MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 5, № 2, 1976, pp. 145—158

$\mathfrak{N}$ — ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ОБЩЕЙ АНАМОРФОЗЫ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА,
(Košice)

§ 1. В настоящей работе мы намерены показать, что, основываясь на результатах, изложенных в работах [1], [2], [3], [5] можно эффективно получить для произвольного уравнения (1.1) всевозможные номограммы из выравненных точек, входящие в состав номограммы (1.1), включая и с одно-, двух- или много-параметрическими полями и шкалами, если только уравнение имеет номограмму, состоящую не только из одних прямолинейных одно-или много-параметрических шкал, не приводящихся к номограммам из выравненных точек.

Пусть имеем зависимость

$$f(x_1;\ x_3;\ x_3;\ \ldots;\ x_n) = 0, \tag{1.1}$$

допускающую номограмму, состоящую не только из одних прямолинейных одно-или много-параметрических шкал.

Займемся $\mathfrak{N}$ — проблемой третьего порядка для n переменных, связанных уравнением (1.1). Мы, однако, не будем для экономии места выписывать всевозможные представления для (1.1) в виде цепи определителей третьего порядка, и функций трех переменных типа δ, что было сделано для четырех переменных в работе [1], выясняющей постановку задачи и ход ее решения и в общем случае. Мы будем считать, что $\mathfrak{N}$ — проблема для (1.1) нами оформленна. При решении $\mathfrak{N}$ — проблемы для (1.1) мы будем пользоваться номографическим методом и языком, который позволит нам легче ориентироваться во множестве возможных решений.

Таким образом, мы даем номографическое отображение функциональной задачи, и решаем соответствующую номографическую задачу, одновременно получая решение и функциональной задачи.

Если в оформлении $\mathfrak{N}$ — проблемы точно указаны роли всех переменных, то задача упрощается. Более сложной будет, задача, когда роли переменных не указаны, и требуется найти все решения. Мы этим и будем заниматься.

§ 2. Если для всевозможных групп трех переменных $\mathfrak{N}$ — условия дают отрицательный результат, то $\mathfrak{N}$ — проблема для (1.1) решений не имеет, либо решением будет последовательность определителей и неномографируемых равенств типа $\sigma(\lambda_i\,;\ x_i,\ n) = 0$, $\sigma(\lambda_i\,;\ x_i\,;\ x_j) = 0$, где λ и n вспомогательные переменные, причем элементы строк всех определителей связаны линейными зависимостями и в этом случае вопрос решается последовательным применением условий Сен — Робера. В последнем случае будем иметь, вообще говоря, неодносвяную номограмму нулевого, жанра быть может, с прямолинейными бинарными шкалами. Вопрос о связывании отдельных звеньев так, чтобы переменные типа λ и n изображались немыми шкалами, решается применением шварциана (см. работу [1]). Случай номограммы из прямолинеиных шкал переменных x_i и криволинейных шкал вспомогательных переменныхтипа λ и u охватывается $\mathfrak{N}$ — теореммой, и не входит в компетенцию условий Сен — Робера, потому, что одна из переменных по трем другим определяется, вообще говоря, в этом случае двузначно (см. рис. 1), причем между этими двумя значениями $x_4^{(1)}$ и $x_4^{(2)}$ не может быть зависимости, т. е. изменяя три другие переменные x_1, x_2, x_3, и одно из этих значений, — мы можем не менять второе, что легко усмотреть из рис. 1.

§ 3. Будем считать все переменные, кроме каких нибудь четырех, скажем x_1, x_2, x_3, параметрическими переменными, как в первом методе работы [2].

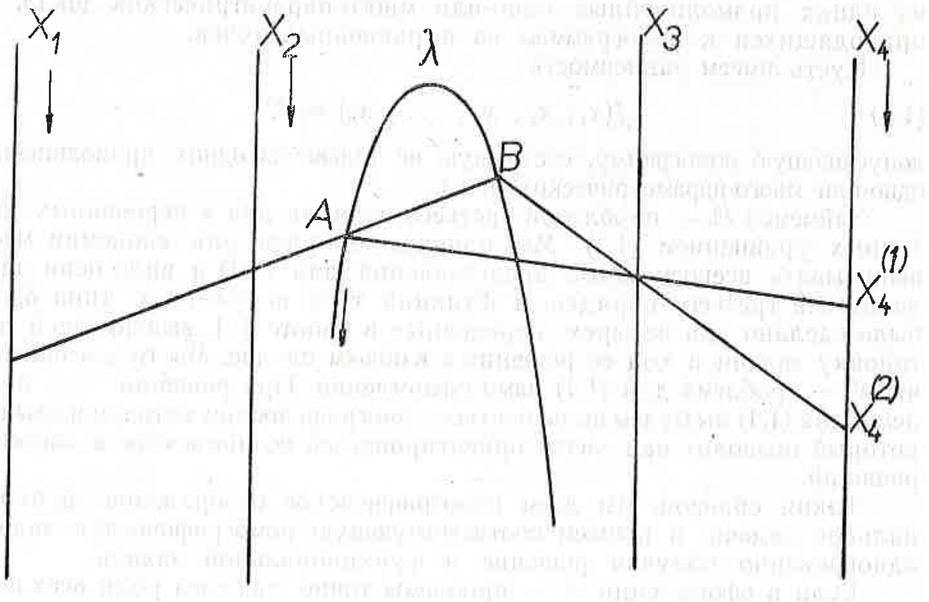


рис. 1.

Всего таких групп имеется C_n^4. Если все переменные являются однозначными функциями остальмых, то надо применить еще второй метод, рассмотреный в работе [2] к каждой группе (а можно действовать и с самого начала только этим методом). И если и этот метод не действует по отношению ко всем C_n^4 группам (выделенное число независимых испытаний представляет важную задачу, которую автор не рассматривает здесь, (см. работу [2]) номограмма может быть лишь нулевого жанра и может включать прямолинейные бинарные шкалы, неприводимые к номограммам нулевого жанра.

Тогда придется испытать условия Сен — Робера и если они тоже не удовлетворяются, то $\mathfrak{N}$ — проблема неразрешима.

Для односвязной номограммы от четырех переменных, поскольку она не состоит из прямолинейных шкал и не содержит прямолинейного или гомологического поля*) справедлива теорема единственности.

В случае $n > 4$ мы, останавливаясь на теореме о единственности, будем искать всевозможные номограммы.

Если для всех комбинацичй C_n^4 $\mathfrak{N}$ — условия для четырех переменных не удовлетворяются, то $\mathfrak{N}$ — проблема решения не имеет.

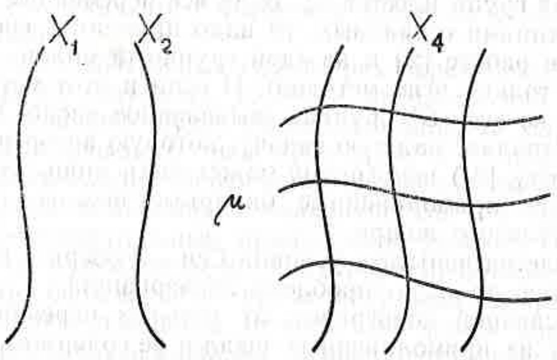
Если при выбранной нами параметризации, например x_1, x_2, x_3, x_4 — переменные, а x_5, x_6, $\ldots$, x_n, — параметры, $\mathfrak{N}$ — условия для четырех переменных удовлетворены и получает то или иное решение соответствующей $\mathfrak{N}$ — проблемы в виде неприводимых одно к другому представлений, то дальнейший ход решения заключается в рассмотрении строк определителей для бинарных шкал с точки зрения влияния на номограмму вхождения в них параметров x_5, x_6, x_7, $\ldots$, x_n.

Параметрические переменные x_{l_1}, $x_{l_2}, \ldots$ x_{l_s} пусть входят в какую нибудь строку названных определителей, содержащую одну из переменных $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$.

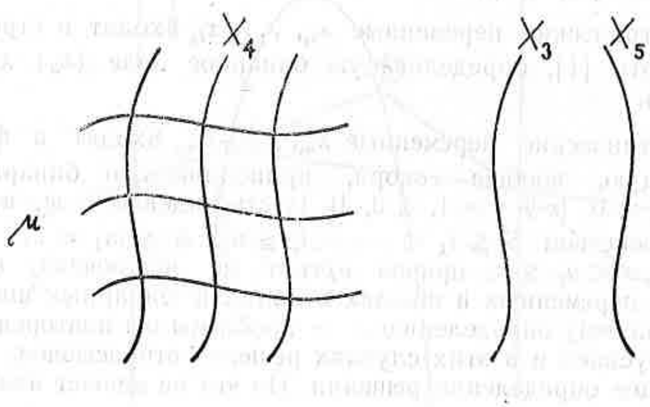
Параметрические переменные x_{l_1}, $\ldots$, x_{l_k} входят в строку определителя работы [1], определяющую бинарное поле $(x_\delta\,;\ x_\tau)$ $(\sigma \neq \tau = 1, 2, 3, 4)$.

Параметрические переменные $x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}$ входят в функцию σ_1, определяющую, вообще говоря, криволинейную бинарную шкалу $\sigma(x_r\,;\ x_t\,;\ \lambda) = 0$ $(r \neq t = 1, 2, 3, 4)$. Пусть индексы l, m, n, удовлетворяют неравенством $S \leqq l_1 < \ldots < l_s \leqq n$; $S \leqq m_1 < \ldots < m_k \leqq n$; $S \leqq n_1 < \ldots < n_p \leqq n$, причем *apriori* не исключена возможность повторений переменных в шкалах в полях и бинарных шкалах. Разумеется по нашему определению $\mathfrak{N}$ — проблемы мы повторений переменных не допускаем и в этих случаях решение отбрасываем, как не удовлетворяющее определению решения. Но это не мешает нам находить и

*) Номограмма с гомологическим бинарным полем — по определению должна содержать прямолинейную шкалу, и все кривые, по крайней мере одного из двух семейств, должны быть гомологичены одной из них в гомологиях с постоянной осью, совпадающей с прямолинейной шкалой.

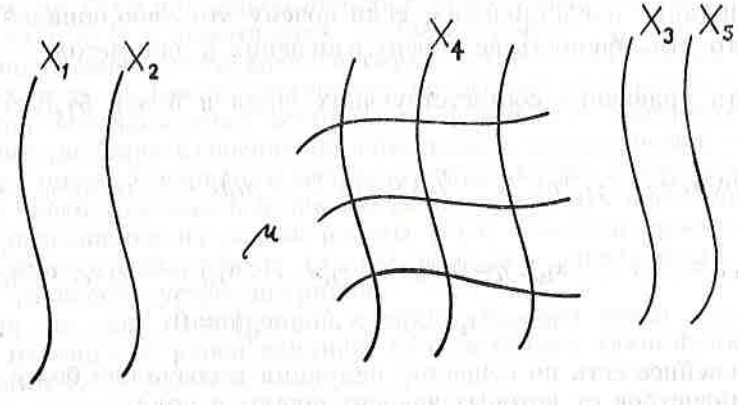


a)



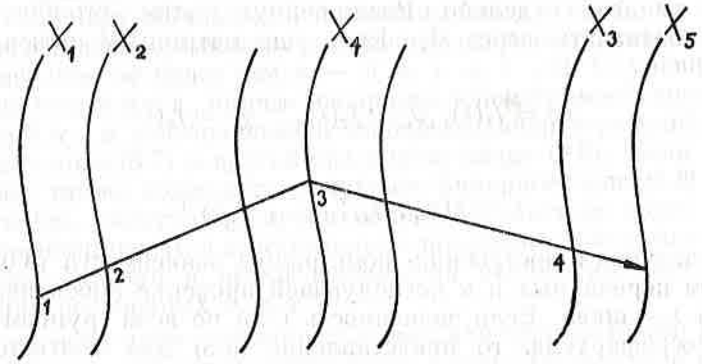
b)

рис. 2.



c)

Рис. 2



d)

рис. 2.

изучать и такие представления, если почему это либо понадобится, тем более, что эта общность не вносит изменения в наш метод.

Пусть уравнения соответствующих шкал и полей будут:

(3.1)

$$x = \varphi_i(x_i | x_{l_1}, \ldots, x_{l_s}),\ \eta = \psi_i(x_i | x_{l_1}, \ldots, x_{l_s}),\ z = \chi_i(x_i | x_{l_1}, \ldots, x_{l_s})$$

(3.2)

$$x = \varphi(x_\sigma ;\ x_t | x_{l_1}, \ldots, x_{l_k}),\ \eta = \psi(x_\sigma ;\ x_t | x_{l_1}, \ldots, x_{l_k}),\ z = \chi(x_\sigma ;\ x_t | x_{l_1}, \ldots, x_{l_k})$$

(3.3) $$\sigma(x_r ;\ x_t ;\ \lambda | x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}) = 0$$

Дальнейшее есть по существу редукция к возможно более низкому числу параметров от которых зависят шкалы и поля.

Составляя матрицы частных производных первого порядка для системы трех функций (3.1) (аналогично для (3.2)), определяем ее ранг.

Матрица эта будет для (3.1) вида:

(3.4)

$$M = \left\| \begin{array}{cccc|c} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_{l_1}} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_{l_2}} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_{l_s}} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial\Psi_i}{\partial x_{l_1}} & \dfrac{\partial\Psi_i}{\partial x_{l_2}} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_{l_s}} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial\chi_i}{\partial x_{l_1}} & \dfrac{\partial\chi_i}{\partial x_{l_2}} & \ldots & \dfrac{\partial\chi_i}{\partial x_{l_s}} & \dfrac{\partial\chi_i}{\partial x_i} \end{array} \right\|$$

Если бы положили $\chi_i = 1$, то число без ущерба для общности равнялось бы двум. Последний столбец соответствует непараметрической переменной, выписан отдельно. Расширенную этим столбцом марицу M будем обозначать через M_1. Если ранг матрицы M равен единице, то

(3.5) $$\varphi = f_1(\lambda),\ \psi_i = f_2(\lambda),\quad \chi_i = f_3(\lambda),$$

где

(3.6) $$\lambda = \lambda(x_{l_1} ;\ x_{l_2} ;\ \ldots ;\ x_{l_s} | x_i)$$

и задача сводтнся к построению номограммы зависимости (3.6) с меньшим числом переменных и к последующей проверке проективной конгруентности λ — шкал. Если зависимость (3.6) по всем группам переменных неномографируема, то представление (3.6) для соответствующей группы переменных, входящих в (3.6) является окончательным. Роль этого соотношения очевидно, совершенно аналогична уравнению $\sigma = 0$. Если $S = 1$, то получаем бинарную, вообще говоря, криволинейную немую шкалу (см. работу [2]).

Если же (3.6) для какой-нибудь группы четырех переменных (или трех, если $c = 1$) удовлетворяет соответствующим $\mathfrak{N}$ — условиям, то строим номограмму этого звена четырех (или соответственно трех) переменных и т. д. После построения номограмм отдельных, звеньев и выделения неразложимых комбинаций переменных останестя установить существование односвязной номограммы примыкающей к рассматриваемой шкале λ основного звена, во всяком случае связать те звенья, которые имеют одноименные шкалы вспомогательных переменных. Этот вопрос разрешается на основе работы [1] с помощью проективно-дифференциальных инвариантов (σ; k), если λ — шкала (если прямолинейная, то используется шварциан).

Если же ранг расширенной матрицы M_1 (3.4) равен двум, а ранг скажем матрицы M равен единице, то существуют такие функции двух переменных f_1, f_2, f_3,, что

(3.7) $$\varphi_i = f_1(x_i ;\ \mu),\qquad \psi_i = f_2(x_i ;\ \mu),\qquad \chi_i = f_3(x_i, ;\ \mu)$$

где

(3.8) $$\mu = \mu(x_{l_1},\ x_{l_2},\ \ldots,\ x_{l_s} | x_i)$$

Следовательно, в силу (3.7) имеем в даном случае „полунемое" бинарное поле, параметризованное по x_i и по вспомогательной переменной μ. При этом, если $S = 1$, то (3.8) превращается в

(3.9) $$\mu = \mu(x_{l_1} | x_i)$$

и заменяя μ его выражением просто получим — невырождающиееся (т. к. ранг M_1 равен двум) бинарное поле.

Если же правая часть (3.8) содержит более двух переменных, то приходим к задаче номографирования для уравнения (3.8), содержащего заведомо меньшее число переменных чем данное уравнение (оно заведомо не содержит остальные 3 переменные из x_1, x_2, x_3, x_4, кроме x_i) и, в том числе, вспомогательное переменное μ. Значит, число переменных в (3.8) заведомо не более чем $n - 3 + 1 = n - 2$. С уравнением (3.8) поступаем также и т. д., причем мы придем к номограмме с повторяющейся переменной x_i и повторяющейся вспомогательной переменой μ: один раз в бинарном поле (3.7) и другой раз в номограмме (3.8). Если номогранма (3.8) будет также содержать полунемое бинарное поле (3.8) и это поле окажется (см. работу [2]) проективно-конгруентным полю (3.7), то будем иметь номограмму с действительно полунемым бинарным полем, ибо номограмма связная и немая переменная исключена этой связью без повторения переменных x_i и μ.

На чертеже дана простейшая схема для минимального ($n = 5$) числа переменных, когда это может иметь место. Пусть $n = 5$ и $i = 4$. На схемах *a*) и *b*) даны: — построенная номограмма для первого звена после введения вспомогательной переменной $\mu = \mu(x_3 ;\ x_5 | x_4)$; *b*) — схема предполагаемой номограммы для последнего соотношения;

c) — односвязная номограмма после соидинения конгруентных бинарных полей.

В результате соединения переменная μ исключена вполне так, что семейство линий μ может быть устранено. Вместо поля получаем однопараметрическое семейство линий $\mu = \text{const}$.(см. рис. 2 л.). Пользование номограммой не требует пояснений. Это новый тип номограммы из выравненых точек для многих (пяти или более переменных). Переходя к функциональной проблеме, соответствующей расматриваему случаю пяти переменных, заметим, что в соответствующих определителях (два определителя типа работы [1], причем одна из двух переменных, входящих в нижние строки каждого определителя есть μ) переменная μ, конечно, должна присутствовать.

Вообще, если ранг матрицы M_1 равен двум, то функции φ_i, ψ_i, χ_i связаны одной зависимостью. Одна из этих трех функций (а именно та, производные которой входят в отличный от нуля минор второго порядка) выражается через две другие. Так что, полагая, скажем

$$\psi_i(x_i\,|x_{l_1}, \ \ldots, \ x_{l_s}) = \lambda, \ \chi_i(x_i|x_{l_1}, \ \ldots, \ x_{l_s}) = \mu, \tag{3.10}$$

будем иметь вместо (3.1)

$$\varphi_i = f_1(\lambda\,;\,\mu), \qquad \psi_i = \lambda, \ \chi_i = \mu \tag{3.11}$$

Уравнения (3.11) определяют бинарное поле (λ, μ) по вспомогательным переменным λ и μ. Приходим к номографипованию системы двух уравнений (3.10). Если $S=1$, то в согласии с предыдущим мы здесь также приходим к номограмме с невырождающимся бинарным полем (см. этот § выше) и необходимости номографирования системы (3.10) Пусть теперь $S = 2$.

Тогда помимо бинарного поля (3.10) имеем систему

$$\psi_i(x_i|x_{l_1}, \ x_{l_2}) = \lambda, \quad \chi_i(x_i|x_{l_1}, \ x_{l_2}) = \mu, \tag{3.12}$$

Для построения номограммы строим номограммы либо для каждого уравнения в отдельности, пользуясь теоремой единственности для четырех переменных и затем, при возможности [1], совмещаем одноименные элеметы обеих номограмм, либо применяем теорию номографирования систем уравнений [5], считая одну из переменных параметром.

В результате мы можем получить для $S=2$ в применении к рассматривавшемуся уже в этом § примеру пяти переменных номограмм типов на первый взгляд, отличных от полученных там, т. е. здесь две вспомогательные переменные (см. рис. 3 — *apriori* возможных идеальных решений задачи номографирования системы (3.12) и рис. 4 — простейшей номограммы предыдущего звена содержащего бинарное поле (3.11)).

Однако по крайней мере *apriori* не исключена возможность получения номограммы той же структуры (см. рис. 2).

В самом деле, возможно, что придем к случаям *a*) и *b*) рис. 3. Если возможно отобразить *a*) на *b*) так, чтобы совпали одноименные элементы

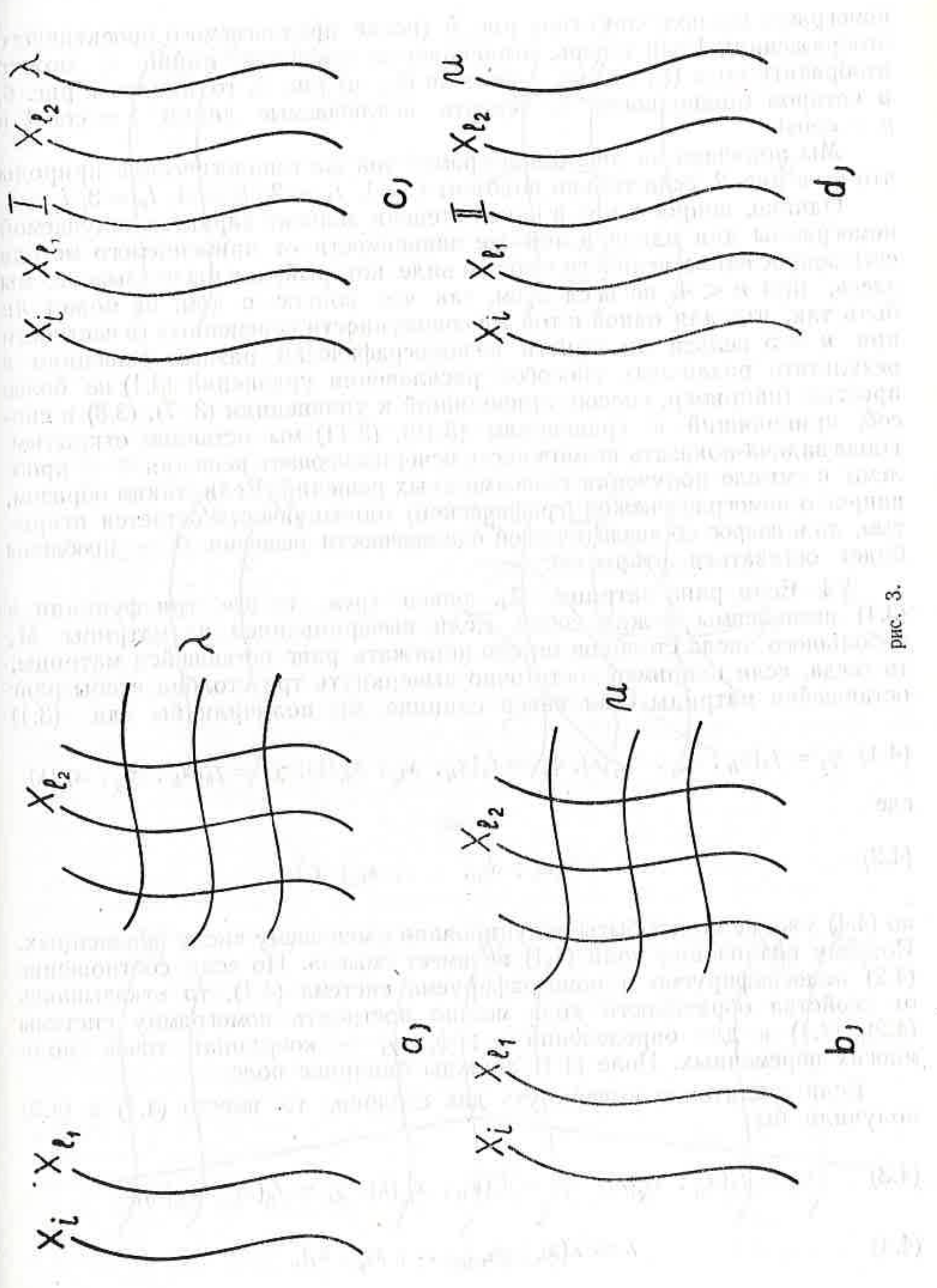


рис 3.

номограмм, мы получим схему рис. 5 (после предлагаемого проективного отображения), Если теперь, отвлекаясь от семейства линий x_{l_1}, можно отобразить поле (λ; μ) рис. 4 на поле (λ; μ) рис. 5, то придем к рис. 6, в котором можно вовсе не чертить исключаемые линии $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$.

Мы получаем на рис. 6 номограмму той же топологической природы что и на рис. 2, если только положит $i = 1$, $l_1 = 2$, $l_2 = 4$, $l_p = 3$, $l_q = 5$.

Однако, вопрос о том, в какой степени зависит характер получаемой номограммы для одной и той же зависимости от применяемого метода есть вопрос единственности в общем виде, который, как мы указывали, мы здесь, при $n < 4$, не исследуем, так что вопрос о том, не может ли быть так, что для одной и той же совокупности переменных (в частности при $n = 5$ нельзя ли притти к номографически разным решениям в результате различных способов расчленения уравнений (3.1) не более простые (например, способ, приводящий к уравнениям (3.7), (3.8) и способ, приводящий к уравнениям (3.10), (3.11) мы оставлям открытым. Наша задача-показать возможность исчерпывающего решения $\mathfrak{N}$ — проблемы в смысле получения всевозможных решений. Если, таким образом, вопрос о номографической (графической) однозначности остается открытым, то и вопрос об аналитической однозначности решения $\mathfrak{N}$ — проблемы будет оставаться открытым.

§ 4. Если ранг матрицы M_1, равен трем, то все три функции в (3.1) независимы между собой. Если вычеркиванием из матрицы M_1 небольшого числа столбцов можно понижать ранг оставшейся матрицы, то тогда, если например достаточно вычеркнуть три столбца, чтобы ранг оставшейся матрицы стал равен единице, мы получили бы для (3.1)

$$(4.1)\quad \varphi_i = f_1(x_{l_t};\ x_{l_q};\ x_{l_r}|\lambda),\ \psi_i = f_2(x_{l_t};\ x_{l_q};\ x_{l_r}|\lambda),\ \chi_i = f_3(x_{l_t};\ x_{l_q};\ x_{l_r}|\lambda)$$

где

$$(4.2)\qquad \lambda = \lambda(x_{l_1};\ x_{l_2};\ \ldots;\ x_{l_s};\ x_i),$$

но (4.1) уже не может быть редуцировано к меньшему числу переменных. Поэтому реализация поля (4.1) не имеет смысла. Но если соотношение (4.2) номографируемо и номографируема система (4.1), то отказываясь от свойства обратимости хода можно построить номограмму системы (4.2), (4.1) и для определения φ_i; ψ_i, χ_i — координат точек поля многих переменных. Поле (4.1) дважды бинарное поле.

Если достаточно вычеркнуть два столбца, то вместо (4.1) и (4.2) получили бы

$$(4.3)\qquad \varphi_i = f_1(x_{l_t};\ x_{l_q}|\lambda),\quad \psi_i = f_2(x_{l_t};\ x_{l_q}|\lambda),\ \chi_i = f_3(x_{l_t};\ x_{l_q}|\lambda),$$

$$(4.4)\qquad \lambda = \lambda(x_{l_1};\ x_{l_2};\ \ldots;\ x_{l_s};\ x_i),$$

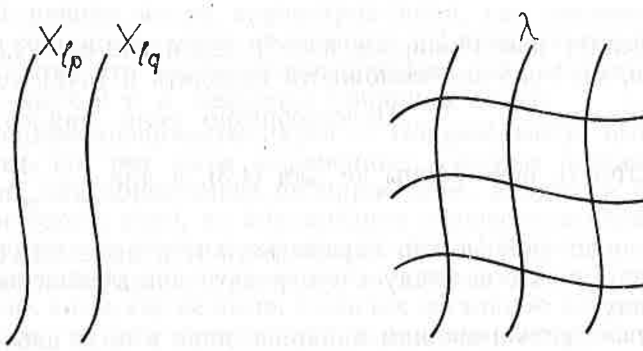


рис. 4.

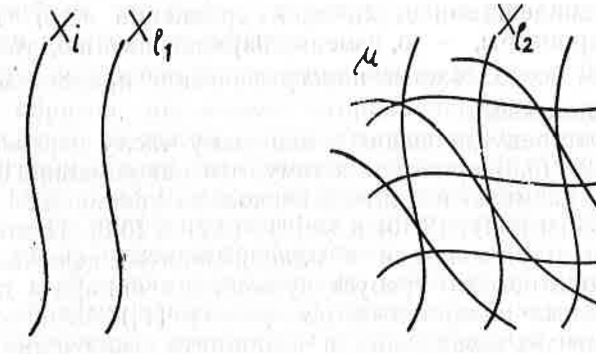


рис. 5.

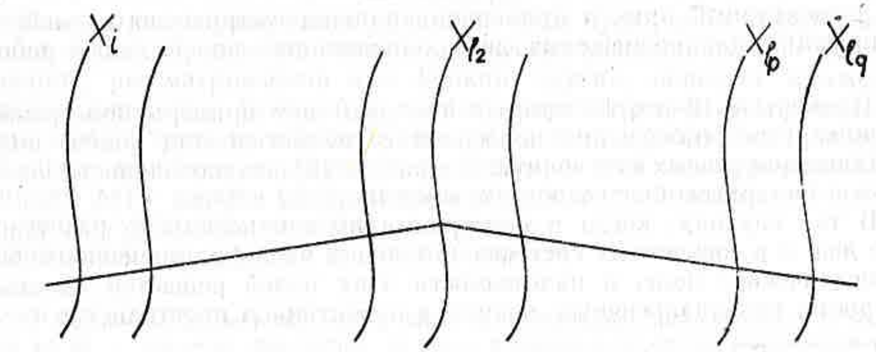


рис. 6.

где (4.3) определяет нам тернарное поле*). Если система (4.3) и (4.4) номографируема, мы получим возможность находить и точки тернарного поля по координатам $\frac{\varphi_i}{\chi_i}$, $\frac{\psi_i}{\chi_i}$. Целесообразно если придерживаться этого метода, строить номограммы не для (4.3), а для $x=\frac{\varphi_i}{\chi_i}$, $\eta=\frac{\psi_i}{\chi_i}$ и для (4.4).

Тернарное поле (4.3) можно осуществить и в виде многолистного бинарного поля; однако, не следует нумеровать листы по вспомогательному переменному.

Можно осуществить и дважды бинарное поле в виде набора тетрадей бинарных полей и т. д., но надо помнить, что вспомогательная переменная может допускаться лишь внутрь бинарного поля.

§ 5. Т. к. нет никакой принципальной разницы между уравнениями (3.1) и (3.2), то на последних мы не останавливаемся: все делается также, как в § 4. Что же касается неприводимого к виду определителей со строками зависящими от x_r, x_l, λ уравнения (3.3), в котором $x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}$ — параметры, — то, изменив параметризацию, точно также, как прежде, ищем всевозможные номографические представления этого уравнения C^3_{p+3} способами.

Мы видели, что редуцирование к меньшему числу переменных, входящих в (3.1), (3.2), (3.3) приводит к тому, что одноименная переменная — и даже не одна, начинает входить в несколько уравнений: например: в (4.2) и (4.1); (4.3) и (4.4); (3.10) и (3.11); (3.7) и (3.8). Поэтому следующий шаг должен заключаться в одновременном совмещении всех одноименных элементов. Это требует применения аппарата проективно — дифференциальных инвариантов (см. работу [1]). Без этого нельзя получить односвязную номограмму и выполнить исключение вспомогательных переменных, подобно тому, как это схематически было рассмотрено в § 3. В противном случае мы придем к несовершеным, с теоретической точки зрения, неодносвязным номограммам с повторяющимися элементами, хотя возможны совершенные.

Элементарный пример применения однопараметрического семейства коллинеаций для совмещения двух одноименных полей дан в работе [6].

Примеры § 12 и § 13 вместе с тем дают нам примеры номограмм с коллинеарными (обобщение номограмм с гомологическим полем) полями, иллюстрирующих отмеченную в в работе [2] неоднозначность номограммы с бинарным полем в этом исключительном случае.

В тех случаях, когда в номограмму входит несколько раз (чаще всего два, а в совместных системах и большее число) одноименное многопараметрическое поле, о наложимости этих полей решается не столь же просто, как аналогичный вопрос в проективном пространстве числа

*) Частный случай тернарного поля рассмотрел Л. И. МИХАЛЕВСКИЙ [4].

измерений равном числу параметров поля, где достаточно проверить равенство соответствующих обобщенных [2] инвариантов Гурса — Пэнлеве. Дело в том, что многопараметрическое поле можно рассматривать как одно, двух и т. д. семейство бинарных полей.

Двумерные инварианты Гурса — Пэнлеве могут быть соответственно равны по тем двум переменным, которые поставлены в особое положение, как образующее бинарное поле, входящее в состав многопараметрического поля, но коллинеация осуществляющая их наложение может зависеть от многих параметров (многопараметрическая коллинеация). Совмещение повлечет возникновение полей и притом многопараметрических и там, где не было. Едли все остальные элементы номограммы суть шкалы, то они превратятся в многопараметрические (в лучшем случае двух параметрические поля) и соответствующие переменные (параметры коллинеации) будут повторяться, что мы отклоняем по соображениям теоретического несовершенства. Но если коллинеация окажется независящей от параметров, то тогда произойдет совмещение и все параметры поля, за исключением двух (и, быть может, даже одного), будут исключены, что будет указывать на независимость связи между переменными от этих параметров.

Примеры подобного исключения мы видели в § 3.

Таким образом, мы можем, отправляясь от — выделяемых трех переменных, шаг за шагом выполнять редукцию полипараметрических полей номограммы, пока это возможно, и. т. е. пока не придем к уравнениям вида (3.2) и (3.3), число параметров которых уже не может быть снижено*); — до получения обычной шкалы или бинарного поля (пример-уравнения (4. 1) и неномографируемым уравнениям типа (4.2) или — что тоже — (3.3), либо, допускающим номограмму нулевого жанра.

Таким образом, общая задача проведена к задаче выяснения возможности построения номограммы нулевого жанра, включающей, быть может, и неприводимые к номограммам из выравненных точек бинарные шкалы или даже состоящей только из первых или только из последних для уравнения многих переменных типа (3.3) не номографируемого номограммами, содержащими криволинейные шкалы и бинарные поля.

Как мы знаем уже, такое уравнение (3.3) будет однозначно относительно любой переменной, точнее: множество значений любой одной переменной, рассматриваемой как функция других, образует множество попарно зависимых функций и, если мы параметризуем все переменные, кроме любых трех, то значение каждой из этих переменных, как функций двух других и параметров, и значение этой же переменной как функции двух других и параметров, имеющих любые другие значения (см. работу [2]), должны быть зависимы.
Этой задачей мы здесь не будем заниматься.

*) Можно только поставить тогда вопрос о номографировании системы (4.1) основываясь на $\mathfrak{N}$ — условиях для систем, но это — отклонение от метода выравненых точек в чистом виде; — отклонение, впрочем, имеющее практическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вильнер И. А., *Стереоскопическая номография и решение проблемы общей анаморфозы в $\mathfrak{N}$ — мерном пространстве,* Успехи математических наук, (1956), т. 9, в 4 (70), 123—130.

[2] Вильнер И. А., *Проблема номографической интерпретации функции комплексного переменного и задачи Коши,* Сборник: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, (1960),, ФИЗМАТГИЗ, 371—401.

[3] Вильнер И. А., *Проблема анаморфозы,* Доклады Академии наук СССР, (1951), т. 77 № 2, 177—180.

[4] Михалевский Л. И., *Тернарное поле,* Номографический сборник изд. ОНТИ, НКТП (1935).

[5] Вильнер И. А., *Номограммы систем уравнений и аналитических функций,* Доклады Академии наук СССР, (1947), т. 58, № 5.

[6] Вильнер И. А., *Номографирование систем уравнений и аналитическух функций,* Номографический сборник, изд — во Московского университета, (1951), 125—243.

Поступило 15 IV 1974.