MATHEMATICA–REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 6, N° 2, 1977, pp. 133–137

EINE VERALLGEMEINERUNG DES SATZES VON LJUSTERNIK

von

I. KOLUMBÁN
(Cluj-Napoca)

Ausgehend von einer Idee von L. BITTNER [1], beweisen wir in der vorliegenden Note einen Existenzsatz über implizite Funktionen, der als Spezialfall den bekannten Satz von Ljusternik über den Kern der Fréchet-Ableitung eines Operators enthält.

Unser Satz lautet wie folgt.

SATZ. *Es seien X und Y reelle Banach-Räume, A eine offene nichtleere Teilmenge von X und W eine beleibige nichtleere Menge. $T : A \times W \to Y$ sei eine Abbildung, die für jedes $w \in W$ bezüglich der ersten Variablen auf A Fréchet-differenzierbar ist und für ein vorgegebenes Element $(x_0, w_0) \in A \times W$ die folgende Bedingung erfüllt:*

(i) *$T'_x(x_0, w_0) : X \to Y$ ist eine surjektive Abbildung.*

Dann gibt es für jede Zahl $\varepsilon \in]0, 1[$ und für jedes w aus der Menge

$$W_\varepsilon = \Big\{ w \in W : \|T'_x(x_0, w) - T'_x(x_0, w_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2a},\ \|T'_x(z, w) - T'_x(x_0, w)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2a}$$

$$\text{für alle } z \in A \text{ mit } \|z - x_0\| \leqslant \frac{a}{1-\varepsilon} \cdot \|T(x_0, w)\| \Big\} \cap$$

$$\cap \Big\{ w \in W : \|z - x_0\| \leqslant \frac{a}{1-\varepsilon} \|T(x_0, w)\| \Rightarrow z \in A \Big\}$$

ein Element $x = x(w) \in A$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) *$T(x(w), w) = \theta_Y$;*

2) *$x(w)$ besitzt die Darstellung $x(w) = x_0 + \Delta x + r$, wobei Δx der Variationsgleichung*

$$T'_x(x_0, w_0)\Delta x + T(x_0, w) = \theta_Y$$

genügt und r der Ungleichung

$$\|r\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\Delta x\|;$$

3) $\|x(w) - x_0\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|\Delta x\| \leq \frac{a}{1-\varepsilon}\|T(x_0, w)\|.$

Dabei wurde $a = 2\|\Lambda^{-1}\|$ gesetzt, wovei Λ^{-1} die Inverse der auf dem Quotientenrum X/N (N ist der Kern von $T'_x(x_0, w_0)$) durch

$$\Lambda(\dot{x}) = T'_x(x_0, w_0)(x), \quad x \in \dot{x} \in X/N.$$

erklärten Abbildung Λ bezeichnet.

Beweis. Wir wählen ein w aus W_ε und setzen

$$S_1(x) = \Lambda^{-1}[T'_x(x_0, w) - T'_x(x_0, w_0)](x - x_0)$$

$$S_2(x) = \Lambda^{-1}[T(x, w) - T(x_0, w) - T'_x(x_0, w)(x - x_0)],$$

wobei $\dot{x}_0$ die Klasse aus X/N bezeichnet, die x_0 als Repräsentanten enthält. Die Abbildung $S : X \to X/N$ sei durch

$$S(x) = \dot{x}_0 - \Lambda^{-1}T(x_0, w) - S_1(x) - S_2(x)$$

definiert. Gilt $T(x_0, w) = \theta_Y$, dann genügt es $x(w) = x_0$ zu setzen und der Satz ist bewiesen. Es sei daher im folgenden $T(x_0, w) \neq \theta_Y$.

Für x und z aus

$$B = \{z \in X : \|z - x_0\| \leq \rho\},$$

wobei

$$\rho = \frac{a}{1-\varepsilon}\|T(x_0, w)\|$$

ist, gilt einerseits die Ungleichung

$$\|S_1(z) - S_1(x)\| \leq \frac{a}{2}\|T'_x(x_0, w) - T'_x(x_0, w_0)\| \cdot \|z - x\| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|z - x\|$$

und andererseits nach Lemma 1 aus [1] die Ungleichung

$$\|S_2(z) - S_2(x)\| \leq \frac{a}{2}\|T(z, w) - T(x, w) - T'_x(x_0, w)(z - x)\| \leq$$

$$\leq \frac{a}{2}\|T'_x(x + \tau(z - x), w) - T'_x(x_0, w)\| \cdot \|z - x\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}\|z - x\|$$

für ein gewisses $\tau \in]0,1[$. Somit haben wir

(1) $$\|S(z) - S(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|z - x\| \quad \text{für alle } x, z \leq B.$$

Da

$$T(x, w) = T(x_0, w) + T'_x(x_0, w_0)(x - x_0) + [T'_x(x_0, w) - T'_x(x_0, w_0)](x - x_0) + [T(x, w) - T(x_0, w) - T'_x(x_0, w)(x - x_0)]$$

gilt, folgt, dass ein $x \in A$ der Gleichung $T(x, w) = \theta_Y$ genau dann genügt, wenn $S(x) = \dot{x}$ ist mit $x \in \dot{x}$. Um eine Lösung der Gleichung $S(x) = \dot{x}$ zu finden, benützen wir dieselbe Beweisidee wie im Kontraktionssatz von Banach. Wir definieren die Folgen $(\dot{x}_n)$, (x_n) durch

$$\dot{x}_n = S(x_{n-1}), \; x_n \in \dot{x}_n, \; \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2\|\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}\| \; (n = 1, 2, \ldots)$$

und beweisen durch vollständige Induktion, dass x_n für alle n der Menge B angehört.

In der Tat, es gilt $x_1 \in B$, weil

$$\|x_1 - x_0\| \leq 2\|\dot{x}_1 - \dot{x}_0\| = 2\|\Lambda^{-1}T(x_0, w)\| \leq (1 - \varepsilon)\rho.$$

Setzen wir nun voraus, dass $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ der Menge B angehören, dann ergibt sich wegen (1) aus

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq 2\|\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k\|$$

die Ungleichung

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon\|x_k - x_{k-1}\| \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

woraus

(2) $$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon^k\|x_1 - x_0\| \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

folgt. Wegen (2) gilt dann

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \leq$$

$$\leq (\varepsilon^{n-1} + \ldots + 1) \cdot \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|x_1 - x_0\| \leq \rho$$

d.h. x_n gehört B an.

Beachtet man nun die Ungleichungen

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq$$

$$\leq (\varepsilon^{n+p-1} + \ldots + \varepsilon^n)\|x_1 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\|x_1 - x_0\|,$$

$$\|\dot{x}_{n+p} - \dot{x}_n\| \leq \|\dot{x}_{n+p} - \dot{x}_{n+p-1}\| + \ldots + \|\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n\| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} (\|x_{n+p-1} - x_{n+p-3}\| + \ldots + \|x_n - x_{n-1}\|) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon^n}{2(1-\varepsilon)} \|x_1 - x_0\|,$$

so folgt, dass (x_n) und $(\dot{x}_n)$ Cauchy-Folgen sind. Setzen wir dann

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad \dot{x} = \lim_{n\to\infty} \dot{x}_n,$$

so gilt $x \in x$ und $S(x) = \dot{x}$, weil $\dot{x}$ abgeschlossen und S stetig ist.

Man kann nun leicht feststellen, dass für $x(w) = x$, $\Delta x = x_1 - x_0$ und $r = x - x_1$ die Aussagen 1) — 3) gelten. So haben wir die Abschätzungen

$$\|r\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_1\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|\Delta x\|$$

$$\|x(w) - x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|\Delta x\| \leq \frac{a}{1-\varepsilon} \|T(x_0, w)\|,$$

während aus $\Delta x \in S(x_0) - \dot{x}_0 = -\Lambda^{-1}T(x_0, w)$ die Gleichung

$$T'_x(x_0, w)\Delta x + T(x_0, w) = 0_Y$$

folgt.

Bemerkung. Für $N = \{0_X\}$ erhält man aus unserem Satz Theorem 1 der Arbeit [1].

Korollar ([2], S.41). *Es sein X und Y reelle Banach Räume, U eine offene nichtleere Teilmenge von X und x_0 ein Element von U. Ist die Abbildung $F : X \to Y$ auf U Fréchet-differenzierbar, ihre Ableitung $F' : U \to (X, Y)^*$ im Punkt x_0 stetig und $F'(x_0)$ eine surjektive Abbildung, dann gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_0, eine Zahl $L > 0$ und eine Abbildung $f : V \to X$, die für alle $z \in V$ die Eigenschaften*

$$F(z + f(z)) = F(x_0), \quad \|f(z)\| \leq L\|F(z) - F(x_0)\|$$

besitzen.

Beweis. Es sei $\varepsilon \in]0,1[$ und $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2b}$, wobei $b = 2\|\Gamma^{-1}\|$ ist und Γ^{-1} die Inverse der auf dem Quotientenraum $X/_{Ker\,F'(x_0)}$ durch

$$\Gamma(\dot{x}) = F'(x_0)(x), \quad x \in \dot{x}$$

erklärten Abbildung. Weil F' im Punkt x_0 stetig ist, gibt es eine offene Kugel $K(x_0, \rho) \subseteq U$ mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ρ, so dass gilt

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq \varepsilon' \text{ für alle } u, v \in K(x_0, \rho).$$

Um unseren Satz anwenden zu können, wählen wir $A = K\left(x_0, \frac{\rho}{2}\right)$, $W = K\left(0_X, \frac{\rho}{2}\right)$, $w_0 = 0_X$ und definieren $T : A \times W \to Y$ durch

$$T(x, w) = F(x + w) - F(x_0).$$

Weil F im Punkt x_0 stetig ist, gibt es eine Nullumgebung $V_1 \subseteq W$ mit

$$\|F(x_0 + w) - F(x_0)\| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{2b} \rho$$

für alle $w \in V_1$. Wegen $V_1 \subseteq W_\varepsilon$, gibt es nach unserem Satz zu jedem $w \in V_1$ ein $x(w) \in A$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$F(x(w) + w) - F(x_0) = 0_Y,$$

$$\|x(w) - x_0\| \leqslant \frac{b}{1-\varepsilon} \|F(x_0 + w) - F(x_0)\|.$$

Setzt man nun $V = V_1 + x_0$, $L = \frac{b}{1-\varepsilon}$, $w = z - x_0$ und $f(z) = x(w) - x_0$, so ergibt sich die Aussage des Korollars.

LITERATUR

[1] Bittner, L., *On Optimal Control of Processes Governed by Abstract Functional, Integral and Hyperbolic Differential Equations*, Mathematische Operationsforschung und Statistik, Band 6, Heft 1, S. 107–134, (1975).

[2] Joffe, A. D., Tihomirov, B. M., *Die Theorie der Extremalaufgaben* (russisch), Moskau 1974.

Eingegangen am 30. XII. 1976.

Universitatea Babeş–Bolyai
Facultatea de Matematică
Cluj-Napoca