MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, Nº 1, 1978, pp. 5–11

ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER POLYNOME BESTER APPROXIMATION

von
HELMUT BRAẞ
(Clausthal-Zellerfeld)

1. Die Resultate

Zur Illustration der folgenden Erörterungen beginnen wir mit einem Beispiel. Die Polynome bester Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ bezüglich des Raumes $C[0, 1]$ sind (Koeffizienten auf 4 Dezimalen gerundet):

$$p_0(x) = 1{,}8591,$$
$$p_1(x) = 0{,}8941 + 1{,}7183\,x,$$
$$p_2(x) = 1{,}0088 + 0{,}8547\,x + 0{,}8460\,x^2,$$
$$p_3(x) = 0{,}9995 + 1{,}0166x + 0{,}4217x^2 + 0{,}2800x^3.$$

Das Anfangsstück der Taylorreihe von f um Null ist
$t_3(x) = 1{,}0000 + 1{,}0000x + 0{,}5000x^2 + 0{,}1667x^3$.
Ein Vergleich der Koeffizienten legt die folgenden Vermutungen nahe:

1) Die Koeffizienten der Polynome bester Approximation streben gegen die Taylorkoeffizienten.
2) Die Konvergenz ist alternierend.

Diese Vermutungen erweisen sich als richtig (s.u. Satz 1 und Satz 2), darüber hinaus kommen diese Eigenschaften außer den Polynomen bester Approximation auch vielen Klassen von „Polynomen guter Approximation" zu. Um genauer sein zu können, definieren wir.

D e f i n i t i o n 1. *Standard-Methoden der Approximationstheorie sind:*
(i) *Konstruktion der Polynome bester Approximation;*
(ii) *Interpolation über Tschebyscheff-Knoten;*
(iii) *Konstruktion von Teilsummen der Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen;*

(iv) *Konstruktion von Teilsummen der Entwicklung nach Legendre-Polynomen.*

Es ist zu beachten, daß im Folgenden stets [0, 1] Grundintervall ist, daher sind Tschebyscheff-Knoten zu verstehen als Nullstellen von T_n^*, wo

$$T_n^*(x) := T_n(2x-1)$$

ist und T_n das gewöhnliche Tschebyscheff-Polynom bedeutet.

In den folgenden Sätzen 1, 2, 3 sei

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{in} x^i$$

ein mit einer Standard-Methode auf [0, 1] konstruiertes f approximierendes Polynom.

SATZ 1. *Es sei f reell-analytisch auf* [0, 1]. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_{in} = \frac{f^{(i)}(0)}{i!},\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Im Fall der Konstruktionsmethode (i) steht das im Wesentlichen bei v. GOLITSCHEK [2] (S. 39), im Fall der Konstruktionsmethode (iv) steht ein schwächeres Resultat in dieser Richtung bei KALUZA [3]. Der hier gegebene Beweis ist einfacher als die Beweise der beiden Vorgenannten.

SATZ 2. *Es sei $f^{(n+1)} \geqslant 0$ auf* [0, 1]. *Dann gilt*

$$(-1)^{n-i}\left(a_{in} - \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\right) \geqslant 0.$$

SATZ 3. *Es sei $f^{(n)}$ stetig auf* [0, 1]. *Dann existiert ein $\xi \in [0, 1]$ mit*

$$a_{nn} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

In den folgenden Sätzen 4, 5, 6, 7 sei

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{in} x^i$$

das Polynom bester Approximation für f bezüglich des Raumes C[0, 1].

SATZ 4. *f sei vollmonoton auf* [0, 1] (*d.h.* $\operatorname{sgn} f^{(v)} = (-1)^v$ *für alle v*) *Dann strebt die Folge $b_{in}(n = i, i+1, \ldots)$ monoton wachsend (fallend) gegen $\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$, wenn i gerade (ungerade) ist.*

SATZ 5. *f sei vollmonoton. Dann existiert zu jedem (i, n) ein $\xi \in [0, 1]$ mit*

$$b_{in} = \frac{f^{(i)}(\xi)}{i!}.$$

Die Voraussetzung der Vollmonotonie kann hier nicht weggelassen werden, das zeigt das Beispiel $f(x) = x^{n+1}$, das zugehörige Polynom bester Approximation hat bekanntlich negative Koeffizienten.

SATZ 6. *Es sei $f^{(n+1)} \geqslant 0$ auf* [0, 1], *aber auf keinem Teilintervall* $f^{(n+1)} \equiv 0$. *Dann gilt*

$$b_{in} \in [c_{in},\ d_{in}],$$

$$\text{wobei} \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n} c_{in} x^i \\ \sum_{i=0}^{n} d_{in} x^i \end{array}\right. \textit{Interpolationspolynome von } f \textit{ zu den Stützstellen} \left\{\begin{array}{l} (0, y_1, \ldots, y_n) \\ (y_1, \ldots, y_n, 1) \end{array}\right\}$$

sind. Hierbei bedeuten $y_1, \ldots, y_n$ die Nullstellen von T_n^*.

Da die Interpolationspolynome numerisch bequem zugänglich sind, erhält man so brauchbare Schranken für die b_{in}; man vergleiche das Beispiel in Tabelle 1, wo Satz 6 auf $f(x) = e^x$ angewandt ist.

Tabelle 1

$i =$	0	1	2	3	4	5
$c_{i5} =$	1,00000	−1,00000	0,49991	−0,16589	0,03941	−0,00555
$d_{i5} =$	0,99999	−0,99991	0,49923	−0,16402	0,03727	−0,00469

SATZ 7. *Ist $f^{(n)}$ vorzeichenkonstant auf* [0, 1] *für jedes n und weiter so beschaffen, daß*

$$\sup_n \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}\right| < \infty$$

ist, so gilt

$$b_{nn} = \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}\,[1 + O(n^{-1})],$$

$$b_{n-1,n} = \frac{f^{(n-1)}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{(n-1)!}\,[1 + O(n^{-1})].$$

Beispiel: Ist $f(x) = e^x$, so gilt

$$b_{nn} = \frac{\sqrt{e}}{n!}\,[1 + O(n^{-1})],$$

$$b_{n-1,n} = \frac{\sqrt{e}}{2(n-1)!}\,[1 + O(n^{-1})].$$

Mit der Beweismethode von Satz 7 lassen sich derartige Resultate noch verschärfen und verallgemeinern, jedoch soll darauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Ich danke den Herren cand. math. Glinzer und cand. math. Lange für die Durchführung numerischer Rechnungen.

2. Die Beweise

Beweis von Satz 1. Es soll gezeigt werden: Ist

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{in}\, x^i$$

eine Folge mit

(1) $$\|f - p_n\|_C = 0(q^n) \quad 0 < q < 1,$$

so ist

(2) $$\lim_{n\to\infty} a_{in} = \frac{f^{(i)}(0)}{i\,!}.$$

Hieraus folgt Satz 1, denn (1) ist im Fall der Konstruktionsmethode (i) auf Grund des klassischen Bernsteinschen Satzes erfüllt; im Fall der Konstruktionsmethoden (ii), (iii), (iv) beachtet man, daß es sich um Projektionsoperatoren L_n handelt, für die

$$\|f - L_n[f]\| \leqslant (\|L_n\| + 1)E_n[f]$$

gilt, hier ist $E_n[f] = 0(q^n)$ und $\|L_n\| = 0(n^2)$ in allen Fällen (vgl. z.B. NATANSON [5]), somit ist auch hier (1) erfüllt.

Um nun zu zeigen, daß (2) aus (1) folgt, betrachtet man die Reihe

(3) $$p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (p_{n+1} - p_n).$$

Sie hat die Teilsummen $p_0, p_1, \ldots$, konvergiert also gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f. Es wird gleich gezeigt werden, daß (3) sogar in einem Gebiet der komplexen Ebene, das $[0, 1]$ enthält, kompakt konvergiert. Daraus folgt dann nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie, daß sogar $p_n^{(i)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ für jedes feste i konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} p_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$$

gilt, was mit (2) äquivalent ist.

Es ist

$$\|p_{n+1} - p_n\|_C \leqslant \|p_{n+1} - f\|_C + \|f - p_n\|_C = 0(q^n),$$

somit folgt auf Grund einer Bernsteinschen Ungleichung (z.B. LORENTZ [4] S. 42)

(4) $$\sup_{z\in E} |p_{n+1}(z) - p_n(z)| = 0(q_1^n)$$

mit einem $q_1 > q$, aber $q_1 < 1$. Hier ist E eine gewisse Ellipse der komplexen Ebene, die 0 und 1 zu Brennpunkten hat. Aus (4) folgt sofort die behauptete Konvergenz von (3) in E.

Beweis von Satz 2. Wir schicken vorweg

L e m m a 1. *f sei nichtkonkav von n-ter Ordnung (d.h. alle $(n+1)$-ten dividierten Differenzen sind $\geqslant 0$). Das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(x_\nu \in [0, 1])$* sei

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, x^i.$$

das zu den Stützstellen $(x_0^*, x_1, \ldots, x_n)$ (mit $x_0^* \in [0, 1]$, $x_0^* > x_0$), sei

$$p^*(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i^*\, x^i.$$

Dann gilt

(5) $$(-1)^{n-i}(c_i^* - c_i) \geqslant 0$$

Beweis. Die Newtonsche Interpolationsformel ergibt

$$c_n = [x_0, x_1, \ldots, x_n\,; f], \qquad c_n^* = [x_0^*, x_1, \ldots, x_n\,; f]\,;$$

also

$$c_n^* - c_n = (x_0^* - x_0)[x_0, x_0^*, x_1, \ldots, x_n\,; f] \geqslant 0.$$

Das ist (5) für $i = n$. Weiter erkennt man

$$p^*(x) - p(x) = (c_n^* - c_n)\prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Hieraus folgt sofort, daß $p^* - p$ eine alternierende Koeffizientenfolge hat, das ergibt die Behauptung.

Zum Beweis des Satzes 2 geht man davon aus, daß alle Standard-Methoden Interpolationspolynome konstruieren, für (i) folgt das sofort aus dem Tschebyscheffschen Alternantenkriterium, für (ii) ist es trivial, für (iii) und (iv) sehe man CHENEY [1] S. 111. Es genügt also, Satz 2 für Interpolationspolynome zu beweisen. Das Interpolationspolynom, dessen Knoten sämtlich bei $x = 0$ liegen, hat bekanntlich die Koeffizienten $\frac{f^{(i)}(0)}{i\,!}$.

Um zu einem anderen Interpolationspolynom überzugehen, verschiebt man die Stützstellen nach rechts und beachtet Lemma 1. Da sich die Koeffizienten jedesmal in der gleichen Richtung ändern, folgt sofort Satz 2.

Beweis von Satz 3. p_n ist ein Interpolationspolynom, somit ist a_{nn} eine n-te dividierte Differenz, die sich bekanntlich in der angegebenen Form darstellen läßt.

Beweis von Satz 4. Unter den genannten Voraussetzungen ist $p_{n+1} \neq p_n$, somit hat nach dem Tschebyscheffschen Alternantenkriterium

$$p_{n+1} - p_n = (p_{n+1} - f) - (p_n - f)$$

$n + 1$ Nullstellen auf $[0, 1]$. Die Koeffizienten von $p_{n+1} - p_n$ alternieren also, und da nach Satz 3

$$\operatorname{sgn} b_{n+1, n+1} = (-1)^{n+1}$$

ist, folgt sofort

$$\operatorname{sgn} (b_{i, n+1} - b_{in}) = (-1)^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Das ist die Monotonie-Aussage. Die Konvergenz-Aussage folgt aus Satz 1, weil eine vollmonotone Funktion holomorph ist.

Beweis von Satz 5. Vgl. Satz 3 und Satz 4.

Beweis von Satz 6. Dieser Satz ergibt sich direkt aus Lemma 1 und dem folgenden Resultat von ROWLAND [6]: Unter den genannten Voraussetzungen gilt für die Interpolationspunkte u_i von p_n

$$y_i < u_i < y_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots n$$

(mit $y_0 = 0$, $y_{n+1} = 1$).

Beweis von Satz 7. Hierzu ist nötig

Lemma 2. *$f^{(n+2)}$ sei stetig. Dann existiert zu jedem $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ ein $\xi \in [0, 1]$ mit*

$$[x_0, x_1, \ldots x_n ; f] = \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\left\{\left[\sum_{i=0}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \sum_{i=0}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2\right\}.$$

Das Lemma folgt aus der bekannten Integraldarstellung der dividierten Differenzen (z.B. STEFFENSEN [7], S. 18), wenn man auf den Integranden Taylors Satz anwendet.

Den Beweis von Satz 7 führt man so, daß man die in Frage kommenden Koeffizienten der Interpolationspolynome aus Satz 6 mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel durch dividierte Differenzen ausdrückt

und auf diese Lemma 2 anwendet. Man erhält so

$$c_{nn} = \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} - \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\,\frac{n+4}{16},$$

$$d_{nn} = \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\,\frac{n+4}{16}$$

und erkennt leicht, daß unter den Voraussetzungen von Satz 7 diese Schranken für b_{nn} genügend nahe beieinanderliegen, um den angegebenen asymptotischen Ausdruck folgen zu können. $b_{n-1, n}$ läßt sich ähnlich behandeln.

LITERATUR

[1] Cheney E. W., *Introduction to Approximation Theory.* McGraw-Hill, New York (1966).

[2] v. Golitschek M., *Die Sätze von Jackson für Polynome* $\sum_{i=0}^{s} a_i x^{p_i}$. Dissertation, Würzburg (1969).

[3] Kaluza Th., *Mittlere Approximation mit linear unabhängigen Funktionen.* ZAMM 35, 161–169 (1955).

[4] Lorentz G. G., *Approximation of Functions.* Holt, Rinehart and Winston; New York (1966).

[5] Natanson I. P., *Konstruktive Funktionentheorie.* Akademie-Verlag, Berlin (1955).

[6] Rowland J. H., *Inequalities for the Interpolation Points in Chebyshev Approximation by Polynomials.* Num. Math. 17, 40–44, (1971).

[7] Steffensen J. F., *Interpolation.* Chelsea (1950).

Eingegangen am 15. IX. 1973.