MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, N° 2, 1977, pp. 113–116

ANWENDUNG DES STEFFENSEN – VERFAHRENS ZUR LÖSUNG VON INTEGRALGLEICHUNGEN

von

MARTIN BALÁZS

(Cluj-Napoca)

Es sei X ein Banachraum und P ein Operator der X in X abbildet. Betrachtet wird die Gleichung.

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

wobei θ das Nullelement des Raumes X bezeichnet. O.B.d.A. können wir annehmen, dass diese Gleichung die Gestalt

$$P(x) = x - \Phi(x) = \theta \tag{2}$$

hat. Benutzt man zur Lösung der Gleichung (2), das Steffensen-Verfahren [5], das bekanntlich ein Spezialfall des Sehnenverfahrens [4] ist, dann werden die Näherungselemente nach der Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) \tag{3}$$

berechnet. Dabei bezeichnet $\Gamma_n = [x_n, u_n; P]^{-1}$ die Inverse der Steigung erster Ordnung des Operators P bezüglich der voneinander verschiedenen Stützstellen x_n und $u_n = \Phi(x_n)$ [1]. Bei der Anwendung dieses Verfahrens geht man von einem Startelement x_0 aus, berechnet u_0 und ermittels dann die folgenden Näherungselemente nach (3).

Im Folgenden wenden wir das Steffensen-Verfahren zur Lösung der Integralgleichung

$$x(s) = \int_0^1 K[s, t, x(t)]dt \tag{4}$$

an, wobei $K:[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion bezeichnet. Wir wählen $X = C[0, 1]$ und setzen

$$P(x) = x(s) - \int_0^1 K[s, t, x(t)]dt,$$

$$\Phi(x) = \int_0^1 K[s, t, x(t)]\,dt.$$

Die Steigungen erster Ordnung der Operatoren P und Φ sind dann [2]:

$$[x_1\, x_2 ;\, P]h = h(s) - \int_0^1 \frac{K[s,\, t,\, x_1(t)] - K[s,\, t,\, x_2(t)]}{x_1(t) - x_2(t)}\, h(t)dt = h - [x_1,\, x_2 ;\, \Phi]h ;$$

$$[x_1,\, x_2,\, x_3 ;\, P](hk) = [x_1,\, x_2,\, x_3 ;\, \Phi](hk) =$$

$$= \int_0^1 \frac{K[s,t,x_3(t)][x_1(t)-x_2(t)] - K[s,t,x_2(t)][x_1(t)-x_3(t)] + K[s,t,x_1(t)][x_2(t)-x_3(t)]}{[x_1(t)-x_2(t)][x_1(t)-x_3(t)][x_2(t)-x_3(t)]}\, h(t)k(t)dt$$

wobei h und k dem Raum $C[0, 1]$ angehören.

Wir betrachten nun die Fredholmsche Gleichung

$$[u,\, v ;\, P]\, x = y, \qquad y \in C[0, 1]. \tag{5}$$

Setzt man voraus, dass $u, v \in C[0, 1]$ so gewählt sind, dass 1 kein Eigenwert des Operators $x \mapsto [u, v ; P]x$ ist, dann hat (5) einen Lösungskern $R:[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ und die Lösung

$$x(s) = y(s) - \int_0^1 R(s, t)y(t)dt. \tag{6}$$

Aus (6) ergibt sich (vgl. [2]) die Abschätzung

$$\|[u,\, v ;\, P]^{-1}\| \leqslant 1 + A,$$

wobei

$$\int_0^1 |R(s, t)|dt \leqslant A.$$

Wendet man Satz 4.1 der Arbeit [1] an, so erhält man den folgenden Satz über die Lösbarkeit der Gleichung (4) mit Hilfe des Steffensen-Verfahrens:

SATZ 1. *Für die Gleichung* (4) *gebe es eine Funktion* $x_0 \in C[0, 1]$, *die folgenden Bedingungen genügt:*

1° *Dem Kern*

$$G_0(s, t) = \frac{K[s,\, t,\, x_0(t)] - K[s,\, t,\, u_0(t)]}{x_0(t) - u_0(t)}$$

entspricht ein Lösungskern R_0 *und es gilt*

$$\int_0^1 |R_0(s, t)|dt \leqslant A_0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 ;$$

2° $\displaystyle \|x_0 - u_0\| = \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left| x_0(s) - \int_0^1 K[s, t, x_0(t)]dt \right| \leqslant \eta_0 ;$

3° $|[x_1, x_2 ; K]| \leqslant M$, $|[x_1, x_2, x_3 ; K]| \leqslant L$ *für alle* $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ *und alle voneinander verschiedenen Stützstellen* $x_1, x_2, x_3 \in C[0, 1] \cap S(x_0, r)$, *wobei* $S(x_0, r)$ *die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt* x_0 *und dem Radius*

$$r = \max\, \{\eta_0(1 + 2B_0),\ \eta_0(1 + 2B_0M)\},\ B_0 = 1 + A_0$$

bezeichnet;

4° $h_0 = B_0^2L(M + 1)\eta_0 < \frac{1}{3}$.

Dann kann das Steffensen-Verfahren [1] *zur Lösung der Gleichung* (4) *angewendet werden. Die nach* (3) *gebildete Folge* (x_n) *konvergiert gegen eine Lösung* x^* *der Gleichung* (4) *die in der Kugel* $S(x_0, r)$ *liegt und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant 4B_0\eta_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} (3h_0)^{2^n-1}.$$

Benutzt man Satz 4.2 der Arbeit [1], so erhält man weiterhin.

SATZ 2. *Sind die Bedingungen von Satz 1 erfüllt und hat die Gleichung* (4) *eine Lösung* $\tau \in C[0,1]$ *die in der Kugel* $\|x_0 - x\| \leqslant 2B_0\eta_0$ *liegt, dann ist* τ *die einzige Lösung der Gleichung* (4) *die dieser Kugel angehört und die nach* (3) *gebildete Folge konvergiert gegen* τ. *Ausserdem gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\tau - x_n\| \leqslant 3B_0\eta_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} (3h_0)^{2^n+2}.$$

LITERATUR

[1] Balázs M., *Contributions to the study of solving the equations in Banach spaces.* Studia Univ. Babeş–Bolyai, **2**, 89–90 (1970).

[2] Balázs, M., *Asupra aplicării metodei coardei la rezolvarea ecuaţiilor integrale neliniare.* Stud. Cerc. Mat. **23**, 841–844 (1971)

[3] Balázs M. and Goldner G., *On the aproximative solving the integral equations.* (in Druck).

[4] Sergeev, A. S., *O metode hord.* (Russian). Sibirsk. Mat. J. 2, 282–289 (1961).

Received 6. V. 1977.

Universitatea Babeş–Bolyai
Facultatea de Matematică
Cluj-Napoca