MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 5, Nº 2, 1976, pp. 189–192

COMPLÉMENTS REGARDANT LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES SÉRIES

par

ANDREI NEY
(Cluj-Napoca)

Préliminaires. L'accélération de la convergence d'une série ayant pour but l'amélioration de l'approximation de sa somme est basée sur deux concepts :

1° la définition du fait qu'une série converge plus vite que l'autre, et

2° la procédure d'appliquer une transformation au termes d'une série convergente, de telle façon qu'elle reste encore convergente et conserve la somme de la série originelle, — de plus, la suite des sommes partielles de la transformée converge plus vite à cette somme que la suite des sommes partielles de la série originelle.

D'après PRINGSHEIM, [4], si Σu_n et Σv_n sont deux séries numériques convergentes dont les restes du rang n soient notés par r_n respectivement ρ_n, alors la série Σv_n converge — par définition — plus vite que la série Σu_n si on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{r_n} = 0$.

On démontre facilement, que pour deux séries convergentes et à termes positifs, Σu_n et Σv_n, l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ entraine l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{r_n} = 0$.

On est tenté, parfois, d'étudier seulement le rapport des termes correspondants en vue da la comparaison des rapidités de convergence de deux séries — même autres qu'à termes positifs, [1], [3]. Or il est suffisant de considérer l'exemple classique des séries $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ et $\Sigma \frac{1}{n \ln n}$ pour constater que malgré la décroissance plus vite du terme général de la deuxième série — à zéro — que celui de la première, la deuxième série diverge, tandis que la première converge.

***

Nous démontrerons quelques théorèmes qui justifient des pratiques de calcul bien effectuées, mais pas toujours soutenues théoriquement. Il s'agira des séries alternées, des séries de puissances et des séries trigonométriques.

THÉORÈME 1. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites à termes réels positifs, strictement décroissantes a zéro.* (Les séries alternées $\Sigma(-1)^{n-1}u_n$ et $\Sigma(-1)^{n-1}v_n$ seront convergentes, d'après le critère de Leibniz). *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$, *alors on peut indiquer pour la valeur absolue du reste de rang n de la série* $\Sigma(-1)^{n-1}v_n$ *une majorante (dépendante de n) qui tendra plus vite à zéro que la majorante de la valeur absolute du reste de rang n de la série* $\Sigma(-1)^{n-1}u_n$.

Démonstration. Le seul controle sur les valeurs absolues des restes des séries alternées est donné par les inégalités classiques :

$$|r_n|<u_{n+1}\quad \text{et}\quad |\rho_n|<v_{n+1}\,;$$

d'après l'énoncé du théorème, on a

$$v_{n+1}=\omega_{n+1}u_{n+1}\quad\text{avec}\quad\lim_{n\to\infty}\omega_{n+1}=0,$$

donc $|r_n|<u_{n+1}$ et $|\rho_n|<o(u_{n+1})$ $\quad(n\to\infty)$, C.Q.F.D.

O b s e r v a t i o n 1. Le théorème 1 peut être utilisé dans le cas où la transformation d'Euler, [2], est appliquée par exemple, à une série alternative et que la transformée soit aussi alternative.

THÉORÈME 2. *Soit les séries de puissances (réelles) :* Σa_nx^n *pour laquelle* $a_n>a_{n+1}(n=0,1,\ldots)$ *avec* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, et Σb_nx^n *pour laquelle* $b_n>b_{n+1}(n=0,1,\ldots)$ *avec* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$, *alors pour* $|x|<1$ *la série* Σb_nx^n *converge plus vite que la série* Σa_nx^n $(a_n,b_n>0)$.

Démonstration. Le rayon de convergence des deux séries est égal à 1. Pour $0<x<1$ les deux séries sont à termes positifs et puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_nx^n}{a_nx^n}=0$, résulte que le rapport de leurs restes a aussi la limite zéro, donc la deuxième série converge plus vite que la première. Pour $-1<x<0$ toutes les deux séries seront alternées. (Dans ce cas le théorème 1 peut être appliqué). On couple deux par deux les termes de chacune des deux séries, afin d'en former deux séries à termes positifs, notamment $\Sigma(a_{2n}x^{2n}-a_{2n+1}x^{2n+1})$, respectivement $\Sigma(b_{2n}x^{2n}-b_{2n+1}x^{2n+1})$, $(n=0,1,\ldots)$. Pour les deux termes généraux on aura

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}x^{2n}-b_{2n+1}x^{2n+1}}{a_{2n}x^{2n}-a_{2n+1}x^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}}{a_{2n}}\cdot\frac{1-\dfrac{b_{2n+1}}{b_{2n}}x}{1-\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}x}=0,$$

donc la série Σb_nx^n converge plus vite que la série Σa_nx^n si on se rapporte aux sommes partielles de rang pair. Quant aux sommes partielles de rang impair, on procède comme il suit : on néglige les termes a_0 respectivement b_0, puis en changeant les signes on arrive aux séries

$$a_1x-a_2x^2+a_3x^3\ldots\qquad\text{respectivement}\qquad b_1x-b_2x^2+b_3x^3\ldots,$$

qui sont de même nature et ont respectivement les mêmes rapidités de convergence que les séries d'où elles proviennent. Dans ce cas, on repète le raisonnement déja utilisé et on arrive finalement à ce que la suite des sommes partielles de rang impair de la série Σb_nx^n converge plus vite que celle de la série Σa_nx^n ; donc la série Σb_nx^n converge plus vite que la série Σa_nx^n.

O b s e r v a t i o n 2. Le théorème 2 vient de préciser l'effet de la transformation d'Euler-Abel relativement aux séries de puissances, [2].

THÉORÈME 3. *Soit* $(X,+,\|\cdot\|)$ *un espace Hilbert (réel ou complex) et* $\{e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots\}$ *un système dénombrable d'éléments formant une base orthonormale pour X. On considère les séries* $\Sigma\alpha_ne_n$ *et* $\Sigma\beta_ne_n$, *toutes les deux convergentes dans X. Si pour les scalaires* (α_n) *et* (β_n) *a lieu la relation à la limite* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|}=0$ *alors pour les restes correspondants des deux séries on aura* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\|r_n\|}{\|\rho_n\|}=0$, *donc la première série converge plus vite que la deuxième.*

Démonstration. Pour les normes des restes ont lieu les égalités bien connues :

$$\|r_n\|^2=\sum_{n+1}^{\infty}|\alpha_k|^2\quad\text{respectivement}\quad\|\rho_n\|^2=\sum_{n+1}^{\infty}|\beta_k|^2.$$

Puisque $\Sigma|\alpha_k|^2$ et $\Sigma|\beta_k|^2$ sont des séries convergentes à termes positifs, a lieu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|r_n\|^2}{\|\rho_n\|^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{n+1}^{\infty}|\alpha_k|^2}{\sum\limits_{n+1}^{\infty}|\beta_k|^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_k|^2}{|\beta_k|^2},$$

— si la dernière limite existe —; en même temps, utilisant les conditions précisées dans l'énoncé du théorème, on aura

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\alpha_ne_n\|}{\|\beta_ne_n\|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|}=0,$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\|r_n\|}{\|\rho_n\|}=0$; C.Q.F.D.

O b s e r v a t i o n 3. Le théorème 3 justifie l'utilisation de la transformation de Kummer pour accélérer la convergence des séries trigonométriques, [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bezikovitch, Ia. S. *Priblijennie vitchislenia*, M. — L. GITTL. 1949.

[2] Knopp. K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New-York, 1964.

[3] Krilov, A. N., *Lectsii o priblijennih vitchislenniah*. Gostehizdat, Moskva, 1954.

[4] Pringsheim, A., *Vorlesungen über Zahlen und Funktionenlehre*. 1.2. *Unendliche Reihen mit reellen Gliedern*. Verlag Teubner. Berlin, 1923.

Universitatea „Babeş—Bolyai" din Cluj Napoca
Facultatea de Matematică, Catedra de Analiză.

Reçu le 30.VII.1976