MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, N° 1, 1977, pp. 23—29

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ДИРИХЛЕ

К. КАЛИК
(Клуж—Напока)

В данной работе изучается применимость метода конечных элементов к задачам Дирихле следующих типов:

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+p(u)=f,\qquad x\in\Omega \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

где $\Omega\subset R^2$ является ограниченной областью, граница которой $\partial\Omega$ есть ломаная линия. В работе [1] доказано, что для любого элемента $f\in[\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega)]^*$ задача Дирихле (1)—(2) имеет одно обобщенное решение, если функция p удовлетворяет следующим двум условиям: $p\in C(R)$ и $p(t)\cdot t\geqslant 0$, $\forall t\in R$. Значит, при этих условиях существует функция $u_0\in\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega)$, для которой имеем

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\int_\Omega p(u_0)\cdot v\,dx=\int_\Omega f\cdot v\,dx,\quad\forall v\in\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega) \tag{3}$$

Чтобы применить метод конечных элементов к задаче (1)—(2), сделаем еще некоторые дополнительные предположения. Предполагаем, что p является также монотонной функцией, что обеспечивает единственность решения задачи (1)—(2). В дополнение считаем, что $p\in C^1(R)$ и $f\in L^\infty(\Omega)$. Эти условия обеспечивают принадлежность решения u_0 к $C(\overline{\Omega})$. Для удобства считаем также $p\geqslant 2$.

I. Пусть $\mathscr{H} = [0, 1) \times [0, 1)$. К каждой $h \in \mathscr{H}$ относим триангуляцию $\mathscr{T}_h$ области $\overline{\Omega}$. Так как это принято вообще сделаем следующие ограничения относительно триангуляции $\mathscr{T}_h$:

1. Для каждой пары $T_1, T_2 \in \mathscr{T}_h$ имеем, или $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, или $T_1 \cap T_2$ является общей вершиной треугольников T_1 и T_2, или $T_1 \cap T_2$ является общей стороной треугольников.

2. Имеется $d(T) \leqslant |h|$ для любого $T \subset \mathscr{T}_h$, где $d(\lambda)$ означает диагональ треугольника T.

3. Имеют место равенства $\lim\limits_{h \to 0} \max\limits_{T \in \mathscr{T}_h} d(\lambda) = 0$ и $\overline{\lim} \max\limits_{T \in \mathscr{T}_h} \frac{d(T)}{r(T)} = 0$, где $r(T)$ является радиусом вписанной окружности в T.

Применяем следующие обозначения: $\mathfrak{X}_h$ — множество вершин треугольников из $\mathscr{T}_h$, принадлежащих к Ω; $\partial\mathfrak{X}_h$ — множестов вершин треугольников, принадлежащих к $\partial\Omega$; $\overline{\mathfrak{X}}_h = \mathfrak{X}_h \cup \partial\mathfrak{X}_h$; Пусть также Q_T есть любая фиксированная точка треугольника T.

Для каждой точки $P \in \mathfrak{X}_h$ выбираем функцию $w_{hP}: \overline{\Omega} \to R$ которая удовлетворяет следующим условиям:

i. $w_{hP}(P) = 1$

ii. $w_{hP}(M) = 0, \ \forall \ M \in \overline{\mathfrak{X}}_h - \{P\}$

iii. Функция w_{hP} над любым треугольником T является полиномом порядка $\leqslant 1$.

Ясно что $w_{hP} \in \overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1_p\,(\Omega)$

Обозначаем через V_h линейную оболочку функций w_{hP}. V_h является конечномерным подпространством в $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1_p(\Omega)$. Пусть

$$\sigma_h(u) = \sum_{T \in T_h} u(Q_T) \cdot |T|$$

где $|T|$ обозначает меру треугольника T.

Лема 1. *Существует постоянная $C > 0$ такая чтобы имели*

$$\|v_h - \tilde{v}_h\|_{L^p} \leqslant 2^{\frac{1}{q}} |h| \cdot \|v_h\|_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1_p}, \ \forall v_h \in V_h, \ \forall \ h \in \mathscr{H} \tag{4}$$

где $\tilde{v}_h(x) = v_h(Q_T), \ \forall x \in T$.

Доказательство. Пусть $x \in T$. Применяем функцию $\varphi(\lambda) = v_h(Q_T + \lambda(x - Q_T)), \ \lambda \in [0, 1]$. Тогда имеем $\varphi'(\lambda) = Dv_h(Q_T + \lambda(x - Q_T)) \cdot (x - Q_T)$ где Dv_h обозначает градиент функции v_h. Так как v_h является полиномом порядка $\leqslant 1$ над T, следует, что $Dv_h(Q_h + \lambda(x - Q_T)) = Dv_h(x), \ \ \forall \ x \in T, \ \ \forall \ \lambda \in [0, \ 1]$. Таким образом можем

писать $v_h(x) - v_h(Q_T) = \varphi'(\lambda_0) = Dv_h(Q_T + \lambda(x - Q_T)) \cdot (x - Q_T) = Dv_h(x) \cdot (x - Q_T)$. Отсюда следует

$$|v_h(x) - v_h(Q_T)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - Q_{T,i}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{q}} \cdot |h| \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$|v_h(x) - v_h(Q_T)|^p \leqslant 2^{\frac{p}{q}} \cdot |h|^q \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_i}\right|^p$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Omega} |v_h(x) - \tilde{v}_h(x)|^p dx = \sum_{T \in \mathscr{T}_h} \int_T |v_h(x) - v_h(Q_T)|^p dx \leqslant 2^{\frac{p}{q}} \cdot |h|^p \cdot \sum_{T \in \mathscr{T}_h} \int_T \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_i}\right|^p dx =$$

$$= 2^{\frac{p}{q}} |h|^p \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial v_h(x)}{\partial x_i}\right|^p dx = 2^{\frac{p}{q}} \cdot |h|^p \cdot \|v_h\|^p_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1_p}$$

Полученное неравенство и доказывает лемму.

Обозначаем

$$P(r) = \int_0^r p(t)dt$$

Лемма 2. *Пусть $\{h\} \subset \mathscr{H}$ является последовательностью стремящеюся к 0. Если последовательность $\{v_h\}$, где $v_h \in V_h$, удовлетворяет следующим условиям:*

i. $\|v_h\|_{\mathscr{H}^1_p} \leqslant M, \ \forall \ h$

ii. $\|v_h\|_{L\ \infty} \leqslant M, \ \forall \ h$

iii. $v_h(x) \to v(x)$ *почти в каждой* $x \in \Omega$, *тогда имеем*

$$\lim_{h \to 0} \sigma_h(P\,(v_h)) = \int_{\Omega} P(v(x))dx$$

Доказательство. Замечаем что

$$\sigma_h(P(v_h)) = \sum_{T \in \mathscr{T}_h} P(v_h(Q_T)) \cdot |T| = \sum_{T \in \mathscr{T}_h} \int_T P(v_h(Q_T))dx = \int_{\Omega} P(\tilde{v}_h(x))dx$$

и что

(*)
$$\left|\int_{\Omega} [P(v(x)) - P(\tilde{v}_h(x))]dx\right| \leqslant \left|\int_{\Omega} [Pv(x)) - P(v_h(x))]dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{\Omega} [P(v_h(x)) - P(\tilde{v}_h(x))]dx\right.$$

a. Условие iii показывает что $P(v_h(x)) \to P(v(x))$ почти в каждой $x \in \Omega$. Из ii следует что $|P(v_h(x))| \leqslant C$. На основе теоремы Лебега следует, что $P(v) \in L^1(\Omega)$ и что

$$\int\limits_{\Omega} P(v_h(x))dx \to \int\limits_{\Omega} P(v(x))dx$$

B. При помощи теоремы конечных приращений и условия ii имеем

$$|P(v_h(x)) - P(\tilde{v}_h(x))| \leqslant \sup |P'(r)| \cdot |v_h(x) - \tilde{v}_h(x)| = c|v_h(x) - \tilde{v}_h(x)|$$

Отсюда вместе с (4) получаем

$$\int\limits_{\Omega} |P(v_h(x)) - P(\tilde{v}_h(x))|dx \leqslant C \int\limits_{\Omega} |v_h(x) - \tilde{v}_h(x)|dx \leqslant C|\Omega|^{\frac{1}{q}} \|v_h - v_h\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant C|\Omega|^{\frac{1}{q}} 2^{\frac{1}{q}} \|v_h\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} |h| \leqslant C|h|$$

где применялось и условие i.

Наконец, при помощи установленного в a и b, из $*$ следует утверждение леммы.

II. Возвратимся к задаче Дирихле (1)—(2). Мы преполагали, что решение u_0 этой задачи принадлежит к $C(\Omega)$. Следовательно существует постоянная $M > 0$, такая что $|u(x)| \leqslant M$, $\forall x \in \Omega$. Для определения приближенных решений дадачи (1)—(2) введем следующие выпуклые закрытые подмножества из $\mathring{\mathcal{H}}^1_p$ (Ω):

$$K_h = \{v_h \in V_h | |v_h(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in \overline{\Omega}\}$$

Пусть

$$r_h : \mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega) \to K_h$$

является проектором пространства $\mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega)$ над K_h,, то есть $r_h v$ есть элемент наилучшего приближения функции v из K_h.

Рассмотрим функционал

$$J_h(v_h) = \frac{1}{p}\|v_h\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} + \sigma_h(P(v_h)) - (r_h f, v_h), \qquad v_h \in K_h$$

ТЕОРЕМА 1. Для любой $h \in \mathcal{H}$, функционал J_h имеет одну единственную глобальную минимальную точку u_h в K_h.

Доказательство. Имея в виду что K_h является выпуклым и замкнутым подмножеством в $\mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega)$, достаточно доказать что J_h является слабо полунепрерывным снизу, строго выпуклым и коэрцивным функционалом.

Функционал $v \mapsto \frac{1}{p}\|v\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p}$, рассматриваемый над $\mathring{\mathcal{H}}^1_p$ (Ω) является строго выпуклым и Гато-дифференцируемым. Значит он слабо полунепрерывный снизу.

О функции p предполагали, что она монотонна. Тогда P является выпуклой. Отсюда следует, что функционал $\sigma_h(P(v_h))$, $v_h \in K_h$ является также выпуклый.

Показываем, что $\sigma_h(P(v_h))$ является слабо полунепрерывным снизу. Если бы это было не так, тогда существовала бы последовательность $v_h^{(n)} \xrightarrow{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} v_h$ такая, чтобы иметь $\sigma_h(P(v_h)) > \lim \sigma_h(P(v_h^{(n)}))$. Но на основе теорем вложения Соболева имеем $v_h^{(n)} \xrightarrow{L^p} v_h$. А это означает, что существует по крайней мере подпоследовательность $\{v_h^{(n')}\}$ такая, чтобы имели $v_h^{(n')}(x) \to v_h(x)$ почти для каждой $x \in \Omega$. Для этой подпоследовательности условия леммы 2 выполнены. Значит имеем $\sigma_h(P(v_h^{(n')})) \to \sigma_h(P(v_h))$, что противоречит неравенству $\sigma_h(P(v_h)) > \lim \sigma_h(P(v_h^{(n')}))$.

Что касается функционала $(r_h f, v_h)$, он линейный и ограниченный:

$$|(r_h f, v_h)| = \left|\int\limits_{\Omega} r_h f \cdot v_h dx\right| \leqslant C\|v_h\|_{L^p} \leqslant C\|v_h\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \qquad (*)$$

До сих пор мы показали, что J_h есть строго выпуклый и слабо полунепрерывный снизу функционал. Осталось еще показать, что он коэрцивен. Из $p(t) \cdot t \geqslant 0$, $\forall t \in R$ следует, что $P(r) \geqslant 0$, $\forall r \in R$ Значит $\sigma_h(P(v_h)) \geqslant 0$, $\forall v_h \in V_h$. Имея это в виду и также неравенство (*), можем писать:

$$\frac{1}{p}\|v_h\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} - c\|v_h\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \leqslant J_h(v_h), \quad \forall v_h \in K_h.$$

Отсюда следует, что $J_h(v_h) \to +\infty$, если $\|v_h\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \to +\infty$. Таким образом теорема 1 доказана.

Единственный элемент u_h из K_h, выбранный при помощи теоремы 1, считается приближенным решением задачи Дирихле (1)—(2). Ниже доказываем, что u_h стремится, в определенном смысле, к точному решению u_0 задачи (1)—(2).

Лемма 3. *Существует постоянная* $C > 0$, *такая чтобы имело место неравенство*

$$\|u_h\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \leqslant C, \quad \forall h \in \mathcal{H} \qquad (5)$$

Доказательство. a Сначала докажем, что $J_h(u_h) \leqslant C$, $\forall h \in \mathcal{H}$. Пусть $\tilde{v} \in \mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ любой фисированный] элемент. На основе теоремы 1 имеем $J_h(u_h) \leqslant J_h(r_h \tilde{v})$. Значит, достаточно показать, что

$J_h(r_h\tilde{v}) \leqslant C,\ \forall h \in \mathcal{H}$. Но $\frac{1}{p}\,\|r_h\,\tilde{v}\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \leqslant \frac{1}{p}\,\|\tilde{v}\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p}$ и $|(r_h f,\ r_h\tilde{v})| \leqslant C\|r_h\tilde{v}\|_{L^p} \leqslant$ $\leqslant C\|r_h\tilde{v}\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \leqslant C\|\tilde{v}\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p}$ Неравенство $|\sigma_h(P(r_h\tilde{v})| \leqslant C$ следует из леммы 2, если заметим, что любая последовательность формы $\{r_h\ \tilde{v}\}$ удовлетворяет условиям этой леммы. Тогда имеем $J_h(r_h\tilde{v}) \leqslant C, \forall h \in \mathcal{H}$.

в. Как уже было замечено, мы имеем $\sigma_h(P(v_h)) \geqslant 0, \forall\, h \in \mathcal{H}$. Но тогда

$$\frac{1}{p}\,\|v_h\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} - C\|u_h\|_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \leqslant J_h(u_h) \leqslant J_h(r_h\ \tilde{v}) \leqslant C$$

Отсюда и следует неравенство (5). Тем самым лемма доказана.

Пусть $\{h_n\} \subset \mathcal{H}$ такая последовательность, для которой имеем $h_n \to 0$. Обозначим $u_{h_n} = u_n$. Из (5) следует что $\{u_n\}$ содержит подпоследовательность слабо сходящуюся в $\mathring{\mathcal{H}}^1_p$. Обозначим эту подпоследовательность через $\{u_{n'}\}$ и через $u \in \mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega)$ её предел. То есть имеем $u_{n'} \xrightarrow{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} u$. Имея в виду, что $u_{n'} \xrightarrow{L^p} u$ можем утверждать, что $\{u_{n'}\}$ содержит подпоследовательность, которую для краткости обознаеаем также $\{u_{n'}\}$, и для которой имеем $u_{n'}(x) \to u(x)$ почти в каждой $x \in \Omega$. Если к тому же заметим, что $|u_{n'}(x)| \leqslant M$, то все условия леммы 2 налицо, и тем самым доказана следующая

Лемма 4. Для любой последовательности $\{u_h\}$ приближенных решений задачи (1)—(2), для которой $h \to 0$, существует подпоследовательность $\{u_{h'}\}$, слабо сходящаяся в $\mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega)$ к некоторой функции u для которой имеем

$$\lim_{h' \to 0} \sigma_{h'}(P(u_{h'})) = \int_\Omega P(u(x))dx$$

ТЕОРЕМА 2. Любая последовательности $\{u_n\}$ приближенных решений задачи (1)—(2) сходится слабо в $\mathring{\mathcal{H}}^1_p$ к единственному обобщенному режению u_0 задачи Дрихле (1)—(2).

Доказательство. Введём функционал

$$J(v) = \frac{1}{p}\,\|v\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} + \int_\Omega P(v(x))dx - \int_\Omega f \cdot v dx, \quad v \in \mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega)$$

Не трудно заметить, что J, также как и J_h, является строго выпуклым, слабо полунепрерывным снизу и коэрцивным. Пусь

$$K = \left\{v \in \mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega) \mid\ |v(x)| \leqslant M,\ \forall x \in \overline{\Omega}\right\}$$

Тогда, как известно, решение u_0 задачи Дирихле (1)—(2) есть в то же время единственная глобальная минимальная точка функционала J над K.

На основе леммы 4 существует такая подпоследовательность $\{u_{h'}\}$ и такая функция $u \in \mathring{\mathcal{H}}^1_p(\Omega)$, для которых имеем $u_{h'} \xrightarrow{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} u$ и

$$\sigma_{h'}(P(u_{h'})) \to \int_\Omega P(u(x))dx$$

Имея также в виду, что

$$\frac{1}{p}\,\|u\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p} \leqslant \underline{\lim}\ \frac{1}{p}\,\|u_{h'}\|^p_{\mathring{\mathcal{H}}^1_p}$$

и

$$\int_\Omega p_{h'} f \cdot u_{h'}\, dx \to \int_\Omega f \cdot u dx$$

получаем неравенство

$$J(u) \leqslant \underline{\lim}\ J_{h'}(u_{h'})$$

Но в то же время, для любой $v \in K$ имеем $J_{h'}(u_{h'}) \leqslant J_{h'}(r_{h'},\ v)$. Отсюда следует, что

$$J(u) \leqslant \underline{\lim}\ J_{h'}(r_{h'}\ v),\ \forall\ v \in K$$

Но, повторяя обычные рассуждения, получаем что $\{r_{h'} v\}$ содержит подпоследовательность, которую для краткости обозначаем тоже через $\{r_{h'}\ v\}$, и для которой имеем $J_{h'}(r_{h'} v) \to J(v)$. Тем самым получено $J(u) \leqslant J(v)$, $\forall v \in K$. Следовательно, u является точкой глобального минимума функционала J. Итак $u = u_0$.

Имея в виду единственность функции u_0, обычным путём следует, что не только подпоследовательность $\{u_{h'}\}$, но также вся последовательность $\{u_{h'}\}$ сходится к u_0. Этим теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Hess, P., *A Strongly Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem*, J. of Math. Anal. and Appl. **43**, 241—249 (1973)

Поступило 20. XII. 1976.