MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, Nº 2, 1977, pp. 203—225

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ CONCERNANT LES PROBLÈMES D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

par
ŞTEFAN ŢIGAN
(Cluj-Napoca)

0. Notations

Dans ce travail nous allons employer souvent les notations :
N — l'ensemble des nombres naturels,
R — l'ensemble des nombres réels,
R^n — l'espace euclidien n-dimensionnel,
O — l'origine de l'espace R^n,
$\leqslant_K$ — la relation d'ordre de l'ensemble ordonné K,
O_X — l'élément nul de l'espace linéaire X,
$\mathcal{V}(X)$ — un système fondamental d'entourages pour l'espace uniforme X,

$$V(x_0) = \{x \in X \mid (x, x_0) \in V\}, \text{ où } V \in \mathcal{V}(X),$$

Int (C), Fr (C), Cl (C) — l'interieur, la frontière et la fermeture topologique de l'ensemble C de l'espace topologique X,
$\mathcal{F}(X, Y)$ — l'ensemble des applications définies sur X à valeurs dans Y.

§1. Introduction

Nous supposons que X est un espace uniforme séparé, Y est un espace topologique ordonné et Z est un espace topologique qui est en même temps un ensemble reticulé relativement complet.

On considère une extension, $\hat{Z} = Z \cup \{z_\infty\}$ de l'ensemble ordonné Z, où z_∞ verifie l'inégalité $z \leqslant_{\hat{Z}} z_\infty$, pour tout $z \in Z$.

L'ensemble $\hat{Z}$ est organisé comme un espace topologique de la manière suivante :

(i) les ensembles ouverts de $\hat{Z}$, qui ne contiennent pas l'élément z_∞ sont les ensembles ouverts de l'espace topologique Z ;

(ii) tout ensemble ouvert de $\hat{Z}$, qui contient l'èlèment z_∞ a la forme $G \cup \{z_\infty\}$, où G est un ensemble ouvert nonvide de Z.

On désigne par $(\hat{\tau})$ la topologie de Z définie ci-dessus.

Supposons encore données : les applications $f : X \to Z$, $g : X \to Y$, l'élément $b \in Y$ et le sousensemble D de X, $D \neq \emptyset$.

Le problème d'optimisation qu'on va étudier dans le travail est le suivant :

$P(g, b)$: Déterminer

$$\sup_{\hat{Z}}\{f(x) \mid x \in Ab\}, \tag{1.1}$$

où pour tout $y \in Y$,

$$Ay = \{x \in D \mid g(x) \leqslant_Y y\}. \tag{1.2}$$

L'ensemble Ab est l'ensemble des solutions admissibles du problème $P(g, b)$. Par la formule (1.2) nous avons défini au fait, une aplication multivoque de Y dans X, désignée par A. Nous désignerons, aussi : $Y(A) = \{y \in Y \mid Ay \neq \emptyset\}$. On considère, également, l'application $s : Y(A) \to \hat{Z}$, définie par

$$s(y) = \sup_{\hat{Z}} \{f(x) \mid x \in Ay\}. \tag{1.3}$$

Le but de ce travail est d'étudier la stabilité du problème $P(g, b)$ aux perturbations de la fonction contrainte g et du terme libre b, c'est-à-dire, de chercher des conditions dans lesquelles la fonction s des valeurs optimales du problème $P(g, b)$ et l'application multivoque A (des ensembles des solutions admissibles) sont continues ou semicontinues. On peut donner facilement des exemples (voir [1], [4]), qui montrent qu'une telle stabilité n'est pas une conséquence seulement de la continuité des fonctions f et g.

Pour la programmation mathématique finie dimensionnelle, dans certaines hypothèses de compacité de l'ensemble des solutions admissibles, des conditions suffisantes de stabilité ont été obtenues par EVANS J. P., GOULD F. J. [4] (stabilité relativement aux perturbations du b), et par GREENBERG H. J., PIERSKALLA N. P. [6] (stabilité relativement aux perturbations de la fonction contrainte g). Dans un cas plus général, MARTINET B. [8], en liaisons avec l'étude de la convergence d'une méthode d'accumulation des contraintes pour la résolution d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle réelle définie sur un espace de Banach réflexif avec une infinité de contraintes, obtient quelques conditions de stabilité sans l'hypothèse de compacité sur l'ensemble des solutions admissibles. Aussi, dans [11], les résultats de [4] on été étendus aux problèmes d'optimisation avec contraintes, d'une fonctionnelle réelle définie sur un espace métrique.

Concernant l'application de la stabilité à l'étude des méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation, nous rappelons encore les travails [5], [7], [8], [9].

§2. Définitions

Supposons que l'espace topologique ordonné Y vérifie les conditions suivantes :

(i) Y est un espace linéaire ordonné ;

(ii) Y est un groupe topologique ordonné séparé par rapport à l'opération „+" de l'espace linéaire, c'est-à-dire, Y est à la fois groupe ordonné et groupe topologique separé, ayant un systhème fondamental de voisinages $w(O_Y)$, tel que, pour tout $W(O_Y) \in w(O_Y)$, on a :

$$y', y'' \in W(O_Y) \text{ et } y' \leqslant_Y y \leqslant_Y y'' \Rightarrow y \in W(O_Y).$$

Alors l'espace Y s'appelle *l'espace linéaire ordonné avec la proprieté* (U), s'il vérifie les conditions (i), (ii) et

(U.1) il existe un élément $e_Y \in Y$, tel que

$$\lambda_n \to 0 \ (\lambda_n \in R) \text{ implique } \lambda_n e_Y \to O_Y, \tag{2.1}$$

(2.2) il existe un voisinage $W(O_Y)$ tel que $y \in W(O_Y)$ implique $-e_Y \leqslant_Y y \leqslant_Y e_Y$;

(U.2) l'ensemble $C_Y = \{y \in Y \mid O_Y \leqslant y\}$ est fermé.

Un élément $e_Y \in Y$, qui vérifie les conditions (2.1) et (2.2) s'appelle *élément unité* de l'espace Y. Dans un espace linéaire ordonné Y avec la proprieté (U), nous disons que les éléments y_1 et y_2 de Y se trouvent dans la relation $y_1 \ll_Y y_2$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y_1 \leqslant_Y y_2 - \varepsilon e_Y$.

On peut montrer facilement que :

PROPOSITION 2.1. *Si Y est un espace linéaire ordonné avec la proprieté (U), alors pour tout voisinage $W(O_Y)$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que la relation $-\varepsilon e_Y \leqslant_Y y \leqslant_Y \varepsilon e_Y$ implique $y \in W(O_Y)$.*

Maintenant, nous supposons que : X est un espace topologique, Y est un espace linéaire ordonné avec la proprieté (U) et $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.

On peut définir sur l'ensemble F la relation d'ordre „$\leqslant_{\mathcal{F}}$"

$$f_1 \leqslant_{\mathcal{F}} f_2 \Leftrightarrow f_1(x) \leqslant_Y f_2(x), \text{ pour tout } x \in X. \tag{2.3}$$

On peut introduire, également, dans $\mathcal{F}$ une structure linéaire, de la manière suivante :

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ pour tout } x \in X, \tag{2.4}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \text{ pour tout } x \in X, \ \lambda \in R. \tag{2.5}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ peut être muni d'une structure topologique (τ), ayant le systhème fondamental de voisinages :

(2.6) $$\mathcal{V}(f) = \{V_\varepsilon(f) \mid \varepsilon \in R\},$$

où $V_\varepsilon(f) = \{f' \in \mathcal{F} \mid -\varepsilon e_Y \leqslant_Y f(x) - f'(x) \leqslant_Y \varepsilon e_Y$ pour tout $x \in X\}$.

PROPOSITION 2.2 *L'ensemble $\mathcal{F}$ muni par la relation d'ordre $\leqslant_{\mathcal{F}}$, (définie par (2.3)), la structure de l'espace linéaire définie par (2.4), (2.5), et la structure topologique (τ) est un espace linéaire ordonné avec la propriété (U).*

Soit C un ensemble ordonné et $h: C \to Y$. L'application h s'appelle isotone si $c_1 \leqslant_C c_2$ implique $h(c_1) \leqslant_Y h(c_2)$.

L'ensemble C s'appelle dirigé (à gauche) si pour tout c', c'' de C il existe $c \in C$ tel que $c \leqslant_C c'$ et $c \leqslant_C c''$.

Soit T une application multivoque de Y dans X. On désignera par Ty l'image de l'élément $y \in Y$ par l'application T. On désigne encore : $Y(T) = \{y \in Y \mid Ty \neq \emptyset\}$.

L'application multivoque T est *semi-continue supérieurement (inférieurement)* en $y' \in Y(T)$ si pour tout entourage $V \in \mathcal{V}(X)$, il existe un voisinage $W(y')$ tel que $y \in W(y')$ $(y \in W(y') \cap Y(T))$ implique $Ty \subseteq V(Ty')$ $(Ty' \subseteq V(Ty))$. L'application multivoque T s'appelle *continue* en $y' \in Y(T)$ si elle est à la fois semicontinue supérieurement et inférieurement en y'.

Pour simplifier l'écriture nous ferons les abreviations: „T est s.c.s. (s.c.i.) en y'" au lieu de „T est semi-continue supérieurement (inférieurement) en y'".

Soient $\mathcal{X}$ un espace topologique, Z un espace linéaire ordonné avec la propriété (U) et F une application de $\mathcal{X}$ dans $\hat{Z}$. On suppose que $\hat{Z}$ est muni de la topologie $(\hat{\tau})$ (considerée dans § 1).

On dira que la fonction F est semi-continue supérieurement (inférieurement) en $x' \in \mathcal{X}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $M(x')$, tel que pour tout $x \in M(x')$ on a

$$F(x) \leqslant_{\hat{Z}} F(x') + \varepsilon e_Z \ (F(x) \geqslant_{\hat{Z}} F(x') - \varepsilon e_Z).$$

Remarque 2.1. On peut montrer facilement que si l'application F est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en x', alors elle est continue en x'.

Pour le reste du travail nous supposons que les espaces Z et Y sont des espaces linéaires ordonnés avec la propriété (U) et que l'espace X a un systhème fondamental dénombrable d'entourages.

Nous attachons encore au problème $P(g, b)$ l'application multivoque A_0 de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, Y)$ dans X, définie par

(2.7) $$A_0 g' = \{x \in D \mid g'(x) \leqslant_Y b\} \quad (g' \in \mathcal{F}),$$

et la fonction $s_0: \mathcal{F}(A_0) \to \hat{Z}$ $(\mathcal{F}(A_0) = \{g' \in \mathcal{F} \mid A_0 g' \neq \emptyset\})$ définie par:

(2.8) $$s_0(g') = \sup_{\hat{Z}} \{f(x) \mid x \in A_0(g')\}.$$

Définition 2.1. *On dira que le problème $P(g, b)$ a des contraintes semi-stables supérieurement (inférieurement) aux perturbations du b réspectivement de la fonction g, si l'application A est s.c.s. (s.c.i.) en b réspectivement A_0 est s.c.s. (s.c.i.) en g. On dira que le problème $P(g, b)$ a des contraintes stables aux perturbations du b réspectivement aux perturbations de la fonction contrainte g s'il a des contraintes semi-stables supérieurement et inférieurement aux perturbations du b respectivement aux perturbations de la fonction g.*

Définition 2.2. *Le problème $P(g, b)$ s'appelle semi-stable supérieurement (inférieurement) aux perturbations du b réspectivement aux perturbations de la fonction g, s'il a des contraintes semi-stables supérieurement (inférieurement) aux perturbations du b réspectivement aux perturbations de la fonction g et si la fonction s est semi-continue supérieurement (inférieure-en b respectivement la fonction s_0 est semi-continue supérieurement (inférieurement) en g. Le problème $P(g, b)$ s'appelle stable aux perturbations du b respectivement aux perturbations de la fonction g s'il est à la fois semi-stable supérieurement et inférieurement.*

Dans ce travail nous nous proposons d'étendre certains résultats de [4], [6], [8] et [11] au problème vectoriel $P(g, b)$.

§3. Proprietés concernant la continuité du supremum d'une fonction vectorielle

Soient f une fonction de $X \times Y$ dans Z et T une application multivoque de Y dans X (X ètant un espace uniforme, Y et Z étant des espaces linéaires ordonnés avec la propriété (U)). Nous définissons l'application $S: Y(T) \in \hat{Z}$ par :

(3.1) $$S(y) = \sup_{\hat{Z}} \{f(x, y) \mid x \in Ty\}.$$

Dans ce paragraphe on présente quelques propriétés concernant la continuité de l'application S, qui montre la liaison entre la continuité de l'application multivoque T et la stabilité des problèmes d'optimisation. Ces propriétés généralisent certaines résultats similaires, obtenus par plusieurs auteurs (voir, par exemple, BERGE C. [2], MEYER R. [9], TOLSTONOGOV A. [10], HOGAN W. W. [13]) lorsque f est une fonctionnelle réelle.

Par la suite, nous employerons les définitions suivantes.

La fonction $f: X \times Y \to Z$ s'appelle *partialement uniformement continue* supérieurement (inférieurement) en $y' \in Y$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $W(y')$ et un entourage $V \in \mathcal{V}(X)$, tel que: $(x, x') \in V$ et $y \in W(y')$ implique $f(x, y) \leqslant_Z f(x', y') + \varepsilon \cdot e_Z (f(x, y) \geqslant_Z f(x', y') - \varepsilon e_Z)$.

La fonction f s'appelle partialement uniformement continue en $y' \in Y$, si elle est en même temps partialement uniformement continue inférieurement et supérieurement en y'.

THÉORÈME 3.1. *Si $f: X \times Y \to Z$ est partialement uniformement continue supérieurement en $y' \in Y(T)$ et T est s.c.s. en y', alors l'application S est semi-continue supérieurement en y'.*

Démonstration. Supposons que $S(y') \in Z$, puisque dans le cas contraire, S est évidemment semi-continue supérieurement en y'. Mais, parce que f est partialement uniformement continue supérieurement en y', pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entourage $V \in \mathscr{V}(X)$ et un voisinage $W'(y')$, tel que $(x, x') \in V$ et $y \in W'(y')$, impliquent

$$f(x, y) - f(x', y') \leqslant_Z \varepsilon \cdot e_Z. \tag{3.2}$$

D'autre part, puisque T est s.c.s. en y' il résulte qu'il existe un voisinage $W''(y')$, tel que pour tout $y \in W''(y')$ on a :

$$T(y) \subseteq V(Ty'). \tag{3.3}$$

Mais pour tout $x \in V(Ty')$, il existe un élément $x' \in V(Ty')$, tel que $(x, x') \in V$, et alors de (3.2) il résulte que : $f(x, y) \leqslant_{\hat{Z}} f(x', y') + \varepsilon e_Z \leqslant_{\hat{Z}} S(y') + \varepsilon e_Z$, d'où, en tenant compte de (3.3), on obtient pour tout $y \in W(y') = W'(y') \cap W''(y')$, l'inégalité :

$$S(y) \leqslant_{\hat{Z}} S(y') + \varepsilon e_Z.$$

Par conséquent, l'application S est s.c.s. en y'.

THÉORÈME 3.2. *Si $f: X \times Y \to Z$ est partialement uniformement continue inférieurement en y', $S(y') \in Z$ et l'application multivoque T est s.c.i. en y', alors la fonction S (définie par (3.1)) est semicontinue inférieurement en y'.*

Démonstration. La démonstration du théorème 3.2 est similaire à celle du théorème 3.1.

Des théorèmes 3.1 et 3.2, ayant à la base la remarque 2.1, il résulte le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3. *Si la fonction $f: X \times Y \to Z$ est partialement uniformement continue en $y' \in Y(T)$, $S(y) \in Z$ et si l'application multivoque T est continue en y', alors S est continue en y'.*

Dans le cas où Ty' est un ensemble compact, on peut donner une variante du théorème 3.1, où l'hypothèse de partial uniforme-continuité est remplacée par celle de semicontinuité de la fonction f.

THÉORÈME 3.4. *Soit $y' \in Y(T)$. Si $f: X \times Y \in Z$ est semicontinue superieurement sur l'ensemble $Ty' \times \{y'\}$, T est s.c.s. en y' et Ty' est compact, alors S est semicontinue supérieurement en y'.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est semicontinue supérieurement sur $Ty' \times \{y'\}$ pour chaque $x \in Ty'$, il existe un voisinage $W_x(y')$ de y' et un entourage ouvert $V_x \in \mathscr{V}(X)$, tel que pour tout $y \in W_x(y')$ et $x' \in X$, qui vérifient la condition $(x, x') \in V_x$, on a l'inégalité

$$f(x', y) \leqslant_{\hat{Z}} f(x, y') + \varepsilon e_Z. \tag{3.4}$$

Soit $\mathscr{V}_1 = \{V_x(x) \mid x \in Ty'\}$. Mais parce que Ty' est compact, il existe un sousensemble fini $\{V_{x_1}(x_1), \ldots V_{x_n}(x_n)\}(x_i \in Ty', i = 1, 2, \ldots, n)$ tel que $Ty' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}(x_i)$.

Soit maintenant $W'(y') = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}(y')$, $V' = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Alors de (3.4) pour tout $y \in W'(y')$ et $x' \in V'(Ty')$, il résulte qu'on a les inegalités

$$f(x', y) \leqslant_{\hat{Z}} \sup_{\hat{Z}, 1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i, y') + \varepsilon e_Z \leqslant_{\hat{Z}} \sup_{\hat{Z}}\{f(x, y') | x \in Ty'\} + \varepsilon e_Z \leqslant_{\hat{Z}} S(y') + \varepsilon e_Z. \tag{3.5}$$

D'autre part, puisque T est s.c.s en y', il existe un voisinage $W''(y')$, tel que $y \in W''(y')$ implique $Ty \subseteq V'(Ty')$, d'où, en tenant compte de (3.5), pour tout $y \in W(y') = W'(y') \cap W''(y')$ il résulte que $S(y) \leqslant_{\hat{Z}} S(y') + \varepsilon e_Z$, ce qui signifie que S est semicontinue supérieurement en y'.

On a également le théorème suivant (similaire au Théorème 3.2) :

THÉORÈME 3.5. *Si Ty' est un ensemble compact et nonvide, f est continue sur $Ty' \times \{y'\}$ et T est s.c.i. en y', alors S est semicontinue inférieurement en y'.*

Démonstration. Soit donné $\varepsilon > 0$. Alors, parce que f est continue sur l'ensemble compact $Ty' \times \{y'\}$, il existe un voisinage $W'(y')$ est un entourage $V \in \mathscr{V}(X)$ et un sousensemble fini $D_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de Ty' tel que $Ty' \subseteq V(D_n)$ et pour tout $y \in W'(y')$ et $x \in V(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, on a

$$f(x_i, y') - \varepsilon e_Z \leqslant_Z f(x, y) \leqslant_Z f(x_i, y') + \varepsilon e_Z \ (i = 1, \ldots, n). \tag{3.6}$$

Mais, puisque T este s.c.i. en y' il existe un voisinage $W''(y')$, tel que pour tout $y \in W''(y')$, a lieu l'inclusion $Ty' \subseteq V(Ty)$. D'où en vertu des relations (3.6) et de l'inclusion $Ty' \subseteq V(D_n)$, on a : $S(y) \geqslant_{\hat{Z}} \sup_{\hat{Z}, 1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i, y') - \varepsilon e_Z \geqslant_{\hat{Z}} S(y') - 2\varepsilon e_Z$, pour tout $y \in W(y) = W''(y') \cap W'(y')$. Mais cela signifie que S est semicontinue inférieurement en y'. Le théorème est donc démontré.

En utilisant les théorèmes 3.4 et 3.6 et la remarque 2.1, on a l'analogue suivant du théorème 3.3.

THÉORÈME 3.6. *Si $f: X \times Y \to Z$ est continue sur $Ty' \times \{y'\}$, Ty' est compact et nonvide et T est continue en y', alors S est continue en y'.*

Remarque 3.1. Lorsque $Z = R$ et $f(x, y) = f(x)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$, de théorème 3.6 s'obtient le théorème du maximum (voir, BERGE C. [2], chap. VI, §3). Le théorème 3.5 reste également vrai, lorsque f est une fonctionnelle réelle semicontinue inférieurement (voir, BERGE C. [2]).

§4. Propriétés concernant les applications multivoques isotones semicontinue supérieurement et la semistabilité supérieure du problème P(g, b) aux perturbations du *b*

Dans ce paragraphe, lorsque l'ensemble de solutions admissibles du problème $P(g, b)$ est compact, en partant du théorème 3.4 et de quelques résultats concernant la semicontinuité des applications multivoques isotones, qui seront présentés ci-dessous, on obtient des conditions afin que le problème $P(g, b)$ soit semistable supérieurement aux perturbations du b.

Soit T une application multivoque de Y dans X. Nous appelons l'application T isotone si la relation $y' \leqslant_Y y''$ implique $Ty' \subseteq Ty''$.

L'application T s'appelle fermée en $y' \in Y$, si les conditions:

(i) $y_n \to y'$ $(y_n \in Y)$;

(ii) $x_n \to x'$ $(x_n \in X)$;

(iii) $x_n \in Ty_n$, pour tout $n \in N$;

impliquent $x' \in Ty'$.

On peut démontrer facilement les propositions suivantes:

PROPOSITION 4.1. *Si l'application g est semicontinue inférieurement sur D et l'ensemble D est fermé, alors l'application multivoque A (définie par* (1.2)) *est fermée en b.*

PROPOSITION 4.2. *L'application multivoque A est isotone.*

Par la suite nous allons présenter des conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une application multivoque T (de Y dans X) fermée en b et isotone soit semicontinue supérieurement en b.

Pour le reste du paragraphe nous supposons que $b \in Y(T) = \{y \in Y \mid Ty \neq \emptyset\}$, et que l'application multivoque T est fermée en b et isotone.

THÉORÈME 4.1. *S'il existe un élément $y' \gg_Y b$, tel que l'ensemble Ty' est compact, alors T est s.c.s. en b.*

Démonstration. D'abord, nous montrons que (dans les conditions du théorème) pour tout entourage ouvert $V \in \mathcal{V}(X)$, il existe $y'' \in Y$, $y'' \gg_Y b$, tel que $Ty'' \subseteq V(Tb)$. Pour démontrer cela on procède par la réduction à l'absurde, en supposant qu'il existe un entourage ouvert $V' \in \mathcal{V}(X)$, tel que:

$$Ty \setminus V'(Tb) \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Mais puisque $y' \gg_Y b$, il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n \in N$ et $n \geqslant n'$, on a l'inégalité:

$$y' \gg_Y b + \frac{1}{n} e_Y = b_n. \tag{4.2}$$

De (4.1), il résulte qu'il existe $x_n \in X$, tel que

$$x_n \in Tb_n \setminus V'(Tb), \text{ pour tout } n \in N. \tag{4.3}$$

Mais de (2.2) et du fait que T est isotone il résulte que $x_n \in Ty'$ pour tout $n \geqslant n'$. L'ensemble Ty' étant compact la suite (x_n) contient une sous-suite (x_{j_n}) qui converge vers un élément $x' \in Ty'$. Alors, puisque T est fermé en b et la suite $\left\{b + \frac{1}{j_n} e_Y\right\}$ converge vers b, il résulte que $x' \in Tb$. Donc $x' \in V'(Tb)$. Mais, parce que V' est un entourage ouvert il existe $j' \in N$, tel que pour $j_n \geqslant j'$ $(j_n \in N)$, $x_{j_n} \in V'(Tb)$, ce qui (lorsque $j_n \geqslant \max\{n', j'\}$) contredit la relation (4.3). Donc il existe $y'' \gg_Y b$, tel que:

$$Ty'' \subseteq V(Tb). \tag{4.4}$$

Mais de l'inégalité $y'' \gg_Y b$, il résulte l'existence d'un voisinage $W(b)$, tel que $y \in W(b)$ implique $y \gg_Y y''$. Étant donné T comme isotone, de (4.4), pour tout $y \in W(b)$, il vient $Ty \subseteq V(Tb)$. Donc T est s.c.s. en b. Le théorème est ainsi démontré.

A certaines conditions suplémentaires sur l'espace X il existe une réciproque du théorème 4.1.

THÉORÈME 4.2. *Soit X un espace uniforme localement compact et Tb compact. Alors, si T est s.c.s. en b, il existe $y' \in Y$, $y' \gg_Y b$, tel que Ty' soit compact.*

Démonstration. En effet, parce que Tb est compact et X est localement compact, il existe un entourage $V \in \mathcal{V}(X)$, tel que l'ensemble $V(Tb)$ est compact. Mais T étant s.c.s. en b et la suite $\left\{b + \frac{1}{n} e_Y\right\}$ étant convergent vers b, il existe $n' \in N$ tel que $Tb_n \subseteq V(Tb)$, pour tout $n \geqslant n'$ $(n \in N)$. D'où, puisque $V(Tb)$ est compact, il résulte que Tb_n est compact pour tout $n \geqslant n'$. Ainsi, en prenant $y' = b + \frac{1}{n'} e_Y$, on en tire la conclusion du théoreme.

En partant des theorèmes 4.1 et 4.2 on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 4.3. *Supposons que l'espace uniforme X est localement compact et que l'ensemble Tb est compact. Alors l'application T est s.c.s. en b si et seulement s'il existe $y' \gg_Y b$ tel que Ty' soit compact.*

En vertu des théorèmes 3.4, 4.1, 4.2 et des propositions 4.1 et 4.2 on obtient quelques résultats concernant la semistabilité supérieure du problème $P(g, b)$ aux perturbation du b.

Dans les deux conséquences suivantes nous supposons que $b \in Y(A)$ D est fermé, g est semicontinue inférieurement sur D et $f: X \to Z$ est semicontinue supérieurement sur Ab.

C o n s é q u e n c e 4.1. *S'il existe $y' \gg_Y b$, tel que Ay' soit compact alors le problème $P(g, b)$ est semistabile supérieurement aux perturbation du b.*

Conséquence 4.2. *Si l'espace uniforme X est localement compact et Ab est compact, alors le problème $P(g, b)$ a des contraintes semistables supérieurement aux perturbations du b si et seulement s'il existe $y' \gg_Y b$ tel que Ay' soit compact.*

Si l'ensemble D est compact, de la conséquence 4.1 on obtient le résultat suivant :

Conséquence 4.3. *Si $b \in Y(A)$, l'ensemble D est compact, la fonction g est semicontinue inférieurement sur D et $f: X \to Z$ est semicontinue supérieurement sur Ab, alors le problème $P(g, b)$ est semistable supérieurement aux perturbations du b.*

Remarque. Lorsque, dans les conséquences 4.2 et 4.3, $Z=R$, $X=D=R^n$, $Y=R^m$ on obtient deux résultats de EVANS J. P et GOULD F. J. [4] (les théorèmes 1 et 3) concernant la stabilité des problèmes de programmation mathématique finie dimensionnelle. Dans le cas où X est un espace normé, et $Z=R$ des résultats similaires à la conséquence 4.1 peuvent être trouvés en [7], [8].

Nous signalons aussi le travail [11], où ont été obtenus des résultats similaires aux conséquences 4.1—4.3, lorsque X est un espaces metrique et $Z = R$.

§5. Propriétés concernant les application multivoques isotones semicontinues inférieurement et la semistabilité inférieure du problème P(g, b) aux perturbations du b

Nous rappelons que X est un espace uniforme et Y est un espace linéaire ordonné avec la proprieté (U). Soit T une application multivoque de Y dans X et $b \in Y(T)$.

Nous désignons :

$$I(Tb) = \bigcup_{y \in C_Y(b)} (Tb \cap Ty), \text{ où } C_Y(b) = \{y \in Y \mid y \leqslant_Y b\}. \tag{5.1}$$

Lemme 5.1. *Si l'application T est isotone, alors $I(Tb) \neq \emptyset$ si et seulement si $b \in \mathrm{Int}\,(Y(T))$.*

Démonstration. 1. Supposons que $I(Tb) \neq \emptyset$. Alors, il résulte de (5.1) qu'il existe un élément $y' \in C_Y(b)$, tel que $x' \in Ty'$. Mais, puisque l'espace Y est un espace linéaire ordonné avec la proprieté (U), il existe un voisinage $W(b)$, tel que $y \in W(b)$ implique $y' \leqslant_Y y$. Alors, en tenant compte de l'isotonie de l'application T, on obtient que $x' \in Ty$ pour tout $y \in W(b)$. Par conséquent, l'élément b possède un voisinage $W(b)$ inclus en $Y(T)$, ce qui signifie que $b \in \mathrm{Int}\,(Y(T))$.

2. Soit maintenant $b \in \mathrm{Int}\,(Y(T))$. Alors, puisque la suite $\left\{b - \frac{1}{n} e_Y\right\}$ converge vers b, il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n > n'$, $b'_n = b - \frac{1}{n} e_Y \in Y(T)$. D'où, en tenant compte du fait que T est isotone, il résulte que

pour tout $n > n'$ $(n \in N)$, il existe $x' \in D$ tel que $x' \in Tb'_n$. Mais parce que $b - \frac{1}{n} e_Y \leqslant_Y b$, on en tire que $x' \in I(Tb)$. Donc $I(Tb) \neq \emptyset$.

THÉORÈME 5.1. *Soit T une application multivoque isotone et $I(Tb) \neq \emptyset$. Si T est s.c.i. en b, alors $\mathrm{Cl}\,(I(Tb)) = Tb$.*

Démonstration. En effet, de (5.1) il résulte que $\mathrm{Cl}\,(I(Tb)) \subseteq Tb$. Par conséquent, il reste à démontrer que $Tb \subseteq \mathrm{Cl}\,(I(Tb))$. Soit $x' \in Tb$. Si $x' \in I(Tb)$, alors évidemment on a $x' \in \mathrm{Cl}\,(I(Tb))$. Nous supposons maintenant que $x' \notin I(Tb)$. Alors, puisque $I(Tb) \neq \emptyset$, en vertu du lemme 5.1, il résulte que $b \in \mathrm{Int}\,(Y(T))$. Mais parce que la suite $\left\{b - \frac{1}{n} e_Y\right\}$ converge vers b et $b \in \mathrm{Int}\,(Y(T))$, il existe $n' \in N$, tel que, pour tout $n > n'$ $(n \in N)$ $b'_n = b - \frac{1}{n} e_Y \in Y(T)$.

Soit $V \in \mathcal{V}(X)$. Alors, puisque T est s.c.i. en b, et la suite (b'_n) converge vers b, il existe $n'' \in N$, $n'' > n'$, tel que $Tb \subseteq V(Tb'_n)$, pour tout $n > n''$. Donc $x' \in V(Tb)$ pour tout $n > n''$. Mais cela, pour tout $n > n''$, implique l'existence d'un élément $x_n \in Tb'_n$ tel que $x_n \in V(x')$. Mais, puisque pour tout $V \in \mathcal{V}(X)$, il existe des éléments de $I(Tb)$ apartenant au $V(x')$, il résulte que $x' \in \mathrm{Cl}\,(I(Tb))$. Ceci achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 5.2. *Supposons que T est isotone, $b \in Y(T)$ et Tb est compact. Si $\mathrm{Cl}\,(I(Tb)) = Tb$ alors T est s.c.i. en b.*

Démonstration. D'abord nous faisons la remarque que les rélations $\mathrm{Cl}\,(I(Tb)) = Tb$, $Tb \neq \emptyset$, impliquent $I(Tb) \neq \emptyset$. Soit $V \in \mathcal{V}(X)$ un entourage ouvert arbitraire. Alors, parce que Tb est compact, les rélations $\mathrm{Cl}\,(I(Tb)) = Tb$ et $I(Tb) \neq \emptyset$ impliquent l'existence d'un sousensemble $I_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I(Tb)$, tel que $\{V(x_1), \ldots, V(x_n)\}$ est un recouvrement fini pour Tb. D'où, on obtient

$$V(I_n) \supseteq Tb. \tag{5.2}$$

Puisque $I_n \subseteq I(Tb)$, de (5.1) il résulte qu'il existe $y_i \in Y$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tel que $y_i \leqslant_Y b$ et $x_i \in Ty_i$. Mais parce que $y_i \leqslant_Y b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il existe un voisinage $W(b)$ tel que $y \in W(b)$ implique $y_i \leqslant_Y y$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. D'où, en tenant compte du fait que T est isotone il résulte que $Ty_i \subseteq Ty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pour tout $y \in W(b)$. Mais puisque $x_i \in Ty_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il résulte que $I_n \subseteq Ty$, pour tout $y \in W(b)$. Donc a lieu l'inclusion $V(I_n) \subseteq V(Ty)$ $(y \in W(b))$, d'où, en vertu de (5.2), s'obtient $Tb \subseteq V(Ty)$, pour tout $y \in W(b)$. Mais cela signifie que T est s.c.i. en b.

Les théorèmes 5.1 et 5.2 impliquent le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3. *Soit T isotone, $I(Tb) \neq \emptyset$ et Tb compact. Alors T est s.c.i. en b si et seulement si $\mathrm{Cl}\,(I(Tb)) = Tb$.*

Le théorème 5.3 généralise un résultat dû au EVANS J. P. et GOULD F. J. ([4], théorème 2), obtenu dans l'hypothèse que X et Y sont des espaces à dimension finie et Ty est, pour tout $y \in T$, l'ensemble des solutions admissibles pour un problème de programmation mathématique. Dans le cas d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle réelle définie sur un espaces métrique, un résultat similaire a été obtenu dans [11].

Les théorèmes 3.5 et 5.2 impliquent :

C o n s é q u e n c e 5.1. *Si $b \in Y(A)$, l'ensemble Ab est compact, $\mathrm{Cl}(I(Ab)) = Ab$ et $f: X \to Z$ est continue sur Ab, alors le problème $P(g, b)$ est semistable inférieurement aux perturbations du b.*

Remarque 5.1. Lorsque f est une fonctionnelle réelle, dans la conséquence 5.1 la condition de continuité de la fonction f peut être remplacée par la semicontinuité inférieure de la fonction f (voir, la remarque 3.1).

§6. Problémes d'optimisation semistable supérieurement aux perturbations du terme libre b

Dans ce paragraphe, en faisant des hypothèses suplimentaires sur l'espace X, sur l'ensemble D et sur les applications f et g, on met en évidence quelques classes de problèmes d'optimisation avec contraintes semistables supérieurement aux perturbations du b. Ensuite en utilisant les résultats de § 3 on obtient des résultats concernant la semistabilité des problémes respectives.

Cas 1. L'ensemble Ab est compact

En ce qui va suivre nous utiliserons les définitions :

Un sousensemble $B \subseteq X$ s'appelle *connexe* (par arcs) si quel que soit x', x'' de B, il existe une fonction continue $u : [0, 1] \to X$, tel que $u(0) = a'$, $u(1) = x''$ et $u(t) \in B$ pour tout $t \in (0, 1)$.

Soit $B \subseteq X$, $B \neq \emptyset$. L'application $h: X \to Y$ s'appelle *y-connexe sur B* si l'ensemble $B(y) = \{x \in B \mid h(x) \leqslant_Y y\}$ est connexe.

Supposons que D est un sousensemble fermé de l'espace X.

THÉORÈME 6.1. *Soit $b \in Y(A)$, X un espace uniforme localement compact l'application $g: X \to Y$ semicontinue inférieurement sur D et Ab compact. Si pour tout $y \geqslant_Y b$ $(y \in Y)$, l'application f est y-connexe sur D, alors il existe $y' \in Y$, $y' \geqslant_Y b$, tel que Ay' est compact.*

Démonstration. En effet, Ab étant compact et X étant localement compact, il existe un voisinage compact E de l'ensemble Ab. Mais alors il existe (voir [12]) un entourage $V \in \mathcal{V}(X)$ tel que $V(Ab) \subseteq E$.

Considérons maintenant la suite (b_n), où $b_n = b + \frac{1}{n} e_Y$. Montrerons qu'il existe $n' \in N$, tel que $Ab_{n'} \subseteq V(Ab)$. On procède par la réduction a l'absurde. C'est-à-dire, nous supposerons que pour tout $n \in N$, $Ab_n \nsubseteq V(Ab)$. Cela signifie que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in Ab_n$, tel que $x_n \notin V(Ab)$. Soit $x' \in Ab$. Parce que $b_n \geqslant_Y b$, il résulte que $x' \in Ab_n$. Mais parce que

g est b_n-connexe sur D, pour tout $n \in N$, il résulte que Ab_n est connexe. Donc, pour tout $n \in N$, il existe une fonction continue $u_n: [0, 1] \to X$, tel que $u_n(0) = x'$, $u_n(1) = x_n$ et $u_n(t) \in Ab_n$ pour tout $t \in (0, 1)$. Mais parce que u_n est continue, pour tout $n \in N$, il existe $t'_n \in [0, 1]$, tel que :

$$x'_n = u_n(t'_n) \in \mathrm{Fr}\ (V(Ab)). \tag{6.1}$$

De (6.1), parce que $\mathrm{Fr}\ (V(Ab))$ est un ensemble compact, il résulte que la suite (x_n) contient une suite convergente vers un élément $x'' \in \mathrm{Fr}\ (V(Ab))$. Mais l'application multivoque A étant fermée (voir la proposition 4.1) il résulte que $x'' \in Ab$, ce qui est en contradiction avec le fait que $x'' \in \mathrm{Fr}\ (V(Ab))$. Donc il existe $n' \in N$, tel que $Ab_{n'} \subseteq V(Ab)$, d'où, en tenant compte des rélations $V(Ab) \subseteq E$ et $b + \frac{1}{n}$, $e_Y \geqslant_Y b$, il résulte la conclusion du théorème, parce que l'ensemble $Ab_{n'}$, est compact comme sousensemble fermé d'un ensemble compact.

Du théorème 6.1 et de la conséquence 4.1 on obtient :

C o n s é q u e n c e 6.1. *Si $b \in Y(A)$, l'application g est semicontinue inférieurement sur D et pour tout $y \geqslant_Y b$, est y-connexe sur D, $f: X \to Z$ est semicontinue supérieurement sur Ab et X est localement compact, alors le problème $P(g, b)$ est semistable supérieurement aux perturbations du b.*

En ce qui suit on présente quelques classes d'applications connexes définies sur l'espace euclidien n-dimensionel R^n avec des valeurs en Y.

Soit $B \subseteq R$, $B \neq \emptyset$. Une application $h: B^n \to Y$ s'appelle *y-quasi-convexe sur B* si l'ensemble $B(y)$ est convexe.

On peut montrer facilement qu'on a la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1. *Soit $y \in Y$. Si l'application $h: R^n \to Y$ est y-quasi-convexe sur B alors elle est y-connexe sur B.*

En même sens comme BRAGARD L. [3], nous disons que l'ensemble $B \subseteq R^n$, $B \neq \emptyset$, s'appelle *étoilé* s'il existe au moins un élément $x' \in B$, ayant la propriété que pour tout $x \in B$, on a : $x' + (1 - t)x \in B$, quel que soit $t \in (0, 1)$. L'application $h: R^n \to Y$ s'appelle *y-étoilé sur B*, si l'ensemble $B(y)$ est vide ou étoilé.

PROPOSITION 6.2. *Soit $y \in Y$. Si l'application h est y-étoilé sur B alors elle est y-connexe sur B.*

Soit $p > 0$. Une application $h: R^n \to Y$ s'appelle *p-sous-homogène* si quel que soit $x \in R^n$ a lieu l'inégalité $h(tx) \leqslant_Y t^p h(x)$, pour tout $t \in [0, 1]$

PROPOSITION 6.3. *Si l'application h est p-sous-homogène $(p > 0)$, l'ensemble B est convexe et $O_n \in B$, alors pour tout $y \geqslant_Y O_Y$, h est y-étoilée sur D.*

PROPOSITION 6.4. *Si l'ensemble B est convexe et dirigé à gauche et l'application h est isotone, alors pour tout $y \in Y$, l'application h est y-connexe sur B.*

Ayant à la base le théorème 6.1 et la conséquence 6.1 et les propositions 6.1—6.4 (qui peuvent être dèmonstrèes sans dificultè) on obtient des conditions suffisantes afin que le problème $P(g, b)$ soit semistable supérieurement aux perturbations du b.

Supposons que les conditions suivantes sont vérifées :

(i.1) l'application $g: R^n \to Y$ est semicontinue inférieurement sur D,

(i.2) l'ensemble Ab est borné et nonvide,

(i.3) l'application $f: R^n \to T$ est semicontinue supérieurement sur Ab, et l'ensemble $D \subseteq E^n$ est fermé et nonvide.

Conséquence 6.2. *Si avec les conditions* (i.1)—(i.3) *a lieu une des conditions suivantes :*

(c.1) *l'application g est y-étoilée sur D, pour tout $y \geqslant_Y b$,*

(c.2) *l'application g est y-quasiconvexe sur D pour tout $y \geqslant_Y b$,*

(c.3) *l'application g est p-sous-homogène* $(p > 0)$, $b \geqslant_Y O_Y$, $O_n \in D$ *et l'ensemble D est convexe.*

(c.4) *l'application g est isotone et l'ensemble D est convexe et dirigé à gauche,*

alors le problème $P(g, b)$ est semistable supérieurement aux perturbations du b.

Cas 2. L'ensemble Ab est borné

Soit X un espace uniforme, $D \subseteq X$, $D \neq \emptyset$, et Q un sousensemble nonvide d'un espace topologique de Hausdorff et soient données les fonctions $f: X \to Z$, $\overline{g}: X \times Q \to R$ et $b: Q \to R$. Alors le problème d'optimisation que nous aurons en vue dans le reste du paragraphe est le suivant :

$PO(\overline{g}, b)$: Déterminer

$$s(b) = \sup_{\hat{Z}} \{f(x) \mid x \in Ab\}.$$

où dans ce cas l'ensemble $Ab = \{x \in D \mid \overline{g}(x, q) \leqslant b(q), \forall q \in Q\}$.

Le problème $PO(\overline{g}, b)$ est évidemment un cas particulier du problème $P(g, b)$, où $Y = \mathfrak{F}(Q, R)$ et $g: X \to \mathfrak{F}(Q, R)$ a les valeurs définies par $g(x) = g_x$ quel que soit $x \in X$, l'application $g_x: Q \to R$ ayant pour tout $q \in Q$ les valeurs $g(q) = \overline{g}(x, q)$.

Nous rappelons que l'espace $\mathfrak{F}(Q, R)$ est un espace linéaire ordonné avec la proprieté (U) (voir la proposition 2.2).

Maintenant nous supposons remplies les condition suivantes :

a.1) X est un espace linéaire normé,

a.2) il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et un élément $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$, tel que pour tout $q \in Q$ on a l'inégalité : $\overline{g}(x_0, q) \leqslant b(q) - \alpha$,

a.3) pour tout $q \in Q$, a lieu l'inégalité : $\overline{g}(tx_0 + (1-t)x, q) \leqslant t\,\overline{g}(x_0, q) + (1-t)\,\overline{g}(x, q)$, quel que soit $t \in (0, 1)$ et $x \in D$, $x \neq x_0$, où x_0 est un élément de D vérifiant la condition a.2),

a.4) l'application g est continue sur $X \times Q$,

a.5) l'ensemble D est convexe et fermé,

a.6) l'ensemble Q est compact,

a.7) la fonction $b: Q \to R$ est semicontinue inférieurement sur Q.

Soient donnés $\varepsilon > 0$, $x \in X$ et $X' \subseteq X$, $X' \neq \emptyset$. Alors nous noterons : $d(x, X') = \inf \{\|x - x'\| \mid x' \in X'\}$, $V_\varepsilon(X') = \{x'' \in X \mid d(x'', X') < \varepsilon\}$.

Lemme 6.1. *Si les conditions* a.1), a.2), a.4), a.6) *et* a.7) *sont vérifiées alors* $x_0 \in \mathrm{Int}\,(Ab)$.

Démonstration. Supposons que $x_0 \notin \mathrm{Int}\,(Ab)$. Alors il existe une suite (x_n), $x_n \in D$, $x_n \to x_0$ et une suite (q_n), $q_n \in Q$, tel que $\overline{g}(x_n, q_n) > b(q_n)$ $(n \in N)$. Mais l'ensemble Q étant compact la suite (q_n) contient une sous-suite convergente vers un élément $q_0 \in Q$. Mais alors de l'inégalité $\overline{g}(x_n, q_n) > b(q_n)$, en vertu des conditions a.4) et a.7) on obtient l'inégalité $\overline{g}(x_0, q_0) \geqslant b(q_0)$, qui contredit la condition a.2). Donc $x_0 \in \mathrm{Int}\,(Ab)$.

Lemme 6.2. *Dans les conditions* a.1), a.4) — a.7) *si* $x' \in \mathrm{Fr}\,(Ab)$, *alors il existe* $q' \in Q$, *tel que* $\overline{g}(x', q') = b(q')$.

Démonstration. Nous supposons le contraire, c'est-à-dire, pour tout $q \in Q$, on a $\overline{g}(x', q) \neq b(q)$. Mais parce que Ab est fermé (de a.4) et a.5)) et $x' \in \mathrm{Fr}(Ab)$ il résulte que $x' \in Ab$. Alors la rélation $\overline{g}(x', q) \neq b(q)$, implique l'inégalité

$$\overline{g}(x', q) < b(q), \text{ pour tout } q \in Q. \tag{6.2}$$

Considérons maintenant la fonction $g_0: Q \to R$, où $g_0(q) = \overline{g}(x', q) - b(q)$, quel que soit $q \in Q$. De a.4) et a.7) il résulte que g_0 est semicontinue supérieurement sur Q. Mais de (6.2) et a.7) il résulte qu'il existe $\mu > 0$, tel que pour tout $q \in Q$, on a $\overline{g}(x', q) - b(q) + \mu \leqslant 0$, d'où, en vertu du lemme 6.1, s'obtient que $x' \in \mathrm{Int}\,(Ab)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Dans le théorème suivant on obtiendra des conditions suffisantes afin que le problème PO $(\overline{g}, b)$ soit semistable supérieurement aux perturbations du b. MARTINET B. [8], démontre un résultat similaire dans des conditions differentes. Ainsi, au lieu de l'hypothèse faite par Martinet que pour tout $q \in Q$, la fonctionnelle $g_q: X \to R$, où $g_q(x) = \overline{g}(x, q)$ $(x \in X)$, est convexe sur D, nous utilisons l'hypothèse plus générale a.3).

THÉORÈME 6.2. *Si les conditions* a.1)—a.7) *sont vérifiés et l'ensemble Ab est borné alors l'application multivoque A est s.c.s. en b. Si en outre nous supposons que $f: X \to Z$ est uniformément continue sur D, alors le problème $PO(\overline{g}, b)$ est semistable supérieurement aux perturbations du b.*

Démonstration. Nous supposons que A n'est pas s.c.s. en b. C'est-à-dire, il existe $\varepsilon_0 > 0$, avec la propriété que pour tout $n \in N$, il existe $b'_n \in W_n(b) = \left\{b' \in \mathfrak{F}(Q, R) \mid -\frac{1}{n} < b(q) - b'(q) < \frac{1}{n},\ \forall q \in Q\right\}$, tel que : $Ab'_n \not\subseteq V_\varepsilon(Ab)$. Donc pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in Ab'_n$, tel que $d(x_n, Ab) \geqslant \varepsilon_0$.

On peut arriver à une des situations suivantes :

e.1) il existe $\gamma > 0$, tel que $\|x_n - x_0\| \leqslant \gamma$, pour tout $n \in N$,

e.2) il existe une sous-suite (x_{j_n}) de la suite (x_n) tel que $\|x_{j_n} - x_0\| \geqslant n$ pour tout $n \in N$.

Nous supposons que le cas e.1) a lieu. Alors pour tout $n \in N_0$, il existe $t_n \in [0, 1]$, tel que $x'_n = t_n x_0 + (1 - t_n)x_n \in \mathrm{Fr}\,(Ab)$, et parce que $x_0 \in \mathrm{Int}\,(Ab)$ (en vertu du lemme 6.1), il résulte que, $t_n \neq 1$, pour tout $n \in N_0$. Mais, en vertu du lemme 6.2, pour tout $n \in N_0$, il existe $q_n \in Q$ tel que $\bar{g}(x'_n, q_n) = b(q_n)$. Alors, en tenant compte de a.3) il résulte que : $0 = \bar{g}(x'_n, q_n) - b(q_n) \leq t_n(\bar{g}(x_0, q_n) - b(q_n)) + (1 - t_n)(\bar{g}(x_n, q_n) - b(q_n))$, d'où, parce que $t_n \neq 1$, on obtient :

$$\text{(6.3)} \quad \bar{g}(x_n, q_n) - b(q_n) \geq -\frac{t_n}{1 - t_n}(\bar{g}(x_0, q_n) - b(q_n)), \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

De e.1) et de l'inégalité $d(x_n, Ab) \geq \varepsilon_0$, il résulte que $t_n \geq \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$. Alors de (6.3) et de a.2) on obtient :

$$\text{(6.4)} \quad \bar{g}(x_n, q_n) - b(q_n) \geq -\frac{\varepsilon_0}{\gamma - \varepsilon_0}(\bar{g}(x_0, q_n) - b(q_n)) \geq$$

$$\geq -\frac{\varepsilon_0}{\gamma}(\bar{g}(x_0, q_n) - b(q_n)) \geq \frac{\varepsilon_0}{\gamma}\alpha > 0, \text{ pour tout } n \in N_0.$$

D'autre part, parce que $b'_n \to b$, il existe un $n_1 \in N$, tel que $|b'_n(q) - b(q)| < \frac{\varepsilon_0 \alpha}{\gamma}$, quels que soient $q \in Q$ et $n \geq n_1$. Alors du fait que $x_n \in Ab'_n$, pour $n \geq n_1$ on obtient que $\bar{g}(x_n, q_n) \leq b'_n(q_n) < b(q_n) + \frac{\varepsilon_0 \alpha}{\gamma}$, ce que, pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, est en contradiction avec (6.4).

Supposons maintenant que e.2) a lieu. Alors par un raisonnement similaire au celui du cas e.1), on obtient qu'il existe un $n_0 \in N$, tel que

$$\text{(6.5)} \quad \bar{g}(x_{j_n}, q_{j_n}) - b(q_{j_n}) \geq \frac{t_{j_n}}{1 - t_{j_n}}(\bar{g}(x_0, q_{j_n}) - b(q_{j_n})), \text{ pour } n \geq n_0.$$

D'autre part parce que Ab est borné, il existe $\delta > 0$, tel que $\|x'_{j_n} - x_0\| = (1 - t_n)\|x_{j_n} - x_0\| \leq \delta$ $(n \in N)$, d'où, en vertu de e.2), il résulte que $\frac{t_{j_n}}{1 - t_{j_n}} \geq \frac{n}{\delta}\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)$. Mais alors de (6.5) et a.2) on obtient l'inégalité : $\bar{g}(x_{j_n}, q_{j_n}) - b(q_{j_n}) \geq \frac{n}{\delta}\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)\alpha$, ce que pour n suffisamment grand, contredit le fait que $x_{j_n} \in Ab'_{j_n}$. Donc A est s.c.s. en b.

La deuxième partie du théorème s'obtient facilement de la première partie et du théorème 3.1.

Cas 3. L'ensemble Ab n'est pas supposé borné

On va étudier la semistabilité supérieure aux perturbations du b du problème $PO(\bar{g}, b)$, qui en dehors des conditions a.4)—a.7) vérifient encore les conditions suivantes :

a.8) X est un espace linéaire ordonné normé,

a.9) pour tout $q \in Q$, la fonction $g_q : X \to R$ est isotone, où $g_q(x) = \bar{g}(x, q)$, $(x \in X)$,

a.10) il existe $\delta > 0$ et il existe une fonction $\gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ avec la propriété que, pour tout $q \in Q$ et $x_1, x_2 \in D$, qui vérifient les inégalités $x_1 \leq_X x_2$ et $b(q) \leq \bar{g}(x_i, q) \leq b(q) + \delta$, $(i = 1, 2)$, a lieu : $\bar{g}(x_2, q) - \bar{g}(x_1, q) \geq \gamma(\|x_2 - x_1\|)$,

a.11) l'ensemble D est dirigé à gauche.

THÉORÈME 6.3. *Dans les conditions* a.4)—a.11), *si l'ensemble* Ab *est nonvide et* $f : X \to Z$ *est uniformément continue sur* D, *alors le problème* $PO(\bar{g}, b)$ *est semistable supérieurement aux perturbations du* b.

Démonstration. Il suffit (comme dans le cas du théorème 6.2) de démontrer que l'application multivoque A est s.c.s. en b. On procède par réduction à l'absurde. Nous supposons donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite (b'_n), $b'_n \to b$, tel que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in Ab'_n$, avec la propriété que $d(x_n, Ab) \geq \varepsilon_0$. Soit $x_0 \in Ab$. Alors parce que D est dirigé à gauche (condition a.8)) pour tout $n \in N$, il existe $x''_n \in D$, tel que $x''_n \leq_X x_0$ et $x''_n \leq_X x_n$, d'où, en tenant compte de a.9), il résulte que pour tout $n \in N$, on a $x''_n \in Ab \cap Ab'_n$. Alors parce que D est convexe, pour tout $n \in N$ on obtient $x_n(t) = tx''_n + (1 - t)x_n \in Ab'_n$, quel que soit $t \in [0, 1]$. Mais parce que $x''_n \in Ab$ et $x_n \in Ab$, il existe $t_n \in [0, 1]$ tel que $x'_n = x_n(t_n) \in \mathrm{Fr}\,(Ab)$. Alors, en vertu du lemme 6.2, pour tout $n \in N$, il existe $q_n \in Q$ tel que $\bar{g}(x'_n, q_n) = b(q_n)$. Mais, parce que $b'_n \to b$, ayant en vue la condition a.9), il résulte qu'il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n \geq n'$, on a : $b(q_n) = \bar{g}(x'_n, q_n) \leq \bar{g}(x_n, q_n) \leq b'_n(q_n) \leq b(q_n) + \delta$. Alors de a.10), en tenant compte de l'inégalité $x'_n \leq_X x_n$, on obtient :

$$\text{(6.6)} \quad \bar{g}(x_n, q_n) = \bar{g}(x'_n, q_n) + b(q_n) - \bar{g}(x'_n, q_n) \geq \gamma(\|x_n - x'_n\|) + b(q_n) \geq \gamma(\varepsilon_0) + b(q_n), \ (n \geq n').$$

D'autre part, parce que $b'_n \to b$ et $\gamma(\varepsilon_0) > 0$, il existe $n'' \in N$, tel que pour $n \geq n''$, on a l'inégalité : $\bar{g}(x_n, q_n) \leq b'_n(q_n) \leq \gamma(\varepsilon_0) + b(q_n)$, qui pour $n \geq \max\{n', n''\}$ est en contradiction avec (6.6). Le théorème est ainsi démontré.

§7. Classes de problèmes d'optimisation semistables inférieurement aux perturbations du b

Nous supposons que $h \in \mathcal{F}(X, Y)$, où X est un espace uniforme et Y est un espace linéaire ordonné avec la propriété (U). Dans les définitions suivantes nous supposons donnés : un ensemble convexe $B \subseteq X$, $B \neq \emptyset$ et un élément $y' \in Y$ et nous allons noter : $B^+(y') = \{x \in B \mid h(x) \leq_Y y'\}$.

La fonction h s'appelle y'-strictement connexe sur B si pour tout $x' \in B(y') = \{x \in B \mid h(x) \leq_Y y'\}$ et $x'' \in B^+(y')$, il existe une fonction $u : [0, 1] \to X$ continue, tel que $u(0) = x'$, $u(1) = x''$ et $u(t) \in B^+(y')$, pour tout $t \in (0, 1)$.

Dans les définitions qui vont suivre nous supposons en outre que X est un espace linèaire topologique et B est un sousensemble convexe, nonvide de celui-ci.

La fonction h s'appelle *y'-strictement étoilée sur* B s'il existe $x' \in B^+(y')$, tel que pour tout $x \in B(y)$ et $t \in (0, 1)$ on a : $h(tx + (1-t)x') \ll_Y y'$. Aussi h s'appelle *y'-strictement quasiconvexe sur* B si $x' \in B(y')$, $x'' \in B^+(y')$ et $t \in (0, 1)$ impliquent $tx' + (1-t)x'' \in B^+(y')$.

Soit maintenant X un espace linéaire topologique ordonné. Alors la fonction h s'appelle *strictement isotone* si $x' <_X x''$ (i.e. $x' \leqslant x''$ et $x' \neq x''$) implique $h(x') \ll_Y h(x'')$.

Des définitions précédentes on obtient facilement les propositions suivantes :

PROPOSITION 7.1. *Soit X un espace linéaire topologique et B un sousensemble nonvide et convexe de celui-ci. Si une de condition a lieu :*

(i) *la fonction h est y'-strictement étoilée sur B,*

(ii) *la fonction h est y'-strictement quasiconvexe sur B,*

(iii) *la fonction h est p-sous-homogène ($p > 0$), $y' \gg_Y O_Y$ et $O_X \in B$,*

alors h est y'-strictement connexe sur B.

PROPOSITION 7.2. *Soit X un espace linéaire topologique ordonné et B un sousensemble convexe, dirigé à gauche et nonvide de celui-ci. Si h est strictement isotone alors elle est y-strictement connexe sur B pour tout $y \in Y$.*

THÉORÈME 7.1. *Soit X un espace uniforme et D un sousensemble nonvide et connexe de celui-ci. Si la fonction $g : X \to Y$ est b-strictement connexe sur D, Ab est fermé et $I(Ab) = \{x \in Ab \mid g(x) \ll_Y b\} \neq \emptyset$, alors* $\mathrm{Cl}\,(I(Ab)) = Ab$.

Démonstration. Parce que $I(Ab) \subseteq Ab$, il résulte que $\mathrm{Cl}\,(I(Ab)) \subseteq Ab$. Il nous reste donc à démontrer l'inclusion contraire. Soit $x' \in Ab$. Supposons que $x' \notin I(Ab)$. Soit alors $x'' \in I(Ab)$. Alors parce que g est strictement connexe sur D, il existe une application continue $u : [0, 1] \to X$, tel que : $u(0) = x'$, $u(1) = x''$ et $u(t) \in I(Ab)$ pour tout $t \in (0, 1)$. Mais cela implique que pour tout $n \in N$, on a $x_n = u\left(\frac{1}{n}\right) \in I(Ab)$. Mais parce que u est continue il résulte que $x_n \to x'$. Donc $x' \in \mathrm{Cl}\,(I(Ab))$. Avec cela le théorème est démontré.

Cas 1. L'ensemble Ab est compact

Des théorèmes 3.5, 5.2 et 7.1 on obtient, dans la cas où l'ensemble Ab est compact, le résultat suivant concernant la semistabilité inférieure du problème $P(g, b)$.

Conséquence 7.1. *Soit X un espace uniforme est D un sousensemble connexe et nonvide de celui-ci. Si $g : X \to Y$ est b-strictement connexe sur D, $I(Ab) \neq \emptyset$, Ab est compact et $f : X \to Z$ est continue sur Ab, alors le problème $P(g, b)$ est semistable inférieurement aux perturbations du b.*

Remarque. Dans le cas où $Z = R$, la conséquence 7.1 reste vraie, si on supose que f est semicontinue inférieurement sur Ab.

Des propositions 7.1, 7.2 et de la conséquence 7.1 on obtient la conséquence suivante :

Conséquence 7.2. *Soit X un espace linéaire topologique et D un sousensemble convexe et nonvide de celui-ci. Si Ab est compact et nonvide, $f : X \to Z$ est continue sur Ab (ou, lorsque $Z = R$, f est semicontinue inférieurement sur Ab) et s'il est verifié une des conditions suivantes :*

(i) *g est b-strictement étoilée sur D et $I(Ab) \neq \emptyset$,*

(ii) *g est b-strictement quasiconvexe sur D et $I(Ab) \neq \emptyset$,*

(iii) *g est p-sous-homogène ($p > 0$), $b \gg_Y O_Y$ et $O_X \in D$,*

(iv) *X est un espace linéaire topologique ordonné, g est strictement isotone, D est dirigé à gauche et $I(Ab) \neq \emptyset$,*

alors le problème $P(g, b)$ est semistable inférieurement aux perturbations du b.

Remarque. Un résultat concernant la semistabilité inférieure de EVANS J. P. et GOULD F. J. ([4], lemme 5) peut être retrouvé en prenant dans la conséquence 7.2, $X = R^n$, $Y = R^m$, $Z = R$ et g y-strictement quasiconvexe sur R^n pour tout $y \in R^m$.

Cas 2. L'ensemble Ab est borné

On va montrer maintenant que le problème $PO(\bar{g}, b)$, considéré dans le paragraphe precédent, est semistable inférieurement aux perturbations du b, dans les hypothèses a.1)—a.7) et à condition que Ab soit borné.

THÉORÈME 7.2. *Si la fonction $f : X \to Z$ est uniformément continue sur D, $s(b) \in Z$, Ab est borné et si les conditions a.1)—a.7) (§ 6) sont vérifiées, alors le problème $PO(\bar{g}, b)$ est semistable inférieurement aux perturbations du b.*

Démonstration. Ayant en vue le théorème 3.2, il suffit de démontrer que A est s.c.i. en b. On procède par réduction à l'absurde en supposant que A n'est pas s.c.i. en b. Cela implique l'existence d'un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et d'une suite (b_n) $(b_n \in \mathcal{F}(Q, R))$, $b_n \to b$, tel que $Ab \setminus V_{\varepsilon_0}(Ab_n) \neq \emptyset$, pour tout $n \in N$. On peut montrer qu'il existe une suite (b'_n) d'applications de $\mathcal{F}(Q, R)$ semicontinue inférieurement sur Q, convergentes vers b et tel que $Ab \setminus V_{\varepsilon_0}(Ab'_n) \neq \emptyset$, pour tout $n \in N$. Mais cela revient au fait que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in Ab$, tel que

$$d(x_n, Ab'_n) \geqslant \varepsilon_0. \tag{7.1}$$

Mais parce que $b'_n \to b$, de a.2) il résulte qu'il existe $n' \in N$, $\alpha > 0$ et $x_0 \in D$ tel que : $\bar{g}(x_0, q) \leqslant b'_n(q) - \frac{\alpha}{2}$, pour $q \in Q$ et $n \geqslant n'$. Alors d'après le lemme 6.1, $x_0 \in \mathrm{Int}\,(Ab'_n)$, pour $n \geqslant n'$. Mais de la condition a.3) il résulte que : $x_n(t) = tx_0 + (1-t)x_n \in Ab$, pour tout $t \in [0, 1]$, et parce que $x_0 \in Ab'_n$ et $x_n \in Ab'_n$, il s'ensuit que pour tout $n \geqslant n'$, il existe $t_n \in [0, 1]$, tel que $x'_n = x'_n(t_n) \in \mathrm{Fr}\,(Ab'_n)$ et $t'_n \neq 1$, puisque $x_0 \in \mathrm{Int}\,(Ab'_n)$. Maintenant, en vertu du lemme 6.2 pour tout $n \geqslant n'$, il existe $q_n \in Q$, tel que $\bar{g}(x'_n, q_n) = b'_n(q_n)$. Mais alors de a.2), pour tout n

$\geqslant n'$, on obtient: $0 = \bar{g}(x'_n, q_n) - b'_n(q_n) \leqslant t_n(\bar{g}(x_0, q_n) - b'_n(q_n)) + (1 - t_n)(\bar{g}(x_n, q_n) - b'_n(q_n))$, d'où, parce que $t_n \neq 1$, on deduit:

(7.2) $$\bar{g}(x_n, q_n) - b'_n(q_n) \geqslant -\frac{t_n}{1 - t_n}(\bar{g}(x_0, q_n) - b'_n(q_n)), \text{ pour } n \geqslant n'.$$

Parce que Ab est borné, il existe $\gamma > 0$, tel que $\|x_0 - x_n\| \leqslant \gamma$ pour tout $n \in N$, d'où en tenant compte (7.1) il résulte que $t_n \geqslant \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$, pour $n \geqslant n'$. Alors de (7.2), pour $n \geqslant n'$, on deduit

(7.3) $$\bar{g}(x_n, q_n) - b'_n(q_n) \geqslant -\frac{\varepsilon_0}{\gamma - \varepsilon_0}(\bar{g}(x_0, q_n) - b'_n(q_n)) \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{\varepsilon_0}{\gamma}(\bar{g}(x_0, q_n) - b'_n(q_n)) \geqslant \frac{\varepsilon_0\alpha}{2\gamma} > 0.$$

D'autre part, parce que $b'_n \to b$ et $x_n \in Ab$, il existe $n'' \in N$, tel que pour $n \geqslant n''$, on a l'inégalité: $\bar{g}(x_n, q_n) < b'_n(q_n) + \frac{\varepsilon_0\alpha}{2\gamma}$, ce qui contredit l'inégalité (7.3) pour $n \geqslant \max\{n', n''\}$. Avec cela le théorème est démontré.

Cas 3. L'ensemble Ab n'est pas supposé borné

THÉORÈME 7.3. *Si les conditions* a.2), a.4)—a.11) *sont vérifiées et si f est uniformément continue sur D, alors le problème $PO(\bar{g}, b)$ est semistable inférieurement aux perturbations du b.*

Démonstration. Il suffit de montrer que A est s.c.i. en b. Supposons le contraire. Cela signifie qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite (b_n) d'applications semicontinues inférieurement de $\mathfrak{F}(Q, R)$, $b_n \to b$, tel que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in Ab$, vérifiant l'inégalité $d(x_n, Ab_n) \geqslant \varepsilon_0$. De même, parce que $b_n \to b$ et a lieu a.2), il existe $n' \in N$, tel que pour $n \geqslant n'$, on a

(7.4) $$\bar{g}(x_0, q) \leqslant b_n(q) - \frac{\alpha}{2}, \ \forall q \in Q.$$

Mais D étant dirigé à gauche il existe pour chaque $n \in N$, un élément $x'_n \in D$ tel que $x'_n \leqslant_X x_0$ et $x'_n \leqslant_X x_n$. Alors pour tout $t \in (0, 1)$ on a: $x'_n \leqslant_X tx'_n + (1 - t)x_n \leqslant_X x_n$, d'où, en tenant compte de a.5) et a.9), on deduit que $tx'_n + (1 - t)x_n \in Ab$, pour $t \in [0, 1]$. De même, il existe $t_n \in [0, 1]$, tel que $x''_n = t_n x'_n + (1 - t_n)x_n \in \mathrm{Fr}(Ab_n)$. Mais conformément au lemme 6.2, pour $n \geqslant n'$, il existe $q_n \in Q$, tel que $\bar{g}(x''_n, q_n) = b_n(q_n)$.

Alors de (7.4) et a.10) on obtient:

(7.5) $$\bar{g}(x_n, q_n) = \bar{g}(x_n, q_n) - \bar{g}(x''_n, q_n) + b_n(q_n) \geqslant$$
$$\geqslant \gamma(\|x_n - x''_n\|) + b_n(q_n) \geqslant \gamma(\varepsilon_0) + b_n(q_n), \text{ pour } n \geqslant n'.$$

D'autre part, parce que $b_n \to b$, il existe $n'' \in N$, tel que pour $n \geqslant n''$, on a: $\bar{g}(x_n, q_n) < b(q_n) < b_n(q_n) + \gamma(\varepsilon_0)$, qui est en contradiction avec (7.5) pour $n \geqslant \max\{n', n''\}$. Avec cela le théorème est démontré.

§8. La semistabilité inférieure et supérieure du problème $P(g, b)$ aux perturbations du g

Dans ce paragraphe on considère de nouveau le problème $P(g, b)$, où nous supposons X comme espace uniforme et Y et Z des espaces linéaires ordonnés avec la propriété (U). Nous supposons, de même, que l'ensemble $\mathfrak{F}(X, Y)$ est muni de la relation d'ordre, la structure linéaire et la topologie définies par les relations (2.3)—(2.6), par rapport auxquelles $\mathfrak{F}(X, Y)$ est un espace linéaire ordonné avec la propriété (U) (voir la proposition 2.2). Ensuite nous établissons la liaison entre les applications multivoques A et A_0 associéees au problème $P(g, b)$.

THÉORÈME 8.1. *Soit $g \in \mathfrak{F}(X, Y)$, tel que $A_0 g \neq \emptyset$. L'application multivoque A_0 est s.c.s. en g si et seulement si l'application multivoque A est s.c.s. en b.*

Démonstration. 1. Montrons que si A_0 est s.c.s. en g alors A est s.c.s. en b. Soit $V \in \mathcal{V}(X)$. Alors il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $g' \in \mathfrak{F}(X, Y)$, qui vérifient les inégalités:

(8.1) $$-\delta e_Y \leqslant_Y g'(x) - g(x) \leqslant_Y \delta e_Y, \text{ pour tout } x \in D,$$

on a l'inclusion: $A_0 g' \subseteq V(A_0 g)$. Mais, parce que Y est un espace linéaire ordonné avec la propriété (U), il existe un voisinage $W(b)$, tel que $b' \in W(b)$ implique les inégalités: $-\delta e_Y \leqslant_Y b' - b \leqslant_Y \delta e_Y$. Alors pour un $b' \in W(b)$, l'application $g_{b'} : X \to Y$, où $g_{b'}(x) = g(x) + b - b'$ $(x \in X)$, vérifie la condition (8.1). Mais on voit facilement que $A_0 g_{b'} = Ab'$ et $A_0 g = Ab$. Alors en tenant compte de l'inclusion $A_0 g' \subseteq V(A_0 g)$ on deduit que $Ab' \subseteq V(Ab)$, pour $b' \in W(b)$. Par conséquent, A est s.c.s. en b.

2. Soit maintenant A s.c.s. en b. Montrons que A_0 est s.c.s. en g. Supposons le contraire. Cela signifie qu'il existe un entourage $V' \in \mathcal{V}(X)$, tel que pour chaque $n \in N$, il existe $g_n \in \mathfrak{F}(X, Y)$ qui vérifie l'inégalité

(8.2) $$-\frac{1}{n} e_Y \leqslant_Y g(x) - g_n(x) \leqslant_Y \frac{1}{n} e_Y, \text{ pour tout } x \in Y,$$

et on a: $A_0 g_n \nsubseteq V'(A_0 g)$. Soit $b = b + \frac{1}{n} e_Y$. Alors, parce que $b_n \to b$ et A est s.c.s. en b, il existe $n' \in N$, tel que $Ab_n \subseteq V'(Ab)$, pour $n \geqslant n'$. Alors de (8.2) et de l'égalité $Ab = A_0 g$, pour tout $n \geqslant n'$, on obtient $A_0 g_n \subseteq V'(A_0 g)$, ce que contredit la relation $A_0 g_n \nsubseteq V'(A_0 g)$. Il vient donc que A_0 est s.c.s. en g. Le théorème est ainsi démontré.

THÉORÈME 8.2. *Soit $I(Ab) \neq \emptyset$. Alors A_0 est s.c.i. en g si et seulement si A est s.c.i. en b.*

Démonstration. 1. La partie de nécessité du théorème peut être démontré comme celle du théorème 8.1.

2. Soit A s.c.i. en b. Supposons que A_0 n'est pas s.c.i. en g. Cela signifie qu'il existe un entourage $V' \in \mathcal{V}(X)$, tel que pour tout $n \in N$, il

existe $g_n \in \mathscr{F}(X, Y)$ qui vérifie (8.2) et a lieu la relation: $A_0 g \notin V'(A_0 g_n)$. Soit $b'_n = b - \frac{1}{n} e_Y$. Alors parce que $b'_n \to b$, $b \in \mathrm{Int}\,(Y(A))$ et A est s.c.i. en b, il existe $n' \in N$, tel que:

$$Ab \subseteq V'(Ab'_n), \text{ pour } n \geqslant n'. \tag{8.3}$$

De (8.2), pour tout $n \in N$, on obtient que $Ab'_n \subseteq A_0 g_n$, d'où en tenant compte de (8.3), pour $n \geqslant n'$, on deduit qur $A_0 g \subseteq V'(A_0 g_n)$, ce que contredit le fait que $A_0 g$ n'est pas inclus en $V'(A_0 g)$. Donc A_0 est s.c.i. en g. Le théorème est ainsi démontré.

Des théorèmes 8.1 et 8.2 on obtient la conséquence suivant:

Conséquence 8.1. (i) *Le problème $P(g, b)$ a des contraintes semistables supérieurement aux perturbations de g si et seulement s'il a des contraines semistables supérieurement aux perturbations du b.*

(ii) *Soit $I(Ab) \neq \emptyset$. Alors le problème $P(g, b)$ a des contraintes semistables inférieurement respectivement stables aux perturbations de g si et seulement s'il a des contraintes semistables inférieurement respectivement stables aux perturbations du b.*

Remarque. Les théorèmes 8.1 et 8.2 étendent un résultat de GREENBERG H. J. et PIERSKALLA N. P. [6] (théorème 1) obtenu dans le cas particulier lorsque: $X = R^n$, $Y = R^m$, g est continue et Ab est compact.

§9. La stabilité du probleme $P(g, b)$

Dans ce paragraphe nous allons enoncer plusieurs résultats concernant la stabilité du problème $P(\bar{g}, b)$ respectivement $PO(\bar{g}, b)$, en nous basant sur les résultats de semistabilité obtenus dans les paragraphe antérieures.

THÉORÈME 9.1. *Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(d.1) *$g: X \to Y$ est semicontinue inférieurement,*
(d.2) *$f: X \to Z$ est continue sur Ab,*
(d.3) *Ab est compact et nonvide,*
(d.4) *D est fermé,*
(d.5) $\mathrm{Cl}\,(I(Ab)) = Ab$,
(d.6) *il existe $y \gg_Y b$, tel que Ay est compact,*

alors le problème $P(g, b)$ *est stable aux perturbations des b et g.*

Démonstration. Le théorème s'obtient imédiatement des conséquences 4.1 et 5.1 et les théorèmes 8.1 et 8.2.

Des conséquences 6.1 et 7.1 et des théorèmes 8.1 et 8.2 on obtient:

Conséquence 9.10. *Soit X un espace uniforme localement compact. Si les conditions* (d.1)–(d.4) *sont vérifiées, $I(Ab) \neq \emptyset$ et l'application g est b-strictement connexe sur D et y-connexe sur D pour tout $y \gg_Y b$, alors le problème* $P(g, b)$ *est stable aux perturbations des b et g.*

Conséquence 9.2. *Soit $X = R^n$, $D \subseteq X$, $D \neq \emptyset$ et D convexe. Si les conditions* (d.1)–(d.4) *ont lieu et si une des conditions suivantes est vérifiées:*

(i) *$I(Ab) \neq \emptyset$ et $g: X \to Y$ est b-strictement étoilée sur D et y-étoilée sur D, pour tout $y \geqq_Y b$,*
(ii) *$I(Ab) \neq \emptyset$ et g est b-strictement quasiconvexe sur D et y-quasiconvexe sur D pour tout $y \geqq_Y b$,*
(iii) *$g: X \to Y$ est p-sous-homogène ($p > 0$), $b \leqslant_Y O_Y$ et $O_n \in D$,*
(iv) *$I(Ab) \neq \emptyset$, D est dirigé à gauche et $g: X \to Y$ est strictement isotone.*

alors le problème $P(g, b)$ *est stable aux perturbations des b et g.*

Des théorèmes 6.2, 6.3, 7.2, 7.3, 8.1 et 8.2 s'obtiennent de même les résultats suivantes:

THÉORÈME 9.2. *Soit X un espace normé. Si les conditions* a.1) – a.7) *(de §6) sont vérifiées, Ab est borné et $f: X \to Z$ est uniformément continue sur D, alors le problème* $PO(\bar{g}, b)$ *est stable aux perturbations des b et g.*

THÉORÈME 9.3. *Soit X un espace normé et ordonné et* $s(b) \in Z$. *Si les conditions* (a.2), a.4) – a.11) *sont vérifiées et $f: X \to Z$ est uniformément continue sur D, alors le problème* $PO(\bar{g}, b)$ *est stable aux perturbations des b et g.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bereanu, B., *On the use of computers in stochastic programming*, Die Referate der 13. Internationalen Hochschulwoche, „Electronische Datenverarbeitung in der Wissenschaft, Wirtschaft und Verwaltung", Sudosteuropa Gesellschaft, Munchen, 88–106, (1972).

[2] Berge C., *Espaces Topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paris 1959.

[3] Bragard, L., *Ensembles étoilés et irradiés de R^n*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège **5–6**, 238–243, (1967).

[4] Evans J. P., Gould F. J., *Stability in Nonlinear Programming*, Opns. Res., **18**, 1, (1970).

[5] Evans J. P., Gould F. J., *Stability and exponential penalty function techniques in nonlinear programming*, Department of Statistics University of North Carolina at Chapel Hill, Institute of Statistics, Mimeo Series Nr. 723, 1970.

[6] Greenberg H. J., Pierskalla, N. P., *Extensions of the Evans-Gould Stability Theorems for Mathematical Programs*, Opns. Res. **20**, 1, 143–153 (1972).

[7] Levitin E. S., Polyak B. T., *Metodî minimizaţii prin nalicii organicenii* J. Vic. Mat. Fiz., **6**, 5, 787–823 (1966).

[8] Martinet B., *La méthode d'accumulation pour la résolution approchée de problème avec contraintes*, Seminaire d'analyse numérique, Université Scientifique et Medicale de Grenoble, février, 1971.

[9] Meyer R., *The Validity of a Family of optimization Methods*, SIAM J. of Control, **8**, 1 41–54 (1970).

[10] Tolstonogov, A. A., *O svoistvah funcţii maxima pri organicenii*, J. Vic. Mat. Fiz., **3**, 597–606 (1970).

[11] Tigan S., *Sur la stabilité des problèmes d'optimisation avec contraintes*, SEMA (Metra International) Note de travail nr. 170, 1971.

[12] Bourbaki N., *Topologie génerale*, Chap. I–II, Herman, Paris, 1940.

[13] Hogan W. W., *Point-to-set maps in mathematical programming*, SIAM Review, **15**, 3, (1973).

Reçu le 7, XII. 1976.