

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION

Tome 6, N° 1, 1977, pp. 57—80

NOTIONS DE CONVERGENCE DANS UN CLAN ET  
TOPOLOGIES DÉFINIES PAR ELLES

par

ANDREI NEY

(Cluj-Napoca)

*Le présent travail a comme point de départ les travaux [11, 12, 13] de l'auteur, desquels on reprend et on généralise quelques notions, puis on développe leur conséquences conformément aux six paragraphes suivants.*

§ 1. La „limite analytique” dans un clan

*Définition 1.1. Soit  $X$  un ensemble infini quelconque et  $(B_n)_{n \in N}$  une suite de parties de  $X$ . La suite  $(B_n)$  sera considérée descendante à  $\emptyset$  ( $\emptyset$  étant l'ensemble vide) si et seulement si  $B_n \supseteq B_{n+1}$  ( $n \in N$ ) et quelque soit  $x \in B_n$  ( $n$  nombre naturel arbitraire) existe un nombre naturel  $n_x$  (évidemment  $n_x > n$ ), tel que pour chaque  $m \in N$  et  $m > n_x$  ait lieu  $x \notin B_m$ . (Ceci signifie, qu'un élément quelconque appartenant à l'un des termes de la suite  $(B_n)$  „soit éliminé après un nombre fini de pas”.) On symbolise cette propriété par  $B \downarrow \emptyset$ .*

*Conséquence 1.1. Chaque suite partielle  $(B_{i_n})_{n \in N}$  d'une suite  $(B_n)$  descendante à  $\emptyset$ , descend aussi à  $\emptyset$ ; chaque suite de la forme  $(\bigcup_{i=1}^v B_n^{(i)})_{n \in N}$  où  $B_n^{(i)} \downarrow \emptyset$  ( $i = 1, \dots, v$ ;  $v \in N$ ) est aussi une suite descendante à  $\emptyset$ . La démonstration en est immédiate, en utilisant l'idée de „l'élimination après un nombre fini de pas”, contenue dans la définition 1.1.*

*Exemple 1.1. La suite  $(D_n^{(0,0)})_{n \in N}$  des disques concentriques donnés dans  $R^2$  par  $D_n^{(0,0)} = \left\{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n} \right\}$ ,  $n \in N$ , est descendante*

à  $\emptyset$ , tandis que la suite  $(D_n)_{n \in N}$  des disques donnés par  $D_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}\}$ ,  $n \in N$ , n'est pas descendante à  $\emptyset$  car le point  $(0, 0)$  ne s'élimine pas de  $(D)$  quelque grand que soit  $n$ .

**Définition 1.2.** Soit  $\mathcal{C}$  un clan et  $(X_n)_{n \in N}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}$ . L'élément  $X \in \mathcal{C}$  est la limite analytique de la suite  $(X_n)$  si et seulement s'il existe dans  $\mathcal{C}$  une suite  $B_n \downarrow \emptyset$  tel qu'on ait pour  $n$ , au moins à partir de  $n_0$  ( $n \geq n_0 \in N$ )

$$(1.1) \quad X_n \Delta X \subseteq B_n; \quad B_n \downarrow \emptyset$$

(où on a noté par  $X_n \Delta X$  la différence symétrique  $X_n \setminus X \cup X \setminus X_n$ ). Dans ce cas on dira que la suite  $X_n$  est (a)-convergente à  $X$  et on utilisera les notations:  $X = (a)\text{-lim } X_n$  ou  $X_n \xrightarrow{(a)} X$ .

**Proposition 1.1.** La limite analytique d'une suite (a)-convergente dans un clan est unique.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  un clan de parties de  $\mathbf{X}$ ; on suppose

$$X' = (a)\text{-lim } X_n \text{ et } X'' = (a)\text{-lim } X_n; \quad X', X'' \in \mathcal{C} \quad (n \in N)$$

mais  $X' \neq X''$ , ça veut dire qu'il existe au moins un  $x_0 \in \mathbf{X}$  tel que  $x_0 \in X' \Delta X''$ . Puisque

$$X_n \Delta X' \subseteq B'_n \downarrow \emptyset \text{ et } X_n \Delta X'' \subseteq B''_n \downarrow \emptyset$$

et aussi

$$x_0 \in X' \Delta X'' \subseteq ((X' \Delta X_n) \cup (X_n \Delta X'')) \subseteq B'_n \cup B''_n$$

mais  $(B'_n \cup B''_n) \downarrow \emptyset$  — vu la conséquence 1.1. — ce qui contredit le fait que  $x_0 \in B'_n \cup B''_n, \forall n \in N$ .

*Exemple 1.2.* Soit  $f$  une fonction réelle définie et bornée sur l'ensemble mesurable  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Soit  $(\sigma_n)$  une suite de partitions régulières de  $\Omega$ , ayant la suite de leurs paramètres décroissante à zéro ( $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = 0$ ).

Pour chaque parcellement  $\sigma_n$  on considère „l'intervalle Darboux"  $I(\sigma_n) = [\underline{S}(\sigma_n), \bar{S}(\sigma_n)]$  qui inclut toutes les sommes intégrales de Riemann attachées à  $\sigma$  ( $n \in N$ ); la suite  $(I(\sigma_n))_{n \in N}$  d'intervalles compactes sera représentée sur un axe réel  $\mathbf{R}$ . Pour l'existence de l'intégrale  $J \in \mathbf{R}$  de la fonction  $f$  sur  $\Omega$ , relativement au raffinement envisagé du parcellement de  $\Omega$ , est nécessaire et suffisant qu'il existe, dans le clan des ouverts de  $\mathbf{R}$ , une suite  $(B_n)$  descendante à  $\emptyset$ , tel que l'on ait  $I(\sigma_n) \Delta \{J\} \subseteq B_n$ .

*Observation 1.1.* Si à partir d'un certain rang, tous les termes d'une suite d'éléments d'un clan sont égaux à un même élément du clan, alors la suite sera nommée finalement constante; en particulier la suite peut être aussi finalement vide si l'élément qui figure constamment à partir d'un certain rang est  $\emptyset$ . La suite finalement constante

$$X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{v+p}, \dots \quad (X_{v+p} = X, p \in N)$$

à comme limite analytique  $X$ , car  $X_{v+p} \Delta X \subseteq \emptyset$  ( $p \in N$ ), c'est-à-dire  $(X_{v+p} \Delta X)_{p \in N}$  est majorée terme par terme, par une „suite descendante, finalement vide”.

**Proposition 1.2.** Chaque suite qui a une limite analytique dans un clan  $\mathcal{C}$ , est bornée dans ce clan.

*Démonstration.* De  $X_n \Delta X \subseteq B_n \downarrow \emptyset$  résultent  $X_n \setminus X \subseteq B_n$  et  $X \setminus X_n \subseteq B_n$ . On a  $X_n \subseteq (X_n \setminus X) \cup X \subseteq B_n \cup X$ , d'où  $X_n \subseteq X \cup B_n$ . Simultanément

$$X_n \supseteq X_n \cap X = (X_n \cup X) \setminus (X_n \Delta X) \supseteq (X_n \cup X) \setminus B_n \supseteq X \setminus B_n,$$

d'où  $X_n \supseteq X \setminus B_n$ . En conséquence

$$(1.2) \quad X \setminus B_n \subseteq X_n \subseteq X \cup B_n.$$

**Conséquence 1.2.** Si  $X = (a)\text{-lim } X_n$ , alors pour chaque suite partielle  $(X_{i_n})$  de  $(X_n)$  a lieu:  $X = (a)\text{-lim } X_{i_n}$ .

*Démonstration.* De  $X_n \Delta X \subseteq B_n \downarrow \emptyset$  résulte (en utilisant la conséquence 1.1):  $X_{i_n} \Delta X \subseteq B_{i_n} \downarrow \emptyset$ .

**Conséquence 1.3.** De  $B_n \downarrow \emptyset$  résulte  $\emptyset = (a)\text{-lim } B_n$ ; si  $\beta_n \subseteq B_n$ , alors on aura aussi  $\emptyset = (a)\text{-lim } \beta_n$ .

*Démonstration.* On a évidemment  $B_n \Delta \emptyset = B_n \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ ; et aussi  $\beta_n \Delta \emptyset \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ , ce qui confirme l'énoncé.

**Conséquence 1.4.** Si  $B_n \downarrow \emptyset$ , les suivantes relations à la limite ont lieu dans le clan  $\mathcal{C}$ :

$$(1.3) \quad (a)\text{-lim}_{p \rightarrow \infty} (B_n \setminus B_{n+p}) = B_n,$$

$$(1.4) \quad (a)\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} (B_n \setminus B_{n+p}) = \emptyset \quad (\forall p \in N),$$

$$(1.5) \quad (a)\text{-lim} (X \cup B_n) = X \quad \left. \begin{array}{l} X \text{ élément arbitraire du} \\ \text{clan } \mathcal{C}. \end{array} \right\}$$

$$(1.6) \quad (a)\text{-lim} (X \setminus B_n) = X$$

*Démonstration.* Regardant (1.3)

$$[(B_n \setminus B_{n+p}) \setminus B_n] \cup [B_n \setminus (B_n \setminus B_{n+p})] = \emptyset \cup B_{n+p} \subseteq B_{n+p} \downarrow \emptyset \quad (p \rightarrow \infty);$$

regardant (1.4)

$$[(B_n \setminus B_{n+p}) \setminus \emptyset] \cup [\emptyset \setminus (B_n \setminus B_{n+p})] = (B_n \setminus B_{n+p}) \cup \emptyset \subseteq B_n \downarrow \emptyset;$$

regardant (1.5)

$$[(X \cup B_n) \setminus X] \cup [X \setminus (X \cup B_n)] = [B_n \setminus X] \cup \emptyset \subseteq B_n \downarrow \emptyset;$$

regardant (1.6)

$$[(X \setminus B_n) \setminus X] \cup [X \setminus (X \setminus B_n)] = \emptyset \cup (X \cap B_n) \subseteq B_n \downarrow \emptyset.$$

*Observation 1.2.* On remarque que la suite  $(X \cup B_n)$  est descendante à  $X$ , tandis que la suite  $X \setminus B_n$  est ascendante à  $X$ . On a vu au cours de la démonstration de la proposition 1.2 que  $X_n \Delta X \subseteq B_n$  implique  $X \setminus B_n \subseteq X_n \subseteq X \cup B_n$ . Si on attache à ce dernier système d'inclusions le système trivial d'inclusions  $X \setminus B_n \subseteq X \subseteq X \cup B_n$ , alors de ces deux systèmes résulte

$$X_n \Delta X \subseteq (X \cup B_n) \setminus (X \setminus B_n) = B_n,$$

donc on arrive à l'équivalence

$$[X_n \Delta X \subseteq B_n] \Leftrightarrow [X \setminus B_n \subseteq X_n \subseteq X \cup B_n].$$

**Définition 1.3.**  $X^{(i)} \in \mathcal{C}$  est — au sens analytique — un point d'accumulation de la suite  $(X_n)$  d'éléments du clan  $\mathcal{C}$ , si et seulement s'il existe une suite partielle  $(X_{i_n}) \subseteq (X_n)$  telle que  $X^{(i)} = (a)\text{-lim } X_{i_n}$ . Si  $(X_n)$  a plusieurs points d'accumulation,  $\{X^{(i)}\}_{i \in I}$ , alors si existe  $\bigcup_{i \in I} X^{(i)} \in \mathcal{C}$ , on la nommera : la limite supérieure analytique de la suite  $(X_n)$  dans  $\mathcal{C}$ ; de même s'il existe  $\bigcap_{i \in I} X^{(i)} \in \mathcal{C}$ , elle sera la limite inférieure analytique de  $(X_n)$  dans  $\mathcal{C}$ .

**Conséquence 1.5.** Si (voir définition 1.3)

$$(a)\text{-lim } X_n = \bigcap_{i \in I} X^{(i)} = \bigcup_{i \in I} X^{(i)} = (a)\text{-lim } X_n \in \mathcal{C},$$

alors  $X^{(i)} = X^{(j)}$ ,  $\forall i, j \in I$  (ce qui suit immédiatement) et il existe un seul point d'accumulation, donc  $(X_n)$  a une limite analytique dans  $\mathcal{C}$ .

**THÉORÈME 1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  un clan. Les opérations binaires : la réunion  $\cup$ , la soustraction  $\setminus$ , la différence symétrique  $\Delta$ , et l'intersection  $\cap$ , qui appliquent le produit  $\mathcal{C}^2$  dans  $\mathcal{C}$ , sont séquentiellement continues au sens de la limite analytique, c'est-à-dire, que

$$(1.7) \quad X_n \Delta X \subseteq D'_n \downarrow \emptyset \text{ et } Y_n \Delta Y \subseteq D''_n \downarrow \emptyset$$

(où  $X, Y, X_n, Y_n, D'_n, D''_n \in \mathcal{C}$  pour  $n \in N$ ) impliquent :

$$(1.8) \quad X \cup Y = (a)\text{-lim } (X_n \cup Y_n),$$

$$(1.9) \quad X \setminus Y = (a)\text{-lim } (X_n \setminus Y_n),$$

$$(1.10) \quad X \Delta Y = (a)\text{-lim } (X_n \Delta Y_n),$$

$$(1.11) \quad X \cap Y = (a)\text{-lim } (X_n \cap Y_n).$$

(On mentionne, que (1.5) est un cas particulier de (1.8) et (1.3), (1.4), (1.6) sont des cas particuliers de (1.9).)

*Démonstration.* Quant aux opérations de clan ( $\cup$  et  $\setminus$ ) on utilise les inclusions ci-dessous (facilement à vérifier à l'aide de la méthode classique) :

Pour (1.8)

$$(X_n \cup Y_n) \Delta (X \cup Y) \subseteq (X_n \Delta X) \cup (Y_n \Delta Y) \subseteq D'_n \cup D''_n;$$

pour (1.9)

$$(X_n \setminus Y_n) \Delta (X \setminus Y) \subseteq (X_n \Delta X) \cup (Y_n \Delta Y) \subseteq D'_n \cup D''_n,$$

et on y applique la conséquence 1.1 et la définition 1.2. Concernant les opérations  $\Delta$  et  $\cap$  on utilise

$$\text{pour (1.10) : } X_n \Delta Y_n = (X_n \setminus Y_n) \cup (Y_n \setminus X_n)$$

et on applique (1.9) et (1.8) ;

$$\text{pour (1.11) : } X_n \cap Y_n = X_n \setminus (X_n \setminus Y_n)$$

et on applique (1.9) deux fois simultanément.

**THÉORÈME 1.2.** Si dans un clan  $(a)\text{-lim } (Y \Delta X_n) = Z$ , alors  $(a)\text{-lim } X_n = Z \Delta Y$ .

*Démonstration.* On a  $(Y \Delta X_n) \Delta Z \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ , d'où en se basant sur l'associativité et la commutativité de l'opération  $\Delta$ , on pourra écrire  $X_n \Delta (Z \Delta Y) \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ , ce qui signifie  $(a)\text{-lim } X_n = Z \Delta Y$ .

**THÉORÈME 1.3.** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{C}_X$  un clan de parties de  $X$ , de même  $\mathcal{C}_Y$  un clan de parties de  $Y$ . L'opération binaire : le produit cartésien  $\times$ , qui applique  $\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y$  dans  $X \times Y$  tel que si  $X' \in \mathcal{C}_X$  et  $Y' \in \mathcal{C}_Y$  alors

$$X' \times Y' = \{(x', y') \mid x' \in X', y' \in Y'\} \subseteq X \times Y,$$

est séquentiellement continue au sens de la limite analytique, ça veut dire, que si  $X_n \in \mathcal{C}_X$  et  $Y_n \in \mathcal{C}_Y$  pour  $n \in N$ , alors de  $X_n \xrightarrow{(a)} X \in \mathcal{C}_X$  et de  $Y_n \xrightarrow{(a)} Y \in \mathcal{C}_Y$  résulte

$$(1.12) \quad X \times Y = (a)\text{-lim } (X_n \times Y_n).$$

*Démonstration.* Vu la proposition 1.2 respectivement le système d'inclusions (1.2), les conditions à la limite, qui figurent dans l'énoncé du théorème peuvent être transcrites comme il suit

$$(1.13) \quad \begin{cases} X \setminus B'_n \subseteq X_n \subseteq X \cup B'_n; & B'_n \in \mathcal{C}_X \ (n \in N), \ B'_n \downarrow \emptyset, \\ Y \setminus B''_n \subseteq Y_n \subseteq Y \cup B''_n; & B''_n \in \mathcal{C}_Y \ (n \in N), \ B''_n \downarrow \emptyset, \end{cases}$$

d'où en effectuant le produit cartésien, résulte

$$(1.14) \quad (X \setminus B'_n) \times (Y \setminus B''_n) \subseteq X_n \times Y_n \subseteq (X \cup B'_n) \times (Y \cup B''_n).$$

Par la voie classique on prouve

$$(1.15) \quad (X \setminus Y) \setminus [(Y \times B'_n) \cup (X \times B''_n) \cup (B'_n \times B''_n)] \subseteq (X \setminus B'_n) \times (Y \setminus B''_n),$$

respectivement

$$(1.16) (X \cup B'_n) \times (Y \cup B''_n) \subseteq (X \times Y) \cup [(Y \times B'_n) \cup (X \times B''_n) \cup (B'_n \times B''_n)].$$

La réunion en crochet, qui figure dans (1.15) et dans (1.16) aussi, est le terme du rang  $n$  d'une suite descendante à  $\emptyset$ , car avec la croissance de l'indice  $n$  les suites  $(B'_n)$  et  $(B''_n)$  descendent à  $\emptyset$ , donc les trois produits cartésiens descendent aussi à  $\emptyset$  (on remarque: quelque soit un élément qui appartient à l'un de ces produits cartésiens, il sera éliminé après un nombre fini de pas — voir définition 1.1 — car sa composante prise en  $B'_n$  respectivement  $B''_n$  s'élimine après un nombre fini de pas). En notant, donc, ce crochet par  $B_n$  et en utilisant la minoration (1.15) et la majoration (1.16), pour modifier (1.14), on arrive à

$$(X \times Y) \setminus B_n \subseteq X_n \times Y_n \subseteq (X \times Y) \cup B_n, \quad B_n \downarrow \emptyset,$$

d'où, en utilisant l'observation 1.2 on arrivera à (1.12).

*Observation 1.3.* En nous basant sur le théorème 1.1 et sur les formules (1.8) et (1.9), le clan  $\mathcal{C}$ , dans lequel on a introduit la limite analytique est devenu un espace de convergence du type  $\mathcal{L}$  (Fréchet<sup>1</sup>; voir [1], [10], [14], [16]) que l'on notera par  $(\mathcal{C}, \setminus, \cup; (a)\text{-lim})$ . On verra plus loin que la dénomination „clan topologique” est aussi justifiée.

## §2. La relation entre la limite analytique et les limites classiques dans un clan

En 1935, BIRKHOFF [2] et KANTOROVITCH [9] ont défini une notion de limite pour les suites (séquences) dans un ensemble ordonné, que nous reproduisons dans ce qui suit.

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble (partiellement ou totalement) ordonné et  $(X_n)$  une suite monotone d'éléments de  $\mathfrak{X}$ . Si

1°  $(X_n)$  est croissante et existe  $\sup_{n \in N} X_n = \bigvee_{n \in N} X_n = X \in \mathfrak{X}$  alors  $X$  est considérée comme limite, au sens de l'ordre, de la suite  $(X_n)$  et l'on note  $X_n \uparrow X$ ; si

2°  $(X_n)$  est décroissante et existe  $\inf_{n \in N} X_n = \bigwedge_{n \in N} X_n = X \in \mathfrak{X}$ , alors  $X$  est considérée comme limite, au sens de l'ordre, de la suite  $(X_n)$  et l'on note  $X_n \downarrow X$ .

**Définition 2.1.** (Birkhoff-Kantorovitch). *La suite  $(X_n)$  d'éléments de l'ensemble (partiellement ou totalement) ordonné  $(\mathfrak{X}, \leq)$ , converge dans le sens de l'ordre vers  $X \in \mathfrak{X}$ , si et seulement s'il existe dans  $\mathfrak{X}$  un couple de suites monotones  $(X'_n), (X''_n)$ , tel que  $X'_n \uparrow X, X''_n \downarrow X$  et  $X'_n \leq X_n \leq X''_n$ .*

<sup>1</sup> Fréchet: Thèse. Rendiconti di Palermo 1906.

( $n \in N$ ); dans ce cas on notera  $X = (o)\text{-lim } X_n$ , c'est-à-dire  $X$  est „la limite au sens de l'ordre” de la suite  $(X_n)$ .

On mentionne, qu'un clan  $\mathcal{C}$  est un ensemble partiellement ordonné en rapport avec l'inclusion,  $(\mathcal{C}, \subseteq)$ , et qu'une suite  $(X_n)$   $(o)$ -convergente est évidemment bornée dans  $\mathcal{C}$ , car  $X'_1 \subseteq X_n \subseteq X''_1$  ( $\forall n \in N$ ). (On convient de noter  $X = (\subseteq)\text{-lim } X_n$ .)

**THÉORÈME 2.1.** *Dans un clan  $\mathcal{C}$ , la limite analytique et la limite au sens de l'ordre sont équivalentes.*

*Démonstration.* On suppose l'existence de  $(a)\text{-lim } X_n = X \in \mathcal{C}$ ; d'ici il résulte, conformément à (1.2), l'existence d'une suite descendante à  $\emptyset$ , notamment  $B_n \downarrow \emptyset$ , tel que l'on ait

$$X \setminus B_n \subseteq X_n \subseteq X \cup B_n, \quad B_n \in \mathcal{C} \quad (n \in N).$$

La suite  $(X \setminus B_n)$  est ascendante à  $X$  et la suite  $(X \cup B_n)$  est descendante à  $X$  au sens de la limite analytique — comme ceci a été démontré par (1.6) respectivement (1.5) et souligné par l'observation 1.2. On montrera que  $X = \sup_{n \in N} (X \setminus B_n) = \bigvee_{n \in N} (X \setminus B_n)$  et  $X = \inf_{n \in N} (X \cup B_n) = \bigwedge_{n \in N} (X \cup B_n)$ , conditions exigées par la définition 2.1. Évidemment  $X \supseteq X \setminus B_n$  ( $n \in N$ ); on va montrer que si  $X^* \supseteq X \setminus B_n$  ( $\forall n \in N$ ), alors  $X^* \supseteq X$ . En effet, si  $x \in X^2$  alors existe  $n_x \in N$  tel que  $n > n_x$  implique  $x \notin B_n$ , donc  $x \in X \setminus B_n$  (eventuellement à partir de  $n_x = 0$ ), puis vu l'inclusion  $X^* \supseteq X \setminus B_n$  résulte  $x \in X^*$ , donc on obtient aussi l'implication  $[x \in X] \Rightarrow [x \in X^*]$ , c'est-à-dire  $X^* \supseteq X$ . D'autre part  $X \subseteq X \cup B_n$  ( $n \in N$ ); si on suppose  $X^* \subseteq X \cup B_n$ , alors en considérant  $x \in X^*$  résulte  $x \in X \cup B_n$ , et puisque à partir d'un  $n$  suffisamment grand  $x \notin B_n$ , suivra  $x \in X$ , c'est-à-dire l'implication  $[x \in X^*] \Rightarrow [x \in X]$ . Ceci signifie:  $X = \inf_{n \in N} X_n$ ,

et ainsi la première partie de la démonstration est terminée. On part, ensuite, de la supposition, que  $X = (o)\text{-lim } X_n$ ; en conséquence existent deux suites monotones dans  $\mathcal{C}$ , tel que

$$X'_n \uparrow X \quad (X = \sup_{n \in N} X'_n) \quad \text{et} \quad X''_n \downarrow X \quad (X = \inf_{n \in N} X''_n)$$

et simultanément

$$X'_n \subseteq X_n \subseteq X''_n \quad (n \in N) \quad \text{et} \quad (\text{évidemment}) \quad X'_n \subseteq X \subseteq X''_n \quad (n \in N).$$

On montrera, premièrement que  $B'_n = (X \setminus X'_n) \downarrow \emptyset$ . ( $B'_n$ ) est visiblement descendante, mais on supposera qu'elle ne descend pas à  $\emptyset$ , c'est-à-dire qu'il existe un élément<sup>2</sup>  $x$  tel que  $x \in B'_n$  ( $n \in N$ ). Dans ce cas  $x \in X \setminus X'_n$  ( $n \in N$ ), donc  $x \in X$  et  $x \notin X'_n$  ( $n \in N$ ). En notant  $X^* = X \setminus \{x\}$ , aura lieu  $X^* \supseteq X'_n$  — parce que  $X^*$  est une majorante de la suite  $(X'_n)$  — et simultanément a lieu aussi l'inclusion stricte  $X^* \subset X$  donc  $X$  ne sera

<sup>2</sup> On remarque, que  $X$  est un élément du clan  $\mathcal{C}$  qui lui-même est une famille de parties de  $X$ . La notation  $x \in X$  veut marquer un élément constituant de  $X$  qui appartient aussi à  $X$ .

pas  $\sup_{n \in N} X'_n$ , ce qui est contraire à notre supposition initiale. Ainsi  $B'_n \downarrow \emptyset$ . (En particulier:  $X'_n \Delta X = X \setminus X'_n = B'_n \downarrow \emptyset$ , donc  $X = (a)\text{-lim } X'_n$ ). D'autre part, on va montrer que  $B''_n = (X''_n \setminus X) \downarrow \emptyset$ . Évidemment  $(B''_n)$  est descendante; on suppose qu'elle ne descende pas à  $\emptyset$ , donc qu'il existe au moins un élément  $x$ , tel que  $x \in B''_n$  ( $n \in N$ ). Alors  $x \in X''_n \setminus X$  ( $n \in N$ ) donc  $x \in X''_n$  ( $n \in N$ ) et  $x \notin X$ . En notant  $X^* = X \cup \{x\}$  on aura  $X^* = X''_n$  ( $n \in N$ ) — puisque  $X^* = X \cup \{x\} \subseteq X''_n \cup \{x\} = X''_n$  — donc  $X^*$  est une minorante de la suite  $(X''_n)$  et en même temps se réalise l'inclusion stricte  $X^* \supset X$ , contrairement au fait que  $X$  soit l'infimum de la suite  $(X''_n)$ . Donc  $B''_n \downarrow \emptyset$ . (En particulier,  $X'' \Delta X = X'' \setminus X = B''_n \downarrow \emptyset$ , c'est-à-dire  $X = (a)\text{-lim } X''_n$ ). Enfin, vu les systèmes d'inclusions:  $X'_n \subseteq X_n \subseteq X''_n$ ,  $X'_n \subseteq X \subseteq X''_n$ , on pourra écrire

$$\begin{aligned} X_n \Delta X &\subseteq X''_n \Delta X'_n \subseteq (X''_n \Delta X) \cup (X \Delta X'_n) = (X''_n \setminus X) \cup (X \setminus X'_n) = \\ &= B''_n \cup B'_n = B_n \downarrow \emptyset, \end{aligned}$$

donc  $X = (a)\text{-lim } X_n$ , C.Q.F.D.

En 1905 BOREL, [3], a introduit les notions d'ensemble limite inférieure et ensemble limite supérieure pour une suite d'ensembles; dans le cas de l'égalité entre ces deux ensembles, on arrive à la limite de la suite d'ensembles. Si  $(X_n)$  est une suite de parties d'un ensemble  $X$ , alors  $L_0$  est l'ensemble limite inférieure ou simplement: la limite inférieure de la suite  $(X_n)$  si et seulement si  $\forall x \in L_0$ ,  $x$  appartient (comme élément constituant<sup>2</sup>) à une infinité de termes de la suite  $(X_n)$  et ne manque que d'un nombre fini de termes de cette suite.  $L^0$  est l'ensemble limite supérieure (ou simplement: la limite supérieure) de la suite  $(X_n)$  si et seulement si  $\forall x \in L^0$ ,  $x$  appartient à une infinité de termes de la suite  $(X_n)$  — indifféremment du fait s'il manque simultanément d'un nombre fini ou d'une infinité de termes de la suite. Évidemment  $L_0 \subseteq L^0$ . Si  $L_0 = L^0$  alors la limite de la suite d'ensembles,  $(X_n)$ , est  $L = L_0 = L^0$ . Nous formulerons la notion de limite introduite ci-dessus par la

**Définition 2.2.** L'ensemble  $X$ , qui est une partie de l'ensemble  $X$ , sera la limite — au sens de Borel — de la suite  $(X_n)$  de parties de  $X$ , et on la notera par  $X = (b)\text{-lim } X_n$ , si et seulement s'il contient tous les éléments et seulement ces éléments qui appartiennent à une infinité de termes de la suite  $(X_n)$  en manquant tout au plus d'un nombre fini de termes de cette suite, et si — en même temps — il n'y a aucun élément de  $X$  qui appartienne à une infinité de termes de la suite  $(X_n)$  en manquant simultanément d'une autre infinité de termes de cette suite. (Ceux-ci impliquent le fait que si chaque élément constituant<sup>2</sup> ne figure que dans un nombre fini de termes de la suite, alors la limite de la suite est l'ensemble vide.)

**Observation 2.1.** En revenant à la définition 1.3. du point d'accumulation et en la formulant — mutatis mutandis — pour le cas de la limite analytique au sens de Borel, il faut souligner le fait que si une suite d'ensembles  $(X_n)$ , n'a pas de limite, mais s'il est valable  $L_0 \subset L^0$  (strictement!), alors les ensembles limites extrêmes de Borel ne sont pas nécessairement

des points d'accumulation — au sens séquentiel — pour la suite considérée. En effet si on forme la suite d'ensembles

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \dots$  (en alternant ainsi à l'infini) où  $a, b, c$  sont des éléments d'un ensemble de référence  $X$ , alors  $L_0 = \{a\}$  et  $L^0 = \{a, b, c\}$ , mais il n'existe aucune suite partielle de la suite considérée, qui ait pour (b)-limite l'ensemble  $L_0$  ou  $L^0$ . Mais la suite partielle  $\{a, b\}, \{a, b\}, \dots$  a comme (b)-limite l'ensemble  $\{a, b\}$  même, tandis que la suite partielle  $\{a, c\}, \{a, c\}, \dots$  a comme limite l'ensemble  $\{a, c\}$ ; les ensembles  $\{a, b\}$  et  $\{a, c\}$  sont les points d'accumulation de la „suite oscillante” considérée, mais ses limites extrêmes ne sont pas de points d'accumulation. On a (comparer à la définition 1.3) tout-de-même:

$$\begin{aligned} \{L_0 = \inf \{\{a, b\}, \{a, c\}\} \quad \text{et} \quad L^0 = \sup \{\{a, b\}, \{a, c\}\} \\ \{L_0 \subset \{a, b\} \subset L^0 \quad \quad \quad \text{et} \quad L_0 \subset \{a, c\} \subset L^0. \end{aligned}$$

D'autre part, si on considère „la suite oscillante” d'ensembles  $\{a\}, \{a, b\}, \{a\}, \{a, b\}, \dots$  alors  $L_0 = \{a\}$  respectivement  $L^0 = \{a, b\}$  et existent les suites partielles  $\{a\}, \{a\}, \dots$  respectivement  $\{a, b\}, \{a, b\}, \dots$  qui ont pour limite  $L_0$  respectivement  $L^0$ ; dans ce cas les limites extrêmes — au sens de Borel — sont effectivement des points d'accumulations (au sens séquentiel). La situation reste la même si on regarde les deux suites considérées du point de vue de la limite analytique.

**THÉORÈME 2.2.** Si dans le clan  $\mathcal{C}$  la suite  $(X_n)$  a comme limite analytique  $X \in \mathcal{C}$ , alors la même suite a aussi une limite au sens de Borel et on aura

$$(b)\text{-lim } X_n = (a)\text{-lim } X_n = X \in \mathcal{C}.$$

**Démonstration.** Soit  $X = (a)\text{-lim } X_n$ , c'est-à-dire  $X_n \Delta X \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ . Il faut montrer:

a)  $\forall x \in X, \exists n_x \in N$  tel que  $n > n_x \Rightarrow x \in X_n$ ,

b) il n'existe pas un élément  $x'$  tel qu'on ait à la fois

$$x' \in X_{i_n} \text{ et } x' \notin X_{j_n} \text{ où } i_n \neq j_n \text{ (} n \in N \text{),}$$

c) si  $X = \emptyset$ , alors  $\forall x \in X_n, \exists n_x \in N$  tel que  $x' \notin X_m$  si  $m > n_x$ .

**Regardant a):** si la condition envisagée n'était pas réalisée, alors il existerait une suite partielle  $(X_{i_n})$  telle que pour au moins un élément  $x \in X$  ait lieu  $x \notin X_{i_n}$  ( $n \in N$ ); d'ici suit  $x \in X \setminus X_{i_n}$ , donc  $x \in X \Delta X_{i_n} \subseteq B_{i_n}$ , c'est-à-dire  $(B_{i_n})$  ne serait pas une suite descendante à  $\emptyset$ , malgré que  $(B_n)$  le soit. **Regardant b):** supposons — par l'absurde — qu'il existait un point  $x' \in X_{i_n}$  et simultanément  $x' \notin X_{j_n}$   $i_n \neq j_n$  ( $n \in N$ ). On a deux alternatives „logiquement possibles” notamment si  $x' \in X$  alors  $x' \in X_{j_n} \Delta X \subseteq B_{j_n}$ , donc  $(B_{j_n})$  ne descendrait pas à  $\emptyset$ , si — d'autre part —  $x' \notin X$ , alors de  $x' \in X_{i_n} \Delta X \subseteq B_{i_n}$  résulterait le fait que  $(B_{i_n})$  ne descende pas à  $\emptyset$ , ce qui contredit de nouveau la relation à la limite  $B_n \downarrow \emptyset$ . **Regardant**

c) : si  $X = \emptyset$ , alors de  $X_n \Delta \emptyset \subseteq B_n \downarrow \emptyset$  résulte, quelque soit  $x$ , l'existence d'un nombre naturel  $n_x$  tel que  $x \in B_m$  pour  $m > n_x$  — donc  $x \notin X_m$  pour  $m > n_x$ . Ceci signifie que  $x$  figure seulement dans un nombre fini de termes de la suite  $(X_n)$ , ce qu'il fallait démontrer.

*Observation 2.2.* La réciproque de l'énoncé du théorème 2.2 n'est pas vraie ; nous construisons un contre-exemple pour cette réciproque. Soit  $\mathbf{E}$  un ensemble infini (quelconque) ; soit  $\Phi(\mathbf{E})$  le clan des parties finies de  $\mathbf{E}$  — sous-entendu  $\emptyset$  aussi —. Dans  $\Phi(\mathbf{E})$  les seules suites descendantantes à  $\emptyset$  sont les suites finalement vides, donc les seules suites ayant une limite analytique sont les suites finalement constantes (voir l'observation 1.1), donc celles ayant la forme  $X_1, X_2, \dots, X_p, X, X, \dots, X, \dots$  et pour limite analytique justement  $X$ . Or, si on considère dans  $\mathbf{E}$  la suite des éléments distincts :  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  alors dans  $\Phi(\mathbf{E})$  la suite d'ensembles  $\{\alpha, x_1\}, \{\alpha, x_2\}, \dots, \{\alpha, x_n\}, \dots$  a une limite au sens de Borel, car en conformité avec la définition 2.2 on pourra écrire  $(b)\text{-lim } \{\alpha, x_n\} = \{\alpha\}$ . Évidemment, on ne peut pas avoir, dans  $\Phi(\mathbf{E})$ ,  $(a)\text{-lim } \{\alpha, x_n\} = \{\alpha\}$ , car il n'existe pas dans  $\Phi(\mathbf{E})$  une telle suite  $B_n \downarrow \emptyset$  pour laquelle serait vrai  $\{\alpha, x_n\} \Delta \{\alpha\} = \{x_n\} \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ .

On mentionne, à ce propos là, que si une suite n'a pas de  $(a)$ -limite dans un clan, il n'est pas du tout nécessaire qu'il ait des points d'accumulations distinctes, c'est-à-dire il n'est pas nécessaire qu'il ait des suites partielles convergentes à des limites correspondantes, distinctes ; il n'est pas nécessaire ni même l'existence d'une seule suite partielle convergente. En effet, considérons la suite  $(\{\alpha, x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  qui n'a pas de  $(a)$ -limite et aucun de ses suites partielles n'aura pas une  $(a)$ -limite (pour la raison vue plus haut).

*Observation 2.3.* Dans un clan quelconque la  $(b)$ -limite n'est pas équivalente à la  $(a)$ -limite et ainsi non plus à la  $(o)$ -limite (voir aussi : théorème 2.1). Dans un clan la  $(b)$ -limite est plus générale que la  $(a)$ -limite, mais cette généralité signifie simultanément une perte de propriétés utiles comme dans le cas de l'exemple vu auparavant : la suite  $(\{\alpha, x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  a une  $(b)$ -limite, mais elle n'est pas bornée dans  $\Phi(\mathbf{E})$ , car l'ensemble minimal qui pourrait contenir toutes les termes de cette suite est  $\bigcup_1^\infty \{\alpha, x_n\} = \{\alpha, x_1, x_2, \dots\}$ , donc une partie de  $\mathbf{E}$ , mais il n'appartient pas à  $\Phi(\mathbf{E})$ .

Dans [4] on démontre l'équivalence entre le fait que  $X$  est la limite au sens de Borel de la suite  $(X_n)$  et que la limite — de même au sens de Borel — de la suite  $(X_n \Delta X)_{n \in \mathbb{N}}$  est l'ensemble vide. La démonstration faite dans  $\mathfrak{E}(\mathbf{X})$  est valable aussi pour un clan. Le fait que  $\emptyset = (b)\text{-lim } (X_n \Delta X)$  équivaut (voir aussi la définition 2.2) à l'affirmation : quelque soit  $n \in \mathbb{N}$  et quelque soit  $x \in X_n \Delta X$ , cet élément  $x$  ne figure que dans un nombre fini de termes de la suite  $(X_n \Delta X)$  c'est-à-dire, qu'il sera éliminé après un nombre fini de pas, donc  $x \notin X_n \Delta X$  si  $n > n_x$ . Ainsi, l'affirmation «  $X = (b)\text{-lim } X_n$  » équivaut à l'affirmation « quelque soit  $n \in \mathbb{N}$  et quelque soit  $x \in X_n \Delta X$ , l'élément  $x$  est éliminé comme élément constituant des ensembles de la suite  $(X_n \Delta X)$  après un nombre fini de pas ».

### 3. La relation entre la limite analytique et les limites classiques dans un tribe

Puisque chaque tribe est un clan, le théorème 2.1 implique le

**Corollaire 3.1.** Dans un tribe la limite analytique et celle au sens de l'ordre sont équivalentes.

Regardant la limite analytique et celle au sens de Borel<sup>3</sup>, on démontre le

**THÉORÈME 3.1.** Dans un tribe la limite analytique et la limite au sens de Borel sont équivalentes.

*Démonstration.* Un tribe étant évidemment un clan, on peut dire (vu le théorème 2.2) que l'existence de la limite analytique pour une suite dans le tribe implique l'existence de sa limite au sens de Borel et l'égalité entre elles. Dans un autre ordre d'idées, considérons dans le tribe  $\mathfrak{T}$  la validité de la relation à la limite  $(b)\text{-lim } X_n = X \in \mathfrak{T}$  il faut montrer l'existence d'une suite  $(B_n)$  d'éléments de  $\mathfrak{T}$ , descendantante à  $\emptyset$ , telle qu'il ait lieu  $X_n \Delta X \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ . On considère les réunions dénombrables (existantes dans  $\mathfrak{T}$ ).

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (X_k \Delta X) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

La suite  $(B_n)$  est descendantante, car  $B_{n+1} \subseteq B_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et en même temps  $X_n \Delta X \subseteq B_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). On suppose que  $(B_n)$  ne soit pas descendantante à  $\emptyset$  — alors, existerait au moins un élément  $x_0 \in B_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), donc  $x_0 \in \bigcup_{k=n}^{\infty} (X_k \Delta X)$ , ce qui équivaut à l'existence d'une suite partielle  $(i_n)$  de  $\mathbb{N}$ , telle que  $x_0 \in X_{i_n} \Delta X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — autrement pour  $n > n_x$  résulterait  $x_0 \notin X_n \Delta X$  et on aurait déjà  $B_n \downarrow \emptyset$ . Or,  $x_0 \in X_{i_n} \Delta X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) signifie pour chaque  $n \in \mathbb{N}$

— soit : 1°)  $x_0 \in X_{i_n}$  et  $x_0 \notin X$ ,

— soit : 2°)  $x_0 \notin X_{i_n}$  et  $x_0 \in X$ .

Si 1°) respectivement 2°) ont lieu pour une infinité de valeurs de l'indice, alors dans le cas 1°) est infirmé l'égalité entre la limite inférieure et la limite supérieure (Borel), contrairement à la supposition que  $(b)\text{-lim } X_n$  existe ; dans le cas 2°) on infirme l'égalité  $X = (b)\text{-lim } X_n$ . Si l'un des cas 1°) ou 2°) se réaliserait seulement pour un nombre fini d'indices, alors l'autre aurait lieu pour une infinité d'indices et on arriverait à la même conclusion qu'auparavant. Donc l'équivalence formulée par l'énoncé du théorème est démontrée.

<sup>3</sup> On rappelle, que dans un tribe  $L_o = \lim X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} X_k$  et  $L^o = \overline{\lim} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} X_k$ .

Du corollaire 3.1 et du théorème 3.1 résulte la

**Conséquence 3.1.** Dans chaque tribe — en particulier dans l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble,  $\mathfrak{P}(X)$  — les notions : (a)-limite, (b)-limite et (o)-limite sont équivalentes ; on a

$$(a)\text{-lim } X_n = (b)\text{-lim } X_n = (o)\text{-lim } X_n,$$

si  $(X_n)$  converge dans ce tribe au sens de l'une de ces limites<sup>4</sup>.

**Observation 3.1.** Pour la technique des démonstrations on peut transcrire la proposition «la suite  $(X_n)$  d'éléments d'un tribe de parties de l'ensemble  $X$  n'a pas comme limite l'élément  $X \in \mathfrak{P}$ » d'une façon équivalente, comme il suit : «il existe une suite partielle  $(X_{j_n}) \subset (X_n)$  et au moins un élément constituant<sup>1</sup>  $x_0 \in X$ , tel qu'on ait  $x_0 \in X_{j_n} \Delta X$  pour chaque  $n \in N$ , donc, au moins un  $x_0 \in X$  ne peut pas être éliminé „définitivement” des termes de la suite  $(X_n \Delta X)$ , c'est-à-dire à partir d'un rang  $n_0$  suffisamment grand».

**Définition 3.1.** Un ensemble  $\mathfrak{M}$  d'éléments d'un clan (ou d'un tribe) sera nommé — comme d'habitude — un compact, si et seulement si de chaque sous-ensemble infini de  $\mathfrak{M}$  on peut extraire une suite convergente vers un élément de  $\mathfrak{M}$  au sens de la limite introduite dans le clan (ou bien dans le tribe).

**Définition 3.2.** (d'après URYSON, [16]). Une suite  $(X_n)$  d'éléments d'un clan (tribe) s'appelle „suite compacte” dans ce clan (tribe) si et seulement si quelque soit une suite partielle de la suite  $(X_n)$  on en peut extraire une autre ayant comme limite dans ce clan (tribe) — au sens de la notion de limite introduite. Les limites de ces suites partielles sont des points d'accumulation pour  $(X_n)$  ; Uryson les nomme : „éléments contigus”.

**THÉORÈME 3.2.** Si une suite  $(X_n)$  d'éléments d'un tribe  $\mathfrak{P}$  de parties de l'ensemble  $X$  est compacte au sens de la définition 3.2, ayant un seul élément contigu (d'accumulation)  $X \in \mathfrak{P}$ , alors

$$X = (a)\text{-lim } X_n = (b)\text{-lim } X_n = (o)\text{-lim } X_n$$

**Démonstration.** On suppose le contraire, c'est-à-dire :  $X_n$  ne tend pas à  $X$  si  $n \rightarrow \infty$ . Alors, en vertu de l'observation 3.1 existe  $x_0 \in X$  et  $(X_{j_n}) \subset (X_n)$  tel que  $x_0 \in X_{j_n} \Delta X$  ( $n \in N$ ) et simultanément — vu la définition 3.2 de la compacité — on peut extraire de la suite partielle  $(X_{j_n})$  une autre  $(X_{k_j})$  qui ait pour limite analytique  $X$  ; donc il existe  $B_n \downarrow \emptyset$  tel que  $X_{k_j} \Delta X \subseteq B_n$ . Or, cette dernière inclusion est en contradiction avec le fait, que  $x_0 \in X_{k_j} \Delta X$  pour chaque  $n$ , parce que ainsi  $x_0 \in B_n$  ( $n \in N$ ) ce qui contredit le fait que  $B_n \downarrow \emptyset$ .

<sup>4</sup> L'auteur préfère d'utiliser surtout dans un tribe la notion de (a)-limite, parce qu'elle a un appareil formelle facile à manœuvrer et présentent beaucoup d'analogies avec la limite dans l'analyse classique.

**Démonstration bis.** On se servira de la notion de (b)-limite<sup>5</sup>. On suppose „le contraire” vu auparavant, c'est-à-dire  $X \neq (b)\text{-lim } X_n$  et alors existent les ensembles limites extrêmes de Borel et l'inclusion stricte  $L_0 \subset L^0$ . Donc il existe au moins un point  $x_0 \in X$  et deux suites partielles de  $(X_n)$  notamment  $(X_{i_n})$  et  $(X_{j_n})$ , telles que  $x_0 \in X_{i_n}$  et  $x_0 \notin X_{j_n}$  quelque soit  $n \in N$ . Conformément à la définition de la compacité au sens Uryson la suite partielle  $(X_{j_n})$  contiendra une suite partielle  $(X_{k_j})$  ayant la (b)-limite égale à  $X$ , mais  $x_0 \notin X$  ; simultanément, la suite partielle  $(X_{i_n})$  contiendra une suite partielle  $(X_{h_i})$  ayant de même la (b)-limite égale à  $X$ , mais cette fois-ci  $x_0 \in X$ . Ces deux conséquences sont en contradiction, donc la supposition initiale est infirmée. Il s'en suit  $X = (b)\text{-lim } X_n$ . C.Q.F.D.

En envisageant la conséquence 1.2 avec le théorème 3.2, résulte immédiatement le

**THÉORÈME 3.3.** Dans un tribe quelconque — en particulier dans  $\mathfrak{P}(X)$  — la relation à la limite  $X = (a)\text{-lim } X_n$  est équivalente au fait que la suite compacte  $(X_n)$  a un seul élément contigu.

#### §4. La notion de complétude séquentielle dans le sens analytique

**Définition 4.1.** Soit  $\mathcal{C}$  un clan. Une suite  $(X_n)$  d'éléments du clan sera nommée suite Cauchy si et seulement s'il existe dans le clan une suite descendante à l'ensemble vide,  $B_n \downarrow \emptyset$ , tel que l'on ait pour chaque  $p \in N$  :

$$(4.1) \quad X_{n+p} \Delta X_n \subseteq B_n \quad (n \in N, n \geq n_0 \geq 1).$$

**Conséquence 4.1.** Chaque suite Cauchy d'éléments d'un clan est bornée dans ce clan.

**Démonstration.** De (4.1) résulte — suivant la méthode utilisée pour la démonstration de la proposition 1.2 — le système

$$(4.2) \quad X_n \setminus B_n \subseteq X_{n+p} \subseteq X_n \cup B_n \quad (n \geq n_0; \forall p \in N)$$

et pour les termes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  a lieu, évidemment,  $\emptyset \subseteq X_i \subseteq \bigcup_1^n X_i$ ;

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), donc  $\emptyset \subseteq X_n \subseteq (\bigcup_1^n X_i) \cup B_n$  ( $\forall n \in N$ ), où  $n$  est soumis à la condition  $n \geq n_0 \geq 1$ .

**THÉORÈME 4.1.** Si dans le clan  $\mathcal{C}$  a lieu

$$(a)\text{-lim } X_n = X \in \mathcal{C} \quad (X_n \in \mathcal{C}, n \in N)$$

alors  $(X_n)$  est une suite Cauchy.

<sup>5</sup> Revoir conséquence 3.1.

*Démonstration.* En vertu du système (1.2) qui résulte de la convergence analytique de  $(X_n)$ , on peut écrire les inclusions

$$X \setminus B_n \subseteq X_n \subseteq X \cup B_n \text{ et } X \setminus B_{n+p} \subseteq X_{n+p} \subseteq X \cup B_{n+p}.$$

Le deuxième système d'inclusions peut être modifié, à cause de la monotonie  $B_n \supseteq B_{n+p}$  ( $p \in N$ ), comme il suit:  $X \setminus B_n \subseteq X_{n+p} \subseteq X \cup B_n$ . Il résulte de ce dernier système d'inclusions couplé avec le premier système

$$X_{n+p} \Delta X_n \subseteq (X \cup B_n) \setminus (X \setminus B_n) \subseteq (X \cup B_n) \setminus X \subseteq B_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Définition 4.2.** Si chaque suite Cauchy d'éléments d'un clan a une limite analytique dans ce clan, alors le clan est séquentiellement complet, ou avec une autre dénomination: un clan Cauchy. Définition analogue pour un „ensemble séquentiellement complet”.

**THÉORÈME 4.2.** Chaque tribu — en particulier  $\mathfrak{X}(X)$  — est un clan Cauchy; pas chaque clan Cauchy est un tribu.

*Démonstration.* Chaque tribu est une famille complète, [20]<sup>6</sup>, c'est-à-dire qu'il contient avec une suite quelconque  $\{X_n | X_n \in \mathfrak{F}, n \in N\}$  aussi ses limites extrêmes  $L_0$  et  $L^0$  (au sens de Borel). On montrera que pour une suite Cauchy  $(X_n)$ , donc pour laquelle a lieu  $X_{n+p} \Delta X_n \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ , est valable l'égalité  $L_0 = L^0$ . En effet, on suppose le contraire c'est-à-dire l'inclusion stricte  $L_0 \subset L^0$ ; donc il existe une infinité de termes de la suite  $(X_n)$  qui contiennent  $x^0$  et simultanément une autre infinité de termes de la suite qui ne contiennent pas  $x^0$ . Pour un indice quelconque,  $n$ , il y a deux alternatives:

— soit  $x^0 \in X_n$  et évidemment existera  $p' \in N$  tel que  $x^0 \notin X_{n+p'}$ , d'où  $x^0 \in X_{n+p'} \Delta X_n$ , donc  $x^0 \in B_n$ ;  
— soit  $x^0 \notin X_n$  et évidemment existera  $p'' \in N$  tel que  $x^0 \in X_{n+p''}$ , d'où  $x^0 \in X_{n+p''} \Delta X_n$ , donc  $x^0 \in B_n$  dans ce cas aussi. Or, si  $x^0 \in B_n$  pour chaque  $n \in N$  alors  $(B_n)$  ne peut pas descendre à  $\emptyset$ , contrairement à la supposition  $B_n \downarrow \emptyset$ . D'ici résulte l'égalité  $L_0 = L^0$ , donc dans  $\mathfrak{F}$  existe  $(b)\text{-lim } X_n$  pour chaque suite Cauchy  $(X_n)$ . Vu le théorème 3.1, existe aussi

$$(a)\text{-lim } X_n = (b)\text{-lim } X_n \in \mathfrak{F}$$

Pour démontrer la deuxième affirmation de l'énoncé du théorème, on montrera qu'il existe des clans Cauchy qui ne sont pas de tribus. On reprend l'exemple du clan  $\Phi(\mathbf{E})$  (voir observation 2.2) dans lequel les seules suites Cauchy sont les suites finalement constantes (car les seules suites descendentes à  $\emptyset$  sont les suites finalement vides) et elles ont une limite dans  $\Phi(\mathbf{E})$ , qui est, donc, un clan Cauchy. Cependant, en considérant l'ensemble dénombrable  $(\{x_n\})_{n \in N}$  d'éléments du clan  $\Phi(\mathbf{E})$ ,

<sup>6</sup> Dans [15] et [13] le tribu est nommé „clan borélien”.

conditionné par:  $x_i, x_j \in \mathbf{E}$ ,  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$  ( $i, j \in N$ ) — la réunion  $\bigcup_1^\infty \{x_n\}$  n'est pas contenue dans  $\Phi(\mathbf{E})$  car  $\Phi(\mathbf{E})$  est le clan des parties finies de  $\mathbf{E}$ . Donc  $\Phi(\mathbf{E})$  n'est pas un tribu.

**Observation 4.1.** Il est naturel de comparer la notion de complétude d'un clan dans le sens séquentiel (conformément à la définition 4.2) avec la notion classique de complétude du clan au sens réticulaire (définie par Birkhoff). A ce sujet on énonce le.

**THÉORÈME 4.3.** Chaque clan  $\mathcal{C}$  relativement  $\sigma$ -complet — comme treillis — est un clan Cauchy donc séquentiellement complet. Un clan Cauchy n'est pas nécessairement  $\sigma$ -complet comme treillis.

*Démonstration.* Soit  $(X_n)$  une suite Cauchy dans  $\mathcal{C}$ . Conformément à la conséquence 4.1 la suite  $(X_n)$  est bornée dans  $\mathcal{C}$ , donc existent les limites extrêmes  $L_0$  et  $L^0$  qui — vu la démonstration du théorème 4.2 — sont égales. Ainsi il existe pour  $(X_n)$  une limite au sens de l'ordre aussi<sup>7</sup>, dans ce clan (qui est aussi un treillis). Conformément au théorème 2.1 existe la limite analytique pour la suite Cauchy  $(X_n)$ . Regardant la deuxième affirmation de l'énoncé du théorème on rappelle l'exemple du clan  $\Phi(\mathbf{E})$  — voir l'observation 4.1 — qui est un clan Cauchy mais il n'est pas un treillis  $\sigma$ -complet, parce qu'il ne l'est pas même monotone-ment complet, car il ne contient la limite de la suite monotone

$$\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \dots \quad (x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j),$$

qui pourrait être seulement le suprémum noté par  $\bigcup_{n=1}^\infty \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , mais qui n'appartient plus à  $\Phi(\mathbf{E})$ .

**Conséquence 4.2.** Chaque clan complet ou  $\sigma$ -complet comme treillis, étant — évidemment — aussi relativement  $\sigma$ -complet, est simultanément un clan Cauchy.

**THÉORÈME 4.4.** Dans chaque clan la proposition  $\ll (X_n)$  est une suite Cauchy  $\gg$  équivaut à  $\ll (a)\text{-lim}(X_n \Delta X_{n+1}) = \emptyset \gg$ .

*Démonstration:* De  $X_n \Delta X_{n+p} \subseteq B_n \downarrow \emptyset$  résulte  $X_n \Delta X_{n+1} \subseteq B \downarrow \emptyset$ , donc  $(a)\text{-lim}(X_n \Delta X_{n+1}) = \emptyset$ . D'autre part, si  $X_n \Delta X_{n+1} \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ , alors on a la suite d'inclusions:

$$X_{n+i-1} \Delta X_{n+1} \subseteq B_{n+i-1} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p.$$

<sup>7</sup> Voir dans [5] la définition 5.1.2. et ce qui suit, ainsi que les théorèmes 5.1.4 et 5.1.7 (pp. 34–36). On mentionne que les limites extrêmes dans un clan relativement  $\sigma$ -complet comme treillis, coïncident avec les limites extrêmes respectives au sens de Borel.



Puisque

$$X_n \Delta X_{n+p} \subseteq \bigcup_{i=1}^p (X_{n+i-1} \Delta X_{n+i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^p B_{n+i-1} = B_n,$$

le théorème est démontré.

**Application.** En nous basant sur ce théorème, on peut donner une représentation du terme de rang  $n$  d'une suite Cauchy quelconque, dans un clan. Notamment, les inclusions  $X_{n+1} \Delta X_n \subseteq B_n$  ( $n \in N$ ) où  $B_n \downarrow \emptyset$ , peuvent être transcrites comme il suit :

$$(4.2) \quad X_{n+1} \Delta X_n = \beta_n; \quad \beta_n \subseteq B_n, \quad \beta_n \in \mathcal{C} \quad (n \in N)$$

d'où

$$(4.3) \quad X_{n+1} = X_n \Delta \beta_n \quad (n \in N)$$

et après avoir appliqué une induction sur (4.3), on obtient

$$(4.4) \quad X_{n+1} = X_1 \Delta \beta_1 \Delta \beta_2 \Delta \dots \Delta \beta_n = X_1 \Delta \bigwedge_{i=1}^n \beta_i \quad (n \in N)$$

où on a noté  $\bigwedge_{i=1}^n \beta_i = \beta_1 \Delta \beta_2 \Delta \dots \Delta \beta_n$ .

Dans la pratique on peut procéder ainsi : de l'ensemble des suites descendantes à  $\emptyset$  dans  $\mathcal{C}$ , on choisit arbitrairement  $(B_n)$  et on considère pour chaque  $n \in N$  toutes les parties de  $B$  — du type  $\beta$  où  $\beta \subseteq B_n$ ,  $\beta \in \mathcal{C}$ . On fixe arbitrairement  $X_0 \in \mathcal{C}$  et pour chaque  $n$  on choisit un  $\beta$  que l'on note par  $\beta_n$  ( $n \in N$ ). La suite

$$\left\{ X_n \mid X_n = X_0 \Delta \bigwedge_{i=1}^n \beta_i, \quad n \in N \right\}$$

sera une suite Cauchy dans  $\mathcal{C}$ .

Du théorème 4.4. résulte immédiatement la

**Conséquence 4.3.** Un clan  $\mathcal{C}$  est un clan Cauchy si et seulement si pour chaque suite  $(X_n)$  d'éléments de  $\mathcal{C}$  pour laquelle a lieu  $(a)\text{-lim}(X_n \Delta X_{n+1}) = \emptyset$  résulte l'existence de  $(a)\text{-lim} X_n \in \mathcal{C}$ .

**Observation 4.2.** La notion de  $(a)$ -limite introduite par la définition 1.1, la notion de suite Cauchy introduite par la définition 4.1 et la notion de complétude séquentielle introduite par la définition 4.2, peuvent être généralisées par l'immersion de la famille d'ensembles originellement donnée,  $\mathbf{M}$ , dans une autre famille plus vaste,  $\mathbf{E}$ . Ainsi :

a) la suite  $(X_n) \subset \mathbf{M}$  a pour limite analytique  $X \in \mathbf{M}$  par immersion dans  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}$ ), s'il existe dans  $\mathbf{E}$  une suite  $B_n \downarrow \emptyset$  tel que  $X_n \Delta X \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ ;

b) la suite  $(X_n) \subset \mathbf{M}$  est une suite Cauchy par immersion dans  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}$ ), s'il existe dans  $\mathbf{E}$  une suite  $B_n \downarrow \emptyset$  tel qu'on ait  $X_{n+1} \Delta X_n \subseteq B_n \downarrow \emptyset$ ;

c) la famille  $\mathbf{M}$  d'ensembles est séquentiellement complète par immersion dans  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}$ ) si chaque suite Cauchy par immersion dans  $\mathbf{E}$  — conformément à b) — a une limite contenue dans  $\mathbf{M}$ .

### §5. Topologies définies moyennant les notions de $(b)$ -limite, $(a)$ -limite et $(o)$ -limite

**Préliminaires.** Soit  $\mathcal{C}$  une famille d'ensembles. On conçoit  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ , l'ensemble de toutes les suites (séquences!) d'éléments<sup>8</sup> de  $\mathcal{C}$ . En concordance avec les idées de Fréchet<sup>1</sup> on peut introduire dans  $\mathcal{C}$  une notion de convergence séquentielle, comme il suit :

on désigne comme suites (séquences) convergentes vers une limite, la partie maximale  $\mathcal{K}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$  relativement à laquelle pour chaque élément  $(X_n) \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$  on peut faire correspondre d'une façon univoque un élément  $X \in \mathcal{C}$  — qui sera nommé la limite de la suite  $(X_n)$  — respectant les conditions :

1° la suite constante  $(X)$  a comme limite  $X \in \mathcal{C}$  ( $\forall X \in \mathcal{C}$ ),

2° si la suite  $(X_n) \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$  a comme limite  $X \in \mathcal{C}$  alors chacune de ses suites partielles,  $(X_{i_n})$ , a la même limite  $X$ , donc  $(X_{i_n}) \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ . La famille  $\mathcal{C}$  douée d'une telle convergence séquentielle devient un espace  $\mathcal{L}$  (d'après la terminologie de Fréchet ; classe  $\mathcal{L}$ ).

Une telle notion de convergence permet de définir une notion d'ensemble fermé qui par complémentation nous conduit aux ensembles ouverts d'une certaine topologie. URYSON dans [16], puis KISYŃSKI dans [10] posent le problème : à quelles conditions la topologie définie par cette notion de convergence séquentielle n'introduit pas de „nouvelles” suites convergentes en dehors de celles déjà conçues comme telles par la construction de l'espace  $\mathcal{L}$ ? La réponse à cette question est formulée en conformité avec [16] et [10], de la façon suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace  $\mathcal{L}$  construite à l'aide d'une  $\mathcal{L}$ -limite (au sens de Fréchet vue plus haut) définisse une topologie  $\tau_{\mathcal{L}}$  dont les suites (séquences) convergentes coïncident parfaitement avec les suites convergentes de l'espace  $\mathcal{L}$ , est exprimée par

3° si la suite  $(X_n) \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$  est compacte dans  $\mathcal{C}$  (au sens de la définition 3.2 d'Uryson) ayant un point unique de contiguité,  $X \in \mathcal{C}$ , alors la suite  $(X_n)$  a comme limite l'élément  $X \in \mathcal{C}$ , — donc  $(X_n) \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ .

La notion de limite qui respecte en dehors des conditions 1° et 2° ci-dessus aussi cette dernière condition 3°, engendre un espace de convergence nommé

<sup>8</sup> Pour éviter des confusions on souligne qu'un élément de  $\mathcal{C}$  est un ensemble.

espace  $\mathfrak{L}^*$ , qui détermine une topologie  $\tau_{\mathfrak{L}^*}$  dans laquelle les suites convergentes coïncident avec celles de l'espace  $\mathfrak{L}^*$ .

**THÉORÈME 5.1.** Si la suite  $(X_n)$  d'éléments d'un clan  $\mathcal{C}$  est compacte conformément à la définition 3.2 et au sens de la (b)-limite, ayant un seul élément contigu,  $X \in \mathcal{C}$ , alors existe (b)- $\lim X_n = X$ .

*Démonstration.* En supposant le contraire, c'est-à-dire que  $(X_n)$  n'ait pas  $X$  comme (b)-limite, il existera (vu la définition 2.2) une suite partielle  $(X_{j_n}) \subset (X_n)$  et au moins un élément  $x^0 \in \mathbf{X}$  (le clan  $\mathcal{C}$  étant une famille de parties de l'ensemble  $\mathbf{X}$ ) tel que  $x^0 \in X_{j_n} \Delta X (n \in N)$ . À cause de la compacité de la suite  $(X_n)$  on pourra extraire de  $(X_{j_n})$  une suite partielle  $(X_{k_j})$  ayant  $X$  pour sa (b)-limite. Or, du fait que  $x^0 \in X_{j_n} \Delta X (n \in N)$  résulte  $x^0 \in (X_{k_j} \Delta X) (n \in N)$ , donc  $(X_{k_j})$  ne peut pas avoir  $X$  pour (b)-limite, ce qui infirme la supposition du contraire, et ainsi le théorème est démontré.

En nous basant sur la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace  $\mathfrak{L}$  soit un espace  $\mathfrak{L}^*$  et sur le théorème 5.1, résulte le

**THÉORÈME 5.2.** La (b)-limite introduite dans un clan  $\mathcal{C}$  réalise un espace  $\mathfrak{L}^*$ , et la topologie  $\tau_{(b)}$  déterminée sur  $\mathcal{C}$  par cette (b)-limite sera équivalente du point de vue des suites (séquences) convergentes, avec l'espace  $\mathfrak{L}^*$ .

On mentionne le résultat similaire, [5], regardant la (t)-convergence dans un treillis relativement  $\sigma$ -complet, basé sur le travail [8].

**Corollaire 5.1.** Dans un tribe quelconque les différentes limites : (a)-limite, (b)-limite, (o)-limite, réalisent le même espace  $\mathfrak{L}^*$  et les topologies correspondantes :  $\tau_{(a)}$ ,  $\tau_{(b)}$ ,  $\tau_{(o)}$ , sont équivalentes entre elles et à l'espace  $\mathfrak{L}^*$ , du point de vue des suites (séquences) convergentes.

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 5.2 et de la conséquence 3.1.

On s'occupe, dans ce qui suit, de certains aspects concrets de la définition d'une topologie sur un tribe à l'aide de la limite analytique.

Soit  $\mathbf{X}$  un ensemble et  $\mathfrak{F}$  un tribe de parties de  $\mathbf{X}$ ; un ensemble  $F \subset \mathfrak{F}$  est fermé au sens de la (a)-limite, si pour chaque suite  $(X_n) \subseteq F$  qui (a)-converge à un élément  $X \in \mathfrak{F}(\mathbf{X}) (n \in \infty)$  on a  $X \in F$ . Or, chaque suite (a)-convergente dans un tribe est une suite Cauchy (théorème 4.1), donc un ensemble et seulement un ensemble  $F$  séquentiellement complet (définition 4.2) est fermé au sens de la (a)-limite. Ainsi le tribe  $\mathfrak{F}$  lui-même est aussi un ensemble fermé (revoir théorème 4.2). On remarque, qui si  $F$  est un ensemble fini d'éléments de  $\mathfrak{F}$ , les seules suites Cauchy sont les suites finalement constantes qui ont leur limite évidemment dans  $F$  (observation 1.1); l'ensemble  $\emptyset$  est capable d'engendrer la seule suite  $(\emptyset)$  dont la limite est aussi  $\emptyset$ , donc l'ensemble vide peut être considéré comme fermé. En somme, le

**Corollaire 5.2.** Chaque fermé  $F$  (ensemble fermé) d'un tribe  $\mathfrak{F}$  a, au sens de la limite analytique, l'une des formes concrètes :

$\alpha)$ .  $F = \emptyset$

$\beta)$ .  $F$  est un ensemble fini d'éléments de  $\mathfrak{F}$

$\gamma)$ .  $F = \mathfrak{F}$

$\delta)$ .  $F$  est un ensemble séquentiellement complet d'éléments de  $\mathfrak{F}$ ;

Le cas  $\delta)$  inclut  $\alpha)$ ,  $\beta)$  et  $\gamma)$ .

**THÉORÈME 5.3.** Soit  $\mathfrak{F}_{(a)}$  l'ensemble de toutes les parties fermées — au sens analytique — d'un tribe  $\mathfrak{F}$ .  $\mathfrak{F}_{(a)}$  satisfait „les axiomes des fermés” d'une topologie  $\tau_{(a)}$  sur le tribe  $\mathfrak{F}$ , à savoir :

I.  $\emptyset, \mathfrak{F} \in \mathfrak{F}_{(a)}$

II.  $\bigcup_{i=1}^m F_i \in \mathfrak{F}_{(a)}$  si  $F_i \in \mathfrak{F}_{(a)}$  ( $i = 1, \dots, m; m \in N$ )

III.  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathfrak{F}_{(a)}$  si  $F_\alpha \in \mathfrak{F}_{(a)}$  ( $\alpha \in I, I$  ensemble quelconque d'indices).

*Démonstration.* Regardant I : c'est évident conformément au corollaire 5.2. Regardant II : si pour chaque  $i = 1, 2, \dots, m$   $F_i$  est un ensemble fini alors la propriété II est satisfaite vu le point  $\beta)$  du corollaire 5.2. Si parmi les ensembles  $F_i (i = 1, 2, \dots, m)$  existe au moins un ensemble infini et séquentiellement complet, alors quelque soit une suite Cauchy

$(X_n)$  d'éléments de la réunion  $\bigcup_{i=1}^m F_i$ , au moins l'un des ensembles  $F_i (i = 1, \dots, m)$  — notons le  $F_{i_0}$ , et qui sera évidemment séquentiellement complet — contiendra une suite partielle  $(X_{i_n}) \subset (X_n)$ , séquentiellement complet, donc existe (a)- $\lim X_{i_n} = X \in F_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^m F_i$ . Mais la limite

d'une suite partielle d'une suite Cauchy est aussi la limite de la suite Cauchy, donc existe (a)- $\lim X_n = X \in \bigcup_{i=1}^m F_i$ . Regardant III : si l'ensemble

$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  est soit vide soit fini, alors la propriété III est vérifiée (vu les points  $\alpha)$  et  $\beta)$  du corollaire 5.2). Si l'intersection envisagée contient une suite Cauchy, celle-ci sera contenue dans chacun des ensembles  $F_i (i \in I)$  séquentiellement complets, donc la limite de la suite Cauchy sera contenue aussi dans l'intersection. C.Q.F.D.

En considérant les complémentaires des fermés donnés par le corollaire 5.2, on obtient les ouverts de la topologie  $\tau_{(a)}$  définie sur un tribe  $\mathfrak{F}$ , moyennant la limite analytique, — ouverts mis en évidence par le

**Corollaire 5.3.** Chaque ouvert  $G$  de la topologie  $\tau_{(a)}$  engendrée sur un tribe  $\mathfrak{F}$  moyennant la limite analytique, a l'une des suivantes formes concrètes :

$\alpha')$ .  $G = \mathfrak{F}$

$\beta')$ .  $G$  est un ensemble ayant dans  $\mathfrak{F}$  un complémentaire fini

$\gamma')$ .  $G = \emptyset$

$\delta')$ .  $G$  est un ensemble ayant pour complémentaire dans  $\mathfrak{F}$  un ensemble séquentiellement complet.  
Le cas  $\delta')$  inclut  $\alpha')$ ,  $\beta')$  et  $\gamma')$ .

### §6. Topologies sur des tribes, définies par l'indication directe des fermés

THÉORÈME 6.1. Soit  $\mathfrak{F}$  un tribe quelconque et  $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  l'ensemble de ses sous-tribes. Il existe sur  $\mathfrak{F}$  une topologie  $\tau_{(\mathfrak{F})}$  dont les fermés sont des réunions arbitraires (finies ou infinies) de sous-tribes de  $\mathfrak{F}$ , c'est-à-dire des ensembles de la forme  $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$  ( $I \subseteq A$ ).

Démonstration. Les axiomes des fermés d'une topologie se vérifient comme il suit. Regardant  $I^0$ :  $\emptyset$  et  $\mathfrak{F}$  sont évidemment des tribes. Regardant  $II$ : une réunion finie de réunions arbitraires de tribes est de même une réunion de tribes. En effet  $\bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i_j \in I_j} \mathfrak{F}_{i_j}$  est de la forme  $\bigcup_{k \in K} \mathfrak{F}_k$  où  $k = i_j$  et  $K = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i_j \in I_j} i_j$ , en précisant que l'indice du type  $i_j$  parcourt, pour un  $j$  fixé, l'ensemble d'indices  $I_j$ , et puis  $j$  parcourt l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Regardant  $III$ : on démontre l'égalité

$$(6.1) \quad \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i_j \in I_j} \mathfrak{F}_{i_j} = \bigcup_{\{i_k \in I_k\}_{k \in J}} \bigcap_{i \in J} \mathfrak{F}_{i_j},$$

comme il suit:

$$\begin{aligned} \left[ X \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i_j \in I_j} \mathfrak{F}_{i_j} \right] &\Leftrightarrow \left[ X \in \bigcup_{i_j \in I_j} \mathfrak{F}_{i_j}, \forall j \in J \right] \Leftrightarrow \left[ \forall j \in J, \exists i_j^0 \in I_j : X \in \mathfrak{F}_{i_j^0} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ X \in \bigcap_{i \in J} \mathfrak{F}_{i_j^0} \right] \Leftrightarrow \left[ X \in \bigcup_{\{i_k \in I_k\}_{k \in J}} \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_{i_j} \right]. \end{aligned}$$

Puisque une intersection arbitraire de tribes est de même un tribe, [6], il en résulte que dans le second membre de l'égalité (6.1) se trouve une réunion de tribes. C.Q.F.D.

Les topologies qu'on définit sur le tribe  $\mathfrak{X}(\mathbf{X})$  (l'ensemble des parties de  $\mathbf{X}$ ) partent d'habitude des topologies préexistantes sur  $\mathbf{X}$  (voir par exemple: [6] et [7]). Nous définirons une topologie sur  $\mathfrak{X}(\mathbf{X})$  — différente de la topologie grossière et de celle discrète — sans utiliser une topologie préexistente sur  $\mathbf{X}$ , et sans aucune notion de limite „à priori”.

<sup>9</sup> La numérotation des axiomes des fermés d'une topologie concorde avec celle utilisée aussi dans l'énoncé du théorème 5.3.

En particularisant l'idée des sous-tribes comme ensembles fermés (voir théorème 6.1), on considère l'ensemble  $\{\mathfrak{X}(X) | X \subseteq \mathbf{X}\}$  et on propose comme ensembles fermés pour une topologie, des ensembles de la forme  $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}(X_i)$ ,  $X_i \subseteq \mathbf{X}$ ,  $I$  ensemble arbitraire d'indices.

THÉORÈME 6.2. La famille  $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{X})}$  ayant comme éléments des ensembles de la forme  $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}(X_i)$  où  $X_i \subseteq \mathbf{X}$  et  $I$  un ensemble arbitraire d'indices, constitue les fermés d'une topologie  $\tau_{(\mathfrak{X})}$  définie sur  $\mathfrak{X}(\mathbf{X})$ .

Démonstration. Regardant  $I^0$ : l'ensemble vide respectivement  $P(\mathbf{X})$  ont la forme  $\mathfrak{F}$  ci-dessus pour  $I = \{1\}$  et  $X_1 = \emptyset \subseteq \mathbf{X}$  respectivement pour  $I = \{1\}$  et  $X_1 = \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}$ . Regardant  $II$ : une réunion finie d'ensembles du type  $\mathfrak{F}$  est notée par  $\bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i_j \in I_j} \mathfrak{X}(X_{i_j})$  ce qui est bien du type  $\mathfrak{F}$  (voir le point correspondant de la démonstration du théorème 6.1). Regardant  $III$ : on montre au préalable la validité de l'égalité

$$(6.2) \quad \bigcap_{k \in K} \mathfrak{X}(X_k) = \mathfrak{X}\left(\bigcap_{k \in K} X_k\right),$$

pour l'ensemble arbitraire d'indices,  $K$ . En effet

$$\begin{aligned} \left[ X \in \bigcap_{k \in K} \mathfrak{X}(X_k) \right] &\Leftrightarrow \left[ X \in \mathfrak{X}(X_k), \forall k \in K \right] \Leftrightarrow \left[ X \subseteq X_k, \forall k \in K \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ X \subseteq \bigcap_{k \in K} X_k \right] \Leftrightarrow \left[ X \in \mathfrak{X}\left(\bigcap_{k \in K} X_k\right) \right]. \end{aligned}$$

Puis on montre qu'il a lieu pour  $J$  arbitraire

$$\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i_j \in I_j} \mathfrak{X}(X_{i_j}) = \bigcup_{\{i_k \in I_k\}_{k \in J}} \bigcap_{j \in J} \mathfrak{X}(X_{i_j}) = \bigcup_{\{i_k \in I_k\}_{k \in J}} \mathfrak{X}\left(\bigcap_{j \in J} X_{i_j}\right).$$

La première de ces égalités se démontre — mutatis mutandis — comme sa correspondante du cadre du théorème 6.1, tandis que la deuxième égalité résulte moyennant (6.2) — démontrée plus haut.

Observation 6.1. Les fermés de la forme  $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{F}_i$  ( $n \in N$ ) de la topologie  $\tau_{(\mathfrak{F})}$  (qui figure dans le théorème 6.1) ainsi que les fermés de la forme  $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{X}(X_i)$  ( $n \in N$ ) de la topologie  $\tau_{(\mathfrak{X})}$  (qui figure dans le théorème 6.2) sont des fermés aussi au sens de la topologie  $\tau_{(\mathfrak{X})}$  (qui figure dans le théorème 5.3) — revoir la justification de l'axiome II des fermés au cours de la démonstration du théorème 5.3. Quant à la topologie  $\tau_{(\mathfrak{X})}$  on précise les suivantes: soit l'ensemble  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}(\mathbf{X})$ , représenté par

$\mathfrak{M} = \{M_\alpha \mid M_\alpha \subseteq X, \alpha \in I\}$ . On considère  $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$  et on forme  $\mathfrak{E}(M) = \mathfrak{E}\left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha\right)$ ;  $\mathfrak{E}(M)$  sera un fermé de l'espace  $(\mathfrak{E}(X), \tau_{(\mathfrak{E})})$  et on le nommera la  *$\mathfrak{E}$ -enveloppe fermée de l'ensemble  $\mathfrak{M}$* . L'opération par laquelle on forme cette  *$\mathfrak{E}$ -enveloppe* nous conduit à un ensemble qui contient  $\mathfrak{M}$ , mais cette opération n'est pas une fermeture car elle ne vérifie pas le troisième axiome de Kuratowski. Notons  $\bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M} = \mathfrak{E}\left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha\right)$ ; l'opération  $\mathfrak{E}$  jouit des propriétés facile à vérifier, notamment:

$$I^\circ \bar{\mathfrak{E}}\emptyset = \emptyset$$

$$II^\circ \mathfrak{M} \subseteq \bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}$$

$$III^\circ \bar{\mathfrak{E}}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \supseteq (\bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}_1) \cup (\bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}_2)$$

$$IV^\circ \bar{\mathfrak{E}}\bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}.$$

On constate, que „la troisième axiome” prend la forme de la *suraditivité* les autres respectent les conditions de Kuratowski. III<sup>o</sup> peut être écrit sous la forme de l'égalité

$$III' \bar{\mathfrak{E}}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = (\bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}_1) \cup (\bar{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}_2),$$

$\cup$  étant le symbole de la somme directe basée sur la réunion.

Observation 6.2. Les ouverts de la topologie  $\tau_{(\mathfrak{E})}$  (introduite par le théorème 6.2) admettent une représentation explicite. On précise tout d'abord les notations qu'on utilisera.  $X$  étant l'ensemble de référence et  $X \subseteq X$ , le complémentaire  $\mathfrak{C}_X X$  sera noté simplement par  $\mathfrak{C}X$  et le complémentaire  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{E}(X)} \mathfrak{E}(X)$  par  $\mathfrak{C}P(X)$ . L'ensemble des parties non-vides de

$X \subseteq X$  sera noté par  $P(X) \setminus \emptyset$ , et le symbole  $\cup$  sera celui de la somme directe basée sur l'opération de la réunion.

On peut facilement se rendre compte que l'ouvert  $G = \mathfrak{C}P(X)$  a la représentation

$$(6.3) \quad G = \mathfrak{C}P(X) = \begin{cases} \mathfrak{E}(X) & , \quad \text{si } X = \emptyset \\ (\mathfrak{E}(\mathfrak{C}X) \setminus \emptyset) \cup \mathfrak{E}(X) & , \quad \text{si } \emptyset \subset X \subset X \\ \emptyset & , \quad \text{si } X = X. \end{cases}$$

Quant au cas général où  $G = \mathfrak{C} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}(X_i)$  avec  $X_i \subseteq X, i \in I$ , on applique la formule de De Morgan

$$\mathfrak{C} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}(X_i) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{C} \mathfrak{E}(X_i) = \bigcap_{i \in I} [(\mathfrak{E}(\mathfrak{C}X_i) \setminus \emptyset) \cup \mathfrak{E}(X_i)]$$

et on arrive à

$$(6.4) \quad G = \mathfrak{C} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}(X_i) = \begin{cases} \left( \bigcap_{i \in I} [(\mathfrak{E}(\mathfrak{C}X_i) \setminus \emptyset) \cup P(X_i)] \right), & \text{si } \emptyset \subseteq X_i \subset X \\ \emptyset, & \text{si } X_{i_0} = X \text{ pour au moins une valeur } i_0 \text{ de l'indice.} \end{cases}$$

(On mentionne: si pour un certain indice  $[i_0 (i_0 \in I)]$  a lieu  $E_{i_0} = \emptyset$ , alors  $E_{i_0} \subset E_i; i \neq i_0, E_i \supset \emptyset$  et la représentation (6.4) ne contient pratiquement le terme provenant de  $E_{i_0}$ ; si pour un certain  $i_0 (i_0 \in I)$  a lieu  $X_{i_0} = X$  alors, évidemment  $X_i \subseteq X_{i_0} = X$  et de la représentation (6.4) ne reste pratiquement que  $G = \mathfrak{C} \mathfrak{E}(X) = \emptyset$ .)

On donnera deux exemples remarquables d'ouverts:

Exemple 6.1. Soit un élément constituant<sup>2</sup>  $x \in X$ . Considérons l'ouvert  $G = \mathfrak{C} \mathfrak{E}(\{x\})$ :

$$G = \mathfrak{C} \mathfrak{E}(\{x\}) = [\mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\}) \setminus \emptyset] \cup \mathfrak{E}(\{x\}) = [\mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\}) \setminus \emptyset] \cup \{\emptyset, \{x\}\} = \\ = ([\mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\}) \setminus \emptyset] \cup \emptyset) \cup ([\mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\}) \setminus \emptyset] \cup \{x\}),$$

donc  $G$  est l'ensemble formé de toutes les parties non-vides de  $\mathfrak{C}\{x\}$  et de toutes les parties de  $X$  qui contiennent l'élément constituant  $x \in X$  excepté l'ensemble  $\{x\}$  elle-même. On pourrait écrire aussi directement la représentation de  $G$ , sans faire appel à la formule (6.3), notamment  $G = \mathfrak{C} \mathfrak{E}(\{x\}) = \mathfrak{E}(X) \setminus \{\emptyset, \{x\}\}$ .

Exemple 6.2. Soit  $x \in X$  et on considère l'ouvert  $G = \mathfrak{C}[\mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\})]$ . On a

$$G = \mathfrak{C}[\mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\})] = [\mathfrak{E}(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\{x\}) \setminus \emptyset) \cup \mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\})] = [\mathfrak{E}(\{x\} \setminus \emptyset) \cup \mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\})] = \\ = [\{\emptyset, \{x\}\} \setminus \emptyset] \cup \mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\}) = \{x\} \cup \mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\}) = \{\{x\} \cup Y \mid Y \in \mathfrak{E}(\mathfrak{C}\{x\})\},$$

c'est-à-dire  $G$  est l'ensemble de toutes les parties de  $X$  qui contiennent l'élément constituant  $x$  (bien entendu  $\{x\}$  aussi est un tel ensemble). Ainsi l'ouvert  $G$  est un voisinage de  $\{x\}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alexandroff, P. S., Urysohn, P., Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe  $(\mathfrak{E})$  soit une classe  $(\mathfrak{D})$ . C. R. Acad. Sci. Paris, t. 177, 1274-1277 (1923).
- [2] Birkhoff, G., On the Structure of Abstract Algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 433-454, (1935).
- [3] Borel, É., Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris, 1905.
- [4] Cîmpian, V., Topologii limită, Studia Univ. „Babeş-Bolyai”, Cluj, Ser. Math., - Phys. Fasc. 1, 29-35 (1971).

- [5] Cristescu, R., *Spații liniare ordonate*. Ed. Acad. R.P.R. Buc., 1959.
- [6] Dinculeanu, N., *Teoria măsurii și funcții reale*, Ed. Did. și Pedag. București, 1964.
- [7] Hamburg, P., *Despre spațiul părților unui spațiu topologic*. Stud. Cerc. Mat. Cluj, **11**, nr. 1, 23—33 (1960).
- [8] Hausdorff, P., *Gestufte Räume*, Fundamenta Mathematicae. Tom XXV, 486—502 (1935).
- [9] Kantorowitch, J., *Sur les espaces semi-ordonnés linéaires et leurs applications à la théorie des opérations linéaires*, C.R. Acad. Sci. de l'URSS D.A.N. **4**, 11—14 (1935).
- [10] Kisynski, J., *Convergence du type  $\mathcal{L}$* , Colloquium Math. Vol. VII. fasc. 2, 205—211 (1960).
- [11] Ney, A., *Contributions à la théorie de la convergence des suites et des séries d'ensembles dans  $\mathcal{E}(\mathbb{E})$* , I<sup>e</sup>. Mathematica **13**, (36), **1**, 127—139, (1971).
- [12] —, Idem. II<sup>e</sup>. Mathematica **14**(37), **2**, 275—287 1972.
- [13] —, Idem. III<sup>e</sup>. Mathematica **16**(39), **1**, 109—129, 1974.
- [14] Nicolescu, M., *Analiză matematică*, vol. I. Ed. Tehnică, București, 1957.
- [15] —, *Analiză matematică* vol. III, Ed. Tehnică București, 1960.
- [16] Uryson, P., *Sur les classes ( $\mathcal{L}$ ) de M. Fréchet*, L'enseignement Mathématique **XXV** 77—83 (1926).

Reçu le 26 Dec. 1976.