MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, N° 1, 1977, pp. 99 – 105

APPROXIMATION VON ABLEITUNGEN UNBESCHRÄNKTER FUNKTIONEN DURCH LINEARE OPERATOREN

von

H. WALK

(Stuttgart)

1. Der Satz von P. P. KOROWKIN (s. [2]), der sich auf die Approximation durch lineare positive Operatoren unter Verwendung von Testfunktionen bezieht und in Vorstufen schon von T. POPOVICIU [3] und H. BOHMAN [1] angegeben worden ist, läßt sich in verschiedenen Versionen formulieren. Eine Version bezieht sich auf die Approximation einer lokal stetigen, global beschränkten Funktion in ihrem Stetigkeitsbereich.

In der vorliegenden Arbeit wird die Approximation lokal existierender Ableitungen unbeschränkter Funktionen durch lineare Operatoren untersucht. Für eine Folge linearer (d.h. additiver und homogener) Operatoren L_n, die einen linearen Raum $M^0(A)$ auf $A \subseteq R$ definierter reellwertiger Funktionen in den Raum $M(A^*)$ der auf $A^* \subseteq A$ definierten reellwertigen Funktionen abbilden, und einen inneren Punkt $x_0 \in A^*$ seien die Ableitungsfunktionale $L_{nx_0}^{(m)}$ der m-ten Ordnung $(m = 1, 2, \ldots)$ durch

$$L_{nx_0}^{(m)} f: = \frac{d^m}{dt^m} (L_n f)(t)|_{t=x_0} \qquad \text{(falls existent)}$$

definiert. Der nachstehend angegebene Satz vermittelt für den Fall, daß eine Funktion $f \in M^0(A)$ in x_0 eine m-te Ableitung $f^{(m)}(x_0)$ besitzt, eine Konvergenzaussage über die Approximation von $f^{(m)}(x_0)$ durch die Folge der Funktionale $L_{nx_0}^{(m)}$. Die Voraussetzungen sind eine entsprechende (die m-te Ableitung in x_0 betreffende) Approximationseigenschaft bei $m + 3$ Testfunktionen und eine zur Erfassung der Unbeschränktheit von f dienende lokale Bedingung über die $L_{nx_0}^{(m,\cdot)}$ — Bilder von $h(|f|)$, wo $L_{nx_0}^{(m,\cdot)}$ ein gewisses $L_{nx_0}^{(m)}$ zugeordnetes Funktional ist und h eine Abbildung der nichtnegativ reellen Achse R^+ in sich ist mit $h(s)/s \to \infty$ $(s \to \infty)$. Außerdem werden "asymptotische Positivität" und eine gleichmäßige Normbeschränktheit für die Funktionale $L_{nx_0}^{(m,\cdot)}$ vorausgesetzt. Da diese Funktionale in den interessanten Anwendungen nicht positiv sind, kann die letzte Voraussetzung, die sonst erfüllt wäre, nicht weggelassen werden.

Es sei bemerkt, daß sich der angegebene Satz und sein Beweis leicht auf den Fall $m = 0$ übertragen lassen, wenn man hierbei die Existenz von $f^{(m)}(x_0)$ durch die Stetigkeit von f in x_0 ersetzt. In diesem Falle stimmen die Folgen $\{L_{nx_0}\}$ (erklärt durch $L_{nx_0}f := (L_n f)(x_0)$, $f \in M^0(A)$) $\{L_{nx_0}^{(m)}\}$, $\{L_{nx_0}^{(m,\cdot)}\}$ überein, und man erhält eine Verallgemeinerung des Korowkinschen Satzes auf unbeschränkte Funktionen, die in [6] (zum Fall $h(s) = s^r$ mit einem $r > 1$ vgl. auch [5]) eingehend behandelt wurde.

In einer späteren Arbeit wird eine Anwendung auf eine Klasse von Folgen linearer positiver Operatoren L_n gegeben, die verschiedene bekannte Beispiele enthält. Sie wird definiert mit Hilfe von $(L_n f)(x)$ darstellenden "singulären" Reihen bzw. Integralen, deren Kerne durch eine Differentialgleichung bezüglich der reellen Variablen x erklärt sind. Es ergibt sich hierfür eine Konvergenzaussage für die gleichzeitige Approximation höherer Ableitungen bei Funktionen mit gewissen Wachstumsbedingungen.

2. In der Formulierung und im Beweis des nachstehenden Satzes werden noch die folgenden Bezeichnungen außer den in Abschnitt 1 angegebenen verwendet. Der lineare Raum der Funktionen $f \in M^0(A)$, für die $L_{nx_0}^{(m)} f$ definiert ist, sei mit $M^{(m)}(A)$ bezeichnet. Die Folge $\{L_{nx_0}^{(m,\cdot)}\}$ von Funktionalen wird eingeführt durch

$$L_{nx_0}^{(m,\cdot)} f := L_{nx_0}^{(m)} [(\cdot - x_0)^m f]$$

für $f \in M^{(m,\cdot)}(A)$, d.h. für alle $f \in M^0(A)$, für welche die rechte Seite definiert ist. Schließlich wird mit $\|L_{nx_0}^{(m,\cdot)}\|_b$ die Norm der Restriktion von $L_{nx_0}^{(m,\cdot)}$ auf den mit der sup-Norm versehenen Raum $M_b^{(m,\cdot)}(A)$ der in A beschränkten Funktionen $\in M^{(m,\cdot)}(A)$ bezeichnet.

Die Funktionen e_g $(j = 0, 1, \ldots)$ werden definiert durch

$$e_j(t) := t^j, \; t \in A.$$

Für $\delta > 0$ werden die Funktionen λ_δ, k_δ definiert durch

$$\lambda_\delta(x, t) = 1 \text{ für } |t - x| < \delta, \qquad \lambda_\delta(x, t) = 0 \text{ für } |t - x| \geqq \delta,$$

$$k_\varepsilon(x, t) = 0 \text{ für } |t - x| < \delta, \qquad k_\delta(x, t) = 1 \text{ für } |t - x| \geqq \delta,$$

wobei $(x, t) \in A \times A$.

D e f i n i t i o n. *Für ein $x_0 \in A^* \subseteq R$ wird die Folge $\{L_{nx_0}\}$ linearer Funktionale $L_{nx_0}: M^0(A) \to R$ als eine Folge linearer asymptotisch positiver Funktionale bezeichnet, wenn folgendes gilt. Mit $f \in M^0(A)$ ist für jedes $\delta < 0$ auch $k_\delta(x_0, \cdot) f \in M_0(A)$; für jedes $\delta > 0$ existiert ein Index $n_0(\delta)$ so, daß das durch*

$$L_{nx_0}^\delta f := L_{nx_0}(k_\delta(x_0, .) f), \; f \in M^0(A),$$

definierte Funktional $L_{nx_0}^\delta$ für $n \geqq n_0$ ein positives Funktional ist.

SATZ. *Es sei x_0 ein innerer Punkt der Mengen A^* und A mit $A^* \subseteq A \subseteq R$, $\{L_n\}$ eine Folge linearer Operatoren $L_n: M^0(A) \to M(A^*)$ und m eine natürliche Zahl. Für die Testfunktionen $e_j \in M^{(m)}(A)$ $(j = 0, 1, \ldots, m + 2)$ gelte*

$$L_{nx_0}^{(m)} e_j \to \left.\frac{d^m t^j}{dt^m}\right|_{t = x_0} \qquad (n \to \infty). \tag{1}$$

$\{L_{nx_0}^{(m,\cdot)}\}$ sei eine Folge linearer asymptotisch positiver Funktionale mit

$$\sup_n \|L_{nx_0}^{(m,\cdot)}\|_b < \infty. \tag{2}$$

Die Funktion $f \in M^{(m)}(A)$ besitze in x_0 eine m-te Ableitung $f^{(m)}(x_0)$. Dazu existiere eine Funktion $h: R_+ \to R_+$, die in jeder endlichen Teilmenge von R_+ beschränkt ist, mit $h(s)/s \to \infty$ $(s \to \infty)$ und $h(|f|) \in M^{(m,\cdot)}(A)$ für die

$$\overline{\lim_n} \; L_{nx_0}^{(m,\cdot)} h(|f|) < \infty \tag{h^*}$$

gilt. Dann konvergiert

$$L_{nx_0}^{(m)} f \to f^{(m)}(x_0) \qquad (n \to \infty).$$

Bemerkung 1. Für verschiedene Anwendungen ist die folgende Verallgemeinerung des Satzes nützlich. Statt der Testfunktionen e_j werden in (1) die Potenzen α^j einer Funktion $\alpha: A \to R$ verwendet mit

$$a_{\varepsilon_0} := \inf\{|\alpha(t) - \alpha(x_0)| : t \in A, \; |t - x_0| \geqq \delta\} > 0 \quad (\mathrm{d} > 0)$$

und in (2) und (h^*) statt der Funktionale $L_{nx_0}^{(m,\cdot)}$ auf $M^{(m,\cdot)}(A)$ die Funktionale $L_{nx_0}^{(m,\alpha)}$ auf $M^{(m,\alpha)}(A)$ mit

$$L_{nx_0}^{(m,\alpha)} f := L_{nx_0}^{(m)} [(\alpha - \alpha(x_0))^m f].$$

Bemerkung 2. Der nachstehend gegebene Beweis läßt sich übertragen auf den Fall, daß in einem abgeschlossenen endlichen Teilintervall von A gleichmäßige Konvergenz oder auch Konvergenz bezüglich gewisser Halbnormen von $L_n^{(m)} f$ gegen $f^{(m)}$ vorliegt (s. [6], S. 62f). Unter anderen Voraussetzungen über die Operatoren L_n wurde das Problem der gleichmäßigen Konvergenz und auch der Konvergenz in einer Hausdorff-Metrik von BL. SENDOV, V. POPOV [4] behandelt. Deren Resultat und der obige Satz stellen jeweils Antworten auf die Frage nach Sätzen Korowkinschen Typs für die höheren Ableitungen von Funktionen dar, die von M. W. MÜLLER auf dem Kolloquium über Approximationstheorie der Funktionen in Cluj (Sept. 1967) gestellt worden ist.

Beim Beweis des Satzes wird zur Erfassung der Unbeschränktheit von f der folgende Hilfssatz verwendet.

Hilfssatz. *Gegeben sei eine Funktion* $h: R_+ \to R_+$ *mit* $h(s)/s \to \infty (s \to \infty)$. *Zu einem beliebigen* $\varepsilon > 0$ *gibt es dann eine Zahl* $K(\varepsilon) \geqq 0$ *so, daß*

$$|z| \leqq K(\varepsilon) + \varepsilon h(|z|) \tag{3}$$

fur jede reelle (oder auch komplexe) Zahl z gilt, z.B.

$$K(\varepsilon) = \sup\left\{s \in R_+ : \frac{h(s)}{s} < \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Beweis. Wegen $h(s)/s \to \infty$ $(s \to \infty)$ kann man zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $K(\varepsilon) \geqq 0$ so wählen, daß

$$h(s) \geqq \frac{1}{\varepsilon} s \quad \text{für } s > K$$

gilt — insbesondere so wie im Hilfssatz angegeben, —, und erhält für dieses K die Beziehung (3) durch die Fallunterscheidung $|z| \leqq K$, $|z| > K$. ┘

Im folgenden wird der oben formulierte Satz in der durch die Bemerkung 1 gegebenen Verallgemeinerung bewiesen.

Beweis des Satzes mit Bemerkung 1. Verwendet wird die Zerlegung

$$f(t) = f_m(x_0, t) + \rho_m(x_0, t)(\alpha(t) - \alpha(x_0))^m, \quad t \in A \tag{4}$$

mit

$$f_m(x_0, t) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x_0)(\alpha(t) - \alpha(x_0))^j$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_j(x_0)\alpha(t)^j,$$

$$\rho_m(x_0, t) \to 0 \qquad \text{für } t \to x_0.$$

Diese Zerlegung ergibt sich für $m = 1$ fast unmittelbar. Für $m > 1$ erhält man sie folgendermaßen: Wegen der Existenz von $\alpha''(x_0)$ existiert α' in einer Umgebung von x_0 und ist in x_0 stetig und somit — wegen $\alpha'(x_0) > 0$ (dies o.B.d.A.) — in einer Umgebung von x_0 positiv; es existiert also in einer Umgebung von x_0 die Umkehrfunktion von α; mit ihrer Hilfe und der entsprechenden Zerlegungsformel für $t - x_0$ statt $\alpha(t) - \alpha(x_0)$ ergibt sich dann leicht das gewünschte Resultat.

Es ist

$$f^{(m)}(x_0) = \left.\frac{\partial^m f_m(x_0, t)}{\partial t^m}\right|_{t=x_0}, \tag{5}$$

da beide Seiten existieren und somit auch

$$\left.\frac{\partial^m [\rho_m(x_0, t)(\alpha(t) - \alpha(x_0))^m]}{\partial t^m}\right|_{t=x_0}$$

existiert und deshalb mit

$$\lim_{t \to x_0} \frac{\rho_m(x_0, t)(\alpha(t) - \alpha(x_0))^m}{(t - x_0)^m} = 0$$

übereinstim mt.

Aus (1), (4) und (5) folgt, daß es zum Nachweis der Behauptung des Satzes genügt,

$$L_{nx_0}^{(m,\alpha)} \rho_m(x_0, \cdot) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

zu zeigen. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 ex istieren ein offenes Interval $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset A^*$ und eine Konstante $K^* < \infty$ mit

$$\lambda_{\delta^*}(x_0, t)\, |f(t)| \leqq K^*, \ t \in A.$$

Es wird nun zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta^*)$ mit

$$|\rho_m(x_0, t)| < \varepsilon \text{ für } t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

und die Darstellung

$$\rho_m(x_0, \cdot) = G_1 + G_2 + G_3$$

mit

$$G_1 = \lambda_\delta(x_0, \cdot)\rho_m(x_0, \cdot),$$

$$G_2 = k_\delta(x_0, \cdot)(\alpha - \alpha(x_0))^{-m} f,$$

$$G_3 = -k_\delta(x_0, \cdot)(\alpha - \alpha(x_0))^{-m} f_m(x_0, \cdot)$$

gewählt. Man erhält zunächst

$$|L_{nx_0}^{(m,\alpha)} G_1| \leqq \|L_{nx_0}^{(m,\alpha)}\|_b \sup_{t \in A} |G_1(t)|$$

$$\leqq \varepsilon \sup_k \|L_{kx_0}^{(m,\alpha)}\|_b \text{ für alle } n.$$

Mit $K(\varepsilon)$ wie im Hilfssatz ergibt sich

$$|G_2| \leqq a_{\delta_0}^{-m} K(\varepsilon) k_\delta(x_0, \cdot) + \varepsilon k_\delta(x_0, \cdot)|\alpha - \alpha(x_0)|^{-m} h(|f|)$$

$$= a_{\delta_0}^{-m} K(\varepsilon) k_\delta(x_0, \cdot) + \varepsilon(k_\delta(x_0, \cdot) - k_{\delta^*}(x_0, \cdot))|\alpha - \alpha(x_0)|^{-m} h(|f|) +$$

$$+ \varepsilon k_{\delta^*}(x_0, \cdot)|\alpha - \alpha(x_0)|^{-m} h(|f|) \leqq$$

$$\leqq (K(\varepsilon) + \varepsilon H^*) a_{\delta_0}^{-m} k_\delta(x_0, \cdot) + \varepsilon a_{\delta^* 0}^{-m} k_{\delta^*}(x_0, \cdot) h(|f|)$$

mit $H^* := \sup\{h(s) : 0 \leqq s \leqq K^*\}$.

Ferner existiert ein $K^{**} < \infty$ mit

$$|G_3| \leqq K^{**} k_\delta(x_0, \cdot).$$

Aufgrund der Linearität und asymptotischen Positivität von $L_{nx_0}^{(m,\alpha)}$ ist

$$|L_{nx_0}^{(m,\alpha)}(G_2 + G_3)| \leqq [(K(\varepsilon) + \varepsilon H^*)a_{\delta_0}^{-m} + K^{**}]L_{nx_0}^{(m,\alpha)}k_\delta(x_0, \cdot) + a_{\delta^*_0}^{-m}\varepsilon L_{nx_0}^{(m,\alpha)}[k_{\delta^*}(x_0, \cdot)h(|f|)] \tag{6}$$

für hinreichend große Indizes n.

Bei der Abschätzung des ersten Summanden der rechten Seite von (6) wählt man ein so kleines offenes Intervall

$$(x_0 - \delta', x_0 + \delta') \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \text{ daß}$$

$$(\alpha - \alpha(x_0))^2 \leqq \varepsilon \overline{K}^{-1} \text{ in } (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \tag{7}$$

gilt mit

$$\overline{K} = a_{\delta_0}^{-2}[(K(\varepsilon) + \varepsilon H^*)a_{\delta_0}^{-m} + K^{**}].$$

Man beachtet

$$k_\delta(x_0, \cdot) \leqq a_{\delta_0}^{-2}k_\delta(x_0, \cdot)(\alpha - \alpha(x_0))^2 \leqq a_{\delta_0}^{-2}k_\delta(x_0, \cdot)(\alpha - \alpha(x_0))^2$$

und erhält aufgrund der Linearität und asymptotischen Positivität von $L_{nx_0}^{(m,\alpha)}$ einen Index $n_1(\delta')$ so, daß für $n \geqq n_1(\delta')$ gilt

$$L_{nx_0}^{(m,\alpha)} k_\delta(x_0, \cdot) \leqq a_{\delta_0}^{-2}L_{nx_0}^{(m,\alpha)}[k_\delta(x_0, \cdot)(\alpha - \alpha(x_0))^2]$$
$$= a_{\delta_0}^{-2}L_{nx_0}^{(m,\alpha)}(\alpha - \alpha(x_0))^2 - a_{\delta_0}^{-2}L_{nx_0}^{(m,\alpha)}[\lambda_\delta(x_0 \cdot)(\alpha - \alpha(x_0))^2]$$

Wegen der Konvergenz $L_{nx_0}^{(m,\alpha)}(\alpha - \alpha(x_0))^2] \to 0$ $(n \to \infty)$ und wegen (7) existiert ein Index $n_2 \geqq n_1(\delta')$ mit

$$[(K(\varepsilon) + \varepsilon H^*)a_{\delta_0}^{-m} + K^{**}]|L_{nx_0}^{(m,\alpha)}k_\delta(x_0, \cdot)| \leqq 2\varepsilon \sup_k \|L_{hx_0}^{(m,\alpha)}\|_b$$

für alle $n \geqq n_2$.

Bei der Abschätzung des zweiten Summanden der rechten Seite von (6) ergibt sich

$$a_{\delta^*_0}^{-m}\varepsilon L_{nx_0}^{(m,\alpha)}[k_{\delta^*}(x_0, \cdot)h(|f|)]$$
$$\leqq a_{\delta^*_0}^{-m}\varepsilon L_{nx_0}^{(m,\alpha)}h(|f|) - a_{\delta^*_0}^{-m}\varepsilon L_{nx_0}^{(m,\alpha)}[\lambda_{\delta^*}(x_0, \cdot)h(|f|)]$$
$$\leqq a_{\delta^*_0}^{-m}\varepsilon[1 + \overline{\lim_k} L_{kx_0}^{(m,\alpha)}h(|f|) + H^* \sup_k \|L_{nx_0}^{(m,\alpha)}]_b]$$

für genügend große Indizes n.

Insgesamt ist also $L_{nx_0}^{(m,\alpha)} \rho_m(x_0, \cdot)$ für hinreichend große n durch ein von n und ε unabhängiges Vielfaches von ε abgeschätzt und damit der Satz bewiesen. ┘

Diese Arbeit ist ein Teil der Habilitationsschrift des Verfassers.

LITERATUR

[1] Bohman, H., *On approximation of continuous and of analytic functions*. Ark. Mat. 2, 43–57 (1952).

[2] Korowkin, P. P., *Linear Operators and Approximation Theory*. Delhi 1960.

[3] Popoviciu, T., *Ein neuer Beweis des Satzes von Weierstraß mit Interpolationspolynomen* [Rumänisch, franz. und russ. Zusammenfassung]. Acad. R.P.R., Lucrările sesiunii generale ştiinţifice 1–4 (1950).

[4] Sendov, Bl, *und* Popov, V., *Über die Konvergenz der Ableitungen linearer positiver Operatoren* [Russisch]. C.R. Acad. Bulg. Sci. 22, 507–509 (1969).

[5] Walk, H., *Approximation durch Folgen linearer positiver Operatoren*. Arch. Math. 20, 398–404 (1969).

[6] — *Approximation unbeschränkter Funktionen durch lineare positive Operatoren*. Habilitationsschrift Stuttgart (1970), 110 S.

Eingegangen am 30. X. 1974.

Mathematisches Institut A der Universitat Stuttgart, Bundesrepublik Deutschland
7000 Stuttgart 1
Herdweg 23, Postfach 560