MATHEMATICA—REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, N° 2, 1977, pp. 185–191

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES QUI INTERVIENNENT DANS LA DÉFINITION DE LA CONVEXITÉ

Par

ELENA POPOVICIU

(Cluj-Napoca)

1. La notion de convexité intervient aujourd'hui dans des nombreux domaines des mathématiques et dans l'étude des problèmes applicatifs les plus divers. On ne peut pas concevoir, par exemple, la théorie de l'optimisation et ses applications, sans y faire intervenir la notion de convexité.

Dans ce travail nous désirons mettre en évidence certains aspects du developement de la notion de fonction convexe. Nous commençons par considérer comme des étapes décisives du procesus d'évolution, que nous allons examiner, les trois suivantes. Il s'agit d'une première étape qui commence avec les idées de JENSEN [1], une deuxième étape dont le début est marqué par les travaux de TIBERIU POPOVICIU [6] et une troisième étape dont l'idée centrale est celle de la convexité par rapport a un ensemble interpolatoire qui n'est pas soumis à la condition de linéarité. L'idée même de l'interpolation est présente dans chacune des étapes. Nous n'avons pas l'intention d'y présenter une analyse chronologique. Nous allons souligner seulement les idées qui presentent un intérêt pour notre point de vue.

2. Quand il a introduit la notion de fonction convexe d'ordre supérieur, sur un ensemble quelconque de points, TIBERIU POPOVICIU a utilisé comme point de départ la différence divisée d'ordre correspondant [6]. $\mathbf{R}$ étant l'ensemble des nombres réels et $n \geqq -1$ entier fixé, considérons la fonction $f: X \to \mathbf{R}$ où l'ensemble $X \subseteq \mathbf{R}$ contient au moins $n+2$ points distincts. Soit $\mathfrak{D}_X$ l'ensemble des fonctions réelles qui sont définies sur l'ensemble X. Dans le travail [6], TIBERIU POPOVICIU a donné la

DÉFINITION (P.1). *On dit que la fonction f est convexe (nonconcave, polynomiale, nonconvexe respectivement concave) d'ordre n, sur l'ensemble X, si pour chaque système $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, de $n+2$ points distincts de l'ensemble X, on a $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0$ ($\geqq 0$, $= 0$, $\leqq 0$ respectivement < 0).*

Avec $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ on a désigné la différence divisée de la fonction f sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, c'est à dire le coefficient de x^{n+1} dans le polynome de Lagrange $L(\mathfrak{L}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)$ de degrès $n+1$, qui prend les valeurs de la fonction f sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$.

Il est clair que beaucoup de résultats qui s'obtiennent, en acceptant la définition (P.1), ont à leur base la propriété de linéarité de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ par rapport à l'argument f et en même temps celle de linéarité de l'ensemble $\mathfrak{L}_{n+1}$ des polynomes de degrès au plus égal à $n+1$. Il est, donc, trez important de preciser comment on peut développer la théorie, qui nous interesse, sans utiliser ces propriétés de linéarité.

À côté de la définition (P.1), dans le travail [6], on trouve aussi une autre définition. Les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ étant soumis à la condition

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}, \tag{1}$$

on considère la différence $f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2})$ qui peut s'exprimer de la manière suivante

$$f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) = (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \ldots (x_{n+2} - x_{n+1})[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]. \tag{2}$$

Sous les conditions (1), le signe de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ est le signe de la différence $f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2})$.

On trouve, dans le travail [6], la

DÉFINITION (P.2). *On dit que la fonction f est convexe (nonconcave, polynomiale, nonconvexe respectivement concave) d'ordre n, sur l'ensemble X, si pour chaque systéme (1) de points, de l'ensemble X on a $f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) > 0$ ($\geqq 0$, $= 0$ $\leqq 0$ respectivement < 0).*

La définition (P.2) nous offert un language géométrique pour exprimer le comportement de la fonction f par rapport aux éléments de l'ensemble $\mathfrak{L}_n$. Les deux définitions (P.1) et (P.2) sont équivalentes. Il faut encore remarquer, qu'en considérant les propriétés de convexité, nonconcavité, polynomialité, nonconvexité respectivement concavité d'ordre n *sur un ensemble X quelconque* au lieu de les considérer *sur un intervalle*, les résultats qui s'obtienent sont plus généraux.

Considérons maintenant la définition (P.1). Supposons que la fonction $f: X \to \mathbf{R}$ est convexe (concave) d'ordre n, sur l'ensemble X. La différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ étant en même temps la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; P]$ où $P = L(\mathfrak{L}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ il en résulte que le polynome P est aussi convexe (concave) d'ordre n sur l'ensemble X

(la condition $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; P] > 0$ (< 0) signifie que le coefficient de x_{n+1} dans le polynome P est positif (négatif), c'est à dire $[u_1, u_2, \ldots, u_{n+2}; P] > 0$ (< 0) quel que soit le système de $n+2$ points distincts $u_1, u_2, \ldots, u_{n+2}$). En désignant par $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}: \mathfrak{D}_X \to \mathfrak{L}_{n+1}$ l'opérateur qui fait correspondre à f le polynome $L(\mathfrak{L}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)$, la convexité (concavité) d'ordre n de la fonction f, sur l'ensemble X, s'exprime par : $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}(f)$ est convexe (concave) d'ordre n, pour chaque système de $n+2$ points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ de l'ensemble X. La conséquence qui en résulte est la

PROPOSITION 1. *Si la fonction f est convexe d'ordre n ou bien concave d'ordre n sur l'ensemble X, alors, quels que soient les points distincts x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, de l'ensemble X, le polynome $L(\mathfrak{L}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)$ ne se réduit pas a un élément de l'ensemble $\mathfrak{L}_n$.*

Le problème qu'on doit résoudre et le suivant : la réciproque de la proposition 1 est-elle vraie ? Il est facile de construire une fonction f dont les image $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}(f)$ ont le degrès effectif égal a $n+1$, en temps que la différence divisée $[v_1, v_2, \ldots, v_{n+2}; f]$ prend des valeurs positives aussi que des valeurs négatives. Pour obtenir donc la conclusion *f est convexe d'ordre n ou bien concave d'ordre n sur X*, il faut ajouter à la condition *$L(\mathfrak{L}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f) \notin \mathfrak{L}_n$ quels que soient les points distincts x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, de l'ensemble X*, une hypotèse suplémentaire. On peut énoncer la

PROPOSITION 2. *Si la fonction $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et quels que soient les points distincts x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ de l'intervalle $[a, b]$ l'on a $L(\mathfrak{L}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; g) \notin \mathfrak{L}_n$, alors g est convexe d'ordre n sur $[a, b]$ ou concave d'ordre n sur $[a, b]$.*

La démonstration résulte de la continuité de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; g]$ par rapport à l'ensemble des variables x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, pour g continue et fixée.

La positivité (ou bien la négativité) de la différence $f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2})$, quels que soient les points (1) de l'ensemble X, a comme conséquence : *si la fonction f est convexe (ou bien concave) d'ordre n sur l'ensemble X, alors elle est $(n+1)$ — valente par rapport a l'ensemble $\mathfrak{L}_n$, sur X*, c'est à dire qu'elle ne peut prendre les valeurs d'un polynome de degrès n qu'au plus sur $n+1$ points distincts de l'ensemble X. En considérant donc les opérateurs $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}: \mathfrak{D}_X \to \mathfrak{L}_n$, tel que pour chaque système $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ de $n+1$ points distincts de l'ensemble X, l'on a $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(f) = L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$, on peut énoncer la

PROPOSITION 3. *Si la fonction f est convexe (ou concave) d'ordre n, sur l'ensemble X, alors quels que soient les deux systemes distincts de points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ et $x''_1, x''_2 \ldots, x''_{n+1}$, on a $V_{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}}(f) \neq V_{x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+1}}(f)$.*

La proposition 3 nous permet d'affirmer : *si la fonction f est convexe (ou concave) d'ordre n, sur l'ensemble X, alors, quels que soient les points (1) de l'ensemble X, on a $L(\mathfrak{L}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) \neq L(\mathfrak{L}_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f)$.* Cette affirmation est équivalente avec la proposition 1. Il en résulte, donc, que seule, la condition de $(n+1)$ — valence par rapport à l'ensemble $\mathfrak{P}_n$, sur X, n'assure pas la convexité (ou la concavité) d'ordre n de la fonction f sur X. On sait, d'après [7], qu'en ajoutant l'hypothèse de continuité, sur $X = [a, b]$, on obtient la convexité (ou la concavité) d'ordre n sur $[a, b]$. On peut énoncer la

PROPOSITION 4. *Si la fonction $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et quels que soient les deux systemes distincts de points distincts $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ et $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+1}$ de l'intervalle $[a, b]$, on a $V_{x'_1 x'_2 \ldots x'_{n+1}}(g) \neq$ $\neq V_{x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+1}}(g)$, alors la fonction g est convexe d'ordre n sur $[a, b]$ ou concave d'ordre n sur $[a, b]$*

Les propositions que nous venons d'énoncer contiennent des propriétés bien connues [5]. Mais ici nous avons fait intervenir les opérateurs $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}$ et $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$. Les images de la fonction f abtenues par les opérateurs $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}$ nous donnent la possibilité d'étudier le comportement de la fonction f par rapport à l'ensemble $\mathfrak{P}_{n+1}$. Cet ensemble étant partagé en trois classes, $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{P}^+_{n+1}$ (l'ensemble des polynomes de degrès $n+1$ avec le coefficient de x^{n+1} positif) et $\mathfrak{P}^-_{n+1}$ (l'ensemble des polynomes de degrès $n+1$ avec le coefficient de x^{n+1} négatif), l'appartenance de tous les images $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}(f)$ à l'une et toujours à la même classe met en évidence les propriétées de convexité, polynomialité respectivement concavité d'ordre n. Les images de la fonction f obtenues par les opérateurs $V_{x_1, x_2, \ldots x_{n+1}}$ nous donnent la possibilité d'examiner le comportement de la fonction f par rapport à l'ensemble $\mathfrak{P}_n$. Ce comportement résulte en comparant, pour chaque système $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ de points distincts, l'image $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(f)$ avec f. On peut considérer $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(f)$ comme un prolongement, à l'ensemble X, de la restriction aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ de la fonction f. On compare donc ce prologement avec f, en utilisant (2). En général, il s'agit d'un procédé d'interpolation $(\mathfrak{P}_n, \mathfrak{D}_X, \mathcal{V})$ et d'un procédé d'interpolation $(\mathfrak{P}_{n+1}, \mathfrak{D}_X, \mathcal{U})$ où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des opérateurs $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des opérateurs $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}$. Quel que soit $f \in \mathfrak{D}_X$ et $v \in \mathcal{V}$, l'on a $v(f) \in \mathfrak{P}_n$ et si $f \in \mathfrak{P}_n$, alors on a toujours $v(f) = f$. Les propriétées du triplet $(\mathfrak{P}_{n+1}, \mathfrak{D}, \mathcal{U})$ sont analogues. Il y a entre les deux triplets une liaison que nous avons precisée en [5]. On peut remplacer les ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ avec d'autres ensembles d'opérateurs ayant la propriété, donnée plus haut pour l'opérateur v, que nous avons appellée interpolatoire [4]. On peut construire des opérateurs ayant la propriété interpolatoire en utilisant l'interpolation au sens de Gontscharof [5] (voir aussi [4]). Il s'agit donc de fondamenter la théorie de la convexité d'ordre supérieur en utilisant des divers ensembles d'opérateurs interpolatoires. Les ensemble $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{P}_{n+1}$ peuvent être remplacés par des ensembles interpolatoires quelconques.

Une autre remarque, que nous pouvons faire est la suivante. Comme nous l'avons souligné, le comportement de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots x_{n+2}; f]$ de la fonction f exprime en même temps le comportement de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; P]$, où $P = L(\mathfrak{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)$ c'est à dire, au lieu de $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, on peut considérer

$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}(f)]$. L'idée qui se dégage est qu'il s'agit d'une fonctionnelle linéaire $A : \mathfrak{P}_{n+1} \to \mathbf{R}$, qui prend une valeur constante α (dans ce cas, nulle) sur l'ensemble $\mathfrak{P}_n$ et que, pour exprimer les propriétés de convexité, nonconcavité, polynomialité, nonconvexité respectivement concavité d'ordre n, sur X, de la fonction f, on se sert de la fonctionnelle A dont la valeur $A(U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}(f))$, prise sur l'image $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}}(f)$ de la fonction f, nous donne l'information cherchée. Il est claire que pour chaque manière de la quelle on donne A, on obtient un comportement correspondant de la fonction f.

3. Supposons maintenant que $n \geqq 1$ et considérons les ensembles $\mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{n+1}$. Dans notre travail [3], nous avons défini l'ensemble

$$(3) \qquad S\left(\mathfrak{P}_{n+1}; \begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n+1} \\ f(x_1), & f(x_2), & \ldots, & f(x_{n+1}) \end{matrix}\right)$$

qui s'appelle épis interpolatoire d'ordre 1 de l'ensemble $\mathfrak{P}_{n+1}$ et qui est, par définition, l'ensemble

$$(4) \qquad \{P \in \mathfrak{P}_{n+1} | \, P(x_i) = f(x_i), \ i = 1, 2, \ldots, n+1\},$$

les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, de l'ensemble X satisfaisant aux conditions $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ et la fonction f étant fixée. Si $X = [a, b]$ et f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors dans l'épis (3) il existe un élément et un seul de la meilleure approximation pour la fonction f, sur $[a, b]$, c'est à dire, pour le quel

$$(5) \qquad \inf\left\{ \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \;\middle|\; P \in S\left(\mathfrak{P}_{n+1}; \begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n+1} \\ f(x_1), & f(x_2), & \ldots, & f(x_{n+1}) \end{matrix}\right)\right\}$$

est ateint. Mais la notion d'épis interpolatoire d'ordre 1, de l'ensemble $\mathfrak{P}_{n+1}$ a encore d'autre applications. Nous allons en donner une. Commençons par la construction de l'ensemble (3), en utilisant les opérateurs de l'ensemble $\mathcal{U}$ et de l'ensemble $\mathcal{V}$. Soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

THÉORÈME 1. *L'ensemble*

$$(6) \qquad \{P \in \mathfrak{P}_{n+1} | V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(P) = V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}(f)\}$$

est un épis interpolatoire d'ordre 1, de l'ensemble $\mathfrak{P}_{n+1}$.

Pour démontrer le théorème 1, on constate que l'ensemble (6) contient le polynome $L(\mathfrak{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ et touts les polynomes de degrès éfectif $n+1$ qui prend les valeurs de la fonction f sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. L'ensemble (6) est donc égale avec l'épis (3).

Nous allons utiliser maintenant les épis de la forme (6) pour donner encore une interpretation de la convexité d'ordre n. Considérons les systèmes distincts de points de l'ensemble X.

$$(7) \qquad x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+1}$$

et

$$x''_1 < x''_2 < \ldots < x''_{n+1} \tag{8}$$

Désignons par s_1 le système (7) et par s_2 le système (8). Nous convenons de dire que s_1 est avant s_2 si l'on a $x'_2 = x''_1,\ x'_3 = x''_2, \ldots,\ x'_{n+1} = x''_n$. Dans ce cas nous utilisons la notation $s_1 \prec s_2$. Nous pouvons construire les épis

$$\{P \in \mathfrak{L}_{n+1} | V_{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}}(P) = V_{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}}(f)\} \tag{9}$$

et

$$\{P \in \mathfrak{L}_{n+1} \,|\, V_{x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}, x''_{n+1}}(P) = V_{x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}, x''_{n+1}}(f)\}. \tag{10}$$

DÉFINITION 1. *Nous disons que l'épis (9) est sous l'épis (10) si $s_1 \prec s_2$ et si la valeur du polynome $V_{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}}(f)$, sur le point x''_{n+1} est plus petite que la valeur, sur le même point x''_{n+1}, du polynome $V_{x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}, x''_{n+1}}(f)$.*

DÉFINITION 1. *Nous disons que la fonction f est S-convexe d'ordre n sur l'ensemble X si, quels que soient les systémes de points (7) et (8) de l'ensemble X, satisfaisant á la condition $s_1 \prec s_2$, l'épis correspondant (9) est sous l'épis correspondant (10).*

THÉORÈME 2. *Si l'épis (9) est sous l'épis (10), alors la différence divisée sur les points $x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}, x''_{n+1}$, du polynome $L(\mathfrak{L}_n;\ x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}; f)$ est plus petite que la différence divisée sur les points $x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}, x''_{n+1}$, du polynome $L(\mathfrak{L}_n;\ x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}, x''_{n+1}; f)$.*

THÉORÈME 3. *La fonction f est S-convexe d'ordre n sur X si et seulement si elle est convexe d'ordre n sur X.*

La démonstration du théorème 2 est donnée dans notre livre [5]. La démonstration du théorème 3 résulte en utilisant le théorème 2 et la relation de récurrence des différences divisées.

Les définitions et les théorèmes que nous avons données concernant la convexité d'ordre n, ont des analogues pour la concavité d'ordre n.

Nous pouvons maintenant préciser le comportement du polynome de la méilleure approximation au sens donnée dans la formule (5).

THÉORÈME 4. *Si $X = [a, b]$ et la fonction f, continue sur l'intervalle $[a, b]$ est convexe (concave) d'ordre n sur $[a, b]$, alors l'élément de la meilleure approximation de f, sur $[a, b]$, par des éléments appartenant a l'épis 3, est dans $\mathfrak{L}^+_{n+1}$ (dans $\mathfrak{L}^-_{n+1}$).*

Pour démontrer le théorème 4 il suffit de remarquer, les hypotèses de l'énoncé étant remplies, que le polynome $L(\mathfrak{L}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ partage l'ensemble des polynomes de degrès éfectif $n+1$ qui appartiennent à l'épis 3, en deux classe: la classe de ceux qui à la droite de x_{n+1}, ont des valeurs plus grandes que les valeurs de $L(\mathfrak{L}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ et la classe de ceux qui à la droite de x_{n+1}, ont des valeurs plus petites que les valeurs correspondantes du polynome $L(\mathfrak{L}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$.

Les définitions et les théorémes que nous avons données restent valables si on remplace les ensembles $\mathfrak{L}_n \subset \mathfrak{L}_{n+1}$ avec deux ensembles $F_n \subset F_{n+1}$, interpolatoires d'ordre n respectivement d'ordre $n+1$. Le problème qui se pose est de preciser qu'est ce qu'on peut garder quand on considère des procédés d'interpolation généralisés [4]. Si les ensembles interpolatoires $F_n \subset F_{n+1}$ ne sont pas linéaires, alors les opérateurs qui intervienent au lieu de $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$ et au lieu de $U_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$ ne sont pas linéaires. La propriété contenue dans la définition 1 représente une certaine monotonie des opérateurs $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$. En remplacant les $V_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$ avec des opérateurs d'interpolation au sens précisé dans [4], le problème qui se pose est de trouver le correspondant de cette propriété de monotonie. Dans un autre travail nous allons exposer en détail les resultats qui se dégagent, en partant de la définition 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jensen, J.L.W.V., *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30**, 175–173.(1906).

[2] Gontscharov, V. L., *Teoria interpolirovania i priblijenia funkţii*, Goz. Izd. Moskva-Leningrad (1954).

[3] Moldovan, (Popoviciu), Elena, *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica, **1(24)**, 49–80 (1959).

[4] — *Sur l'interpolation généralisée*, idem, 2(25), 143–147 (1960).

[5] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, 1972

[6] Popoviciu, Tiberiu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réélles*, Mathematica, **VIII**, 1–85 (1933).

[7] Popoviciu, Tiberiu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945

Recu le 12. XI. 1977.

Str. Dorobanţilor 40
Cluj-Napoca