MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, N° 1, 1977, pp. 81—84

SUR CERTAINES ALGÈBRES DE FONCTIONS CONTINUES ET SUR LES SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES UNIFORMÉMENT BORNÉES

par

ION RASA

(Cluj-Napoca)

En étudiant une généralisation du théorème de KOROVKINE nous avons obtenu (voir : [2]) des résultats concernant les suites de variables aléatoires uniformément bornées. En utilisant un autre point de vue sur le même théorème, exposé par W. M. PRIESTLEY dans [1], nous allons démontrer d'autres résultats.

1. Soit $[a, b]$ un intervalle borné et fermé de l'axe réel. Par 1, x, x^2 nous désignerons les fonctions réelles f_0, f_1, f_2 définies sur $[a, b]$ telles que $f_i(t) = t^i$, $t \in [a, b]$, $i = 0, 1, 2$.

En utilisant les résultats de [1] il est aisé d'obtenir le

THÉORÈME 1. *Soient $A_n : C[a, b] \to R$, $n = 1, 2, \ldots$, des fonctionnelles linéaires et positives, $A_n(1) \leqslant 1$, et $x_0 \in [a, b]$. Alors $\mathcal{S} = \{f \in C[a, b] \mid A_n(f) \to f(x_0),\ A_n(f^2) \to f^2(x_0)\}$ est une sous-algèbre fermée de $C[a, b]$.*

Dans [2] nous avons étudié les suites de fonctionnelles pour lesquelles $A_n(x^2) - A_n^{(2)}(x) \to 0$. En suivant ce point de vue, nous allons démontrer le

THÉORÈME 2. *Soient $A_n : C[a, b] \to R$, $n = 1, 2, \ldots$, des fonctionnelles linéaires et positives, $A_n(1) \leqslant 1$. Alors $\Sigma = \{f \in C[a, b] \mid A_n(f^2) - A_n^2(f) \to 0\}$ est une sous-algèbre fermée de $C[a, b]$, et $\mathcal{S} \subset \Sigma$.*

Démonstration. Comme dans [1], à l'aide de l'inégalité $A_n^2(g) \leqslant A_n(g^2)$, on peut démontrer que si $f \in \Sigma$, $g \in C[a, b]$, alors

$$A_n(f \cdot g) - A_n(f) \cdot A_n(g) \to 0. \tag{1}$$

Soient $f, g \in \Sigma$. Alors

$$A_n(f+g)^2 - A_n^2(f+g) = A_n(f^2) - A_n^2(f) + A_n(g^2) - A_n^2(g) + 2[A_n(f\cdot g) - A_n(f)\cdot A_n(g)] \to 0,$$

donc $f+g \in \Sigma$.

Soit $f \in \Sigma$. Nous avons, en vertu de (1) :

(2) $$A_n(f\cdot f^2) - A_n(f)\cdot A_n(f^2) \to 0$$

(3) $$A_n(f\cdot f^3) - A_n(f)\cdot A_n(f^3) \to 0$$

Alors :

$$A_n(f^4) - A_n^2(f^2) = [A_n(f^4) - A_n(f)\cdot A_n(f^3)] + A_n(f)\,[A_n(f^3) - A_n(f)\cdot A_n(f^2)] + A_n(f^2)\,[A_n^2(f) - A_n(f^2)] \to 0.$$

et on en déduit que $f^2 \in \Sigma$.

Il est clair que Σ est close par rapport à la multiplication par les nombres. Puis, si $f,\ g \in \Sigma$ alors $f\cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2] \in \Sigma$. Donc Σ est une sous-algèbre de $C[a,\ b]$. Pour démontrer que cette sous-algèbre est fermée il suffit d'appliquer la bien connue „méthode des 3ε".

Soit $A \in C^*[a,\ b]$, $A(1) \neq 0$. Dans [2] nous avons précisé la signification du nombre $b(A) = A(x^2) - \frac{A^2(x)}{A(1)}$.

THÉORÈME 3. *Soient $A_n : C[a,\ b] \to R$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, des fonctionnelles linéaires et positives. Si $A_n(1) \to 1$ et $b(A_n) \to 0$, alors pour chaque $f \in C[a,\ b]$: $A_n(f^2) - A_n^2(f) \to 0$.*

Démonstration. Posons $B_n = \frac{A_n}{A_n(1)}$. Alors B_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, sont des fonctionnelles linéaires et positives, et $B_n(1) = 1$. Conformément au théorème 2, $\Sigma_1 = \{f \in C[a,\ b] \mid B_n(f^2) - B_n^2(f) \to 0\}$ est une sous-algèbre fermée de $C[a,\ b]$.

Considérons maintenant l'ensemble

$$\Sigma = \{f \in C[a,\ b] \mid A_n(f^2) - A_n^2(f) \to 0\}.$$

A l'aide de l'hypothèse $A_n(1) \to 1$ nous pouvons montrer que

$$\Sigma_1 = \Sigma \text{ et que } 1 \in \Sigma.$$

Puis $b(A_n) = A_n(x^2) - \frac{A_n^2(x)}{A_n(1)} \to 0$, d'où il résulte $x \in \Sigma$.

Donc Σ est une sous-algèbre fermée de $C[a,\ b]$ et $1 \in \Sigma$, $x \in \Sigma$. Le théorème de WEIERSTRASS nous montre que $\Sigma = C[a,\ b]$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Nous allons utiliser ces résultats en théorie des probabilités. Soit $(\Omega,\ K,\ P)$ un champ de probabilité, et $X : \Omega \to [a,\ b)$ une variable aléatoire bornée. Désignons par F sa fonction de répartition.

Dans [2] nous avons considéré la fonctionnelle linéaire et positive

$$A : C[a,\ b] \to R,\quad A(f) = \int_a^b f(t)dF(t).$$

Soit $D^2(X)$ la variance de X. Alors $b(A) = D^2(X)$. Si $f \in C[a,\ b]$ considérons la variable $f \circ X : \Omega \to R$. Il est aisé de vérifier que $D^2(f\circ X) = A(f^2) - A^2(f)$.

THÉORÈME 4. *Soient $X_n : \Omega \to [a,\ b)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, telles que $D^2(X_n) \to 0$. Alors, pour chaque $f \in C[a,\ b]$: $D^2(f\circ X_n) \to 0$.*

Démonstration. Considérons la suite de fonctionnelles (A_n). Nous avons $A_n(1) = 1$, $b(A_n) = D^2(X_n) \to 0$. Conformément au théorème 3, si $f \in C[a,\ b]$, alors $A_n(f^2) - A_n^2(f) \to 0$. Mais $A_n(f^2) - A_n^2(f) = D^2(f\circ X_n)$, donc $D^2(f\circ X_n) \to 0$.

Remarque. Ce théorème peut être démontré en utilisant le théorème 5 de [2]. En effet, les fonctionnelles A_n ci-dessus vérifient les hypothèses du théorème 5, et, de plus, $A_n(1) = 1$. Donc, pour $g \in C[a,\ b]$,

(4) $$\liminf A_n(g) = \liminf g(x_n)$$

(5) $$\limsup A_n(g) = \limsup g(x_n)$$

où $x_n = A_n(x)$. D'ici on déduit $A_n(g) - g(x_n) \to 0$. En appliquant ce résultat pour f et f^2, nous obtenons

$$|D^2(f\circ X_n)| = |A_n(f^2) - A_n^2(f)| \leqslant |A_n(f^2) - f^2(x_n)| + |A_n(f) - f(x\ )| \cdot |A_n(f) + f(x_n)| \to 0, \text{ q.e.d.}$$

3. Dans le cas $f \in C^2[a,\ b]$, nous pouvons préciser le rapport entre $D^2(f\circ X_n)$ et $D^2(X_n)$.

THÉORÈME 5. *Soit $S : \Omega \to [a,\ b)$ une variable aléatoire bornée, et $f \in C^2[a,\ b]$. Alors $D^2(f\circ X) \leqslant (2\,\|f\|\cdot\|f''\| + \|f'\|^2)\cdot D^2(X)$.*

Démonstration. La fonctionnelle A attachée à X est linéaire, positive, et $A(1) = 1$, $b(A) = D^2(X)$. Soit $x_0 = A(x)$. Alors (voir : [2], lemme 2) pour chaque $g \in C[a,\ b]$ il existe un système $x_1,\ x_2,\ x_3$ de points distincts de $[a,\ b]$ tel que

$$A(g) = g(x_0) + b(A)\ [x_1,\ x_2,\ x_3;\ g].$$

Mais $f \in C^2[a,\ b]$, donc

(6) $$A(f^2) = f^2(x_0) + b(A)\cdot\frac{(f^2)''(\alpha)}{2\,!} = f^2(x_0) + b(A)\ (f\cdot f'' + f'^2)(\alpha)$$

où $a < \alpha < b$, et

$$A(f) = f(x_0) + b(A) \cdot \frac{f''(\beta)}{2!}, \quad a < \beta < b. \tag{7}$$

$$D^2(f \circ X) = |A(f^2) - A^2(f)| \leqslant |A(f^2) - f^2(x_0)| +$$
$$+ |A(f) - f(x_0)| \cdot |A(f) + f(x_0)| \leqslant b(A) \cdot \|f \cdot f'' + f'^2\| +$$
$$+ b(A) \cdot \frac{\|f''\|}{2} \cdot 2\|f\| \leqslant D^2(X)(2\|f\| \cdot \|f''\| + \|f'\|^2).$$

Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Priestley, W. M., *A Noncommutative Korovkin Theorem*, J. Approx. Theory, **16**, 3, 251–260 (1976).

[2] Rasa, Ion, *Sur certaines suites de fonctionnelles*, Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation, **4**, 2, 171–178 (1975).

Reçu le 22. XII. 1976.