$, $K_0 \subseteq \mathbf{R}^m$ et $K_j \subseteq \mathbf{R}^{q_j} (j = 1, 2, \ldots, p)$.

Nous désignons :

$$g_j(K_j) = g_{1j}(K_j) \times \ldots \times g_{mj}(K_j) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

où :

$$g_{ij}(K_j) = \{g_{ij}(z)/z \in K_j\}. \tag{1}$$

Il faut faire encore la remarque qu'étant donnés les ensembles $A_i \subseteq \mathbf{R}^m$ et les nombres réels $m_j (j = 1, 2, \ldots, p)$, on désigne par $m_1 A_1 + \ldots + m_p A_p$ l'ensemble :

$$\{m_1 a_1 + \ldots + m_p a_p / a_1 \in A_1, \ldots, a_p \in A_p\}.$$

Le problème de programmation mathématique avec contraintes de type inclusion, qu'on va étudier dans cette note est le suivant : (PN). Déterminer :

$$\sup f(x)$$

dans les conditions :

$$h_1(x)\, g_1(K_1) + \ldots + h_p(x) g_p(K_p) \subseteq K_0, \tag{2}$$

$$x \in T.$$

Nous allons montrer que dans certaines conditions, le probléme (PN) est équivalent à un problème habituel de programmation mathématique. Par la suite, nous faisons les hypothéses suivantes :

$H1)$ $h_j(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in T$ et $j = 1, 2, \ldots, p$;

$H2)$ $K_0 = K(b) = \{y \in \mathbf{R}^m / y \leqslant b\}$, b étant un vecteur donné de $\mathbf{R}^m$;

$H3)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, ; \ldots, p$ on a :

$$\bar{h}_{ij} = \sup \{g_{ij}(z)/z \in K_j\} < +\infty. \tag{3}$$

Il faut remarquer que l'hypothése $H3)$ est verifiée lorsque, par exemple, les ensembles K_j sont compacts et les fonctions g_{ij} sont continues.

Nous associons au problème (PN) le problème suivant : (PNA). Déterminer :

$$\sup f(x)$$

dans les conditions :

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{h}_{ij} h_j(x) \leqslant b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

$$x \in T.$$

THÉORÈME 1 : *Dans les hypothèses $H1) - H3)$, le problème (PN) est équivalent au problème associé (PNA).*

Démonstration : Pour démontrer le théorème, il sera suffisant de montrer que les ensembles des solutions admissibles des deux problémes sont identiques. D'arbord, soit x' une solution admissible pour le problème (PNA). Mais cela signifie que :

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{h}_{ij} h_j(x') \leqslant b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

et $x' \in T$.

Pour montrer que x' vérifie la relation (2) if suffit de montrer que pour tout :

$$h_{ij} \in g_{ij}(K_j) \quad (i = 1, 2, \ldots, m \,;\; j = 1, 2, \ldots, p), \tag{6}$$

a lieu l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{p} h_j(x') \leqslant b_i (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Mais, de (3) et (6), on en tire que :

$$h_{ij} \leqslant \bar{h}_{ij} (i = 1, 2, \ldots, m \,;\; j = 1, 2, \ldots, p),$$

d'où, en tenant compte de la nonégativité des fonctions h_j (voir, l'hypothèse $H1)$), on obtient les inégalitées :

$$\sum_{j=1}^{p} h_{ij} h_j(x') \leqslant \sum_{j=1}^{p} \bar{h}_{ij} h_j(x') \leqslant b_i (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Donc, la relation (7) a lieu.

Maintenant, en supposant que x' est une solution admissible pour le problème (PN), il résulte que pour tout h_{ij} vérifiant la relation (6), ont lieu les inégalitées (7) et $x' \in T$. Mais, alors on en tire que :

$$\sum_{j=1}^{p} \sup \{h_{ij}/h_{ij} \in g_{ij}(K_j)\} \cdot h_j(x') \leqslant b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

d'où, en tenant compte de (1) et (3) il résulte (5). Mais cela signifie que x' est une solution admissible pour le problème (PNA). Ceci achéve donc la démonstration.

3. Cas particulier

Par la suite, on considère le problème de programmation polinomial avec contraintes de type inclusion.

Nous supposons, que l'ensemble K_0 est un poliédre convexe :

$$K_0 = K(D, b') = \{y \in \mathbf{R}^m / \sum_{i=1}^{m} d_{ki} y_i \leqslant b'_k, \; k = 1, 2, \ldots, r\} \neq \Phi,$$

et, qu'on a :

(9) $$h_j(x) = x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_n^{a_{nj}} (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$T = \{x \in \mathbf{R}^m \,/\, x \geqslant 0\}.$$

Dans (8) et (9) nous supposons connues les matrices $D = [d_{ki}]$, $A = [a_{ij}]$ et le vecteur $b' = (b'_1, \ldots, b'_r) \in \mathbf{R}^r$.

Alors le problème de programmation polinomial avec contraintes de type inclusion, s'énnonce de la facon suivante :

(PPI) Déterminer :

$$\sup \sum_{j=1}^{p} c_j h_j(x)$$

dans les conditions :

(10) $$h_1(x) K_1 + \ldots + h_p(x) K_p \subseteq K(D, b')$$

$$x \in T,$$

où sont donnés les ensembles $K_j \subseteq \mathbf{R}^m$, $K_j \neq \Phi$, et les coefficients $c_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

En tenant compte de (8), on remarque facilement que $x' \in T$ vérifie la relation (10) si et seulement si x' satisfait les inégalités :

(11) $$\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} d_{ki} e_{ij} \right) h_j(x) \leqslant b'_k (k = 1, 2, \ldots, r),$$

pour tout $(e_1, \ldots, e_p) \in K_1 \times \ldots \times K_p$, où :

$$e_j = \begin{pmatrix} e_{1j} \\ \vdots \\ e_{mj} \end{pmatrix}, \ (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Nous désignons par $g_k : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, l'application linéaire définie par :

$$g_k(z) = \sum_{i=1}^{m} d_{ki} z_i \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Soit, alors :

$$g_k(K_j) = \{g_k(z) / z \in K_j\} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

et

$$g(K_j) = g_1(K_j) \times \ldots \times g_r(K_j).$$

De (11), il résulte que le problème (PPI) est équivalent au problème suivant :

(PPb') Déterminer :

$$\sup \sum_{j=1}^{p} c_j h_j(x)$$

dans les conditions :

$$h_1(x)\ g(K_1) + \ldots + h_p(x) g(K_p) \subseteq K(D, b').$$

$$x \in T.$$

En prenant,

$$\bar{\alpha}_{kj} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} d_{ki} z_i / z \in K_j \right\}$$

et en supposant :

(12) $$\bar{\alpha}_{kj} < +\infty \ (k = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, p),$$

on peut associer au problème (PPb') le problème suivant :

$PP(\bar{\alpha})$. Déterminer :

$$\sup \sum_{j=1}^{p} c_j h_j(x)$$

dans les conditions :

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{\alpha}_{ij} h_j(x) \leqslant b'_k, \ k = 1, 2, \ldots, r,$$

$$x \in T,$$

où $\bar{\alpha} = [\bar{\alpha}_{kj}]$.

En vertu du Théorème 1, en tenant compte de l'équivalence des problémes (PPI) et (PPb') et de (12), il résulte le théorème suivant :

THÉORÈME 2 : *Le problème (PPI) est équivalent au problème déterministe de programmation polinomiale $PP(\bar{\alpha})$.*

4. Remarques

1. Lorsque, $\bar{h}_{i'j'} = +\infty$ (voir, la relation (3)), alors la relation (2) et l'hypothése $H1$) impliquent, necessairement, que, pour toute solution admissible x' du probléme (PN), on a l'égalité :

$$h_j\,(x') = 0$$

Dans ce cas, on peut montrer, également, que le probléme (PN) est équivalent à un problème déterministe de programmation mathèmatique.

Soit: $J = \{j/\bar{h}_{ij} = +\infty$, pour au moins un $i\}$. Alors le problème associé sera bati de la façon similaire au problème (PNA). Pour cela on va éliminer des contraintes les terms contenant $h_j(x)$, pour tout $j \in J$, et on va ajouter aux contraintes pour tout $j \in J$, les égalités $h_j(x) = 0$.

2. Les théorèmes d'équivalence presentées donnent un procédé pour la résolution des problèmes avec contraintes de type inclusion. Ainsi, pour une première étape on détermine les coefficients du problème associé et dans une deuxiéme étape on résoud le probléme associé.

Evidemment, la difficulté de la résolution dépend de la taille du problème associé (même, dans le cas linéaire) et aussi de la complexité des problémes d'optimisation (voir (3)), par lesquels sont calculés les coefficients du problème associé.

REFERENCES

[1] Duca, D., *Observaţii asupra unei probleme de programare inexactă*, Al II-lea Colocviu de Cerdetări Operaţionale, Craiova, 7—8 decembrie 1974.

[2] Gould F.J., *Proximate Linear Programming: An Experimental Study of a Modified Simplex Algorithm for Solving Linear Programs*, Mimeo Series Nr. 789, Departement of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina, November 1971.

[3] Soyster A.L., *Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming*, Opns. Res., **21**, 5, (1973), 1154—1157.

[4] Soyster A.L., *A Duality Theory for Convex Programming with Set-Inclusive Constraints*, Opns. Res., **22**, 4 (1974) 892—898.

Reçu le 8. VII. 1976.

I. P. Cluj — Municipiul Cluj-Napoca 688/1977