MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, N° 1, 1978, pp. 51–56

SUR UN ANNEAU ISOMORPHE AVEC L'ANNEAU DE MIKUSINSKI

par

GHEORGHE HALIC
(Arad)

Le résultat principal de cet article consiste dans la construction, à l'aide d'une neutrice, d'un anneau isomorphe avec l'anneau de MIKUSINSKI. Pour la réalisation de cette construction, il faut définir au préalable une notion de convergence pour des opérateurs et donner une généralisation pour le théorème de C. FOIAŞ, concernant l'approximation des opérateurs.

§1. Soit T un nombre réel positif ou ∞. Désignons par $C[0, T[$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T[$ et par $C^*[0, T[$, l'ensemble des celles des éléments de $C[0, T[$, qui ne s'annulent pas identiquement dans aucun voisinage à droite de l'origine. Designons par $f * g$, le produit de convolution des fonctions f et g, donc la fonction définie sur $[0, T[$, qui pour chaque $x \in [0, T[$, prend la valeur

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Il résulte du théorème de Titchmarsh, concernant l'intervalle $[0, T[$, que si $f, g \in C^*[0, T[$, alors $f*g$ appartient aussi à $C^*[0, T[$ (voir [4]). Désignons par M, l'ensemble

$$M = \left\{\frac{f}{g},\ f \in C[0, T[,\ g \in C^*[0, T[\right\},$$

où la ligne de fraction note l'opération inverse de la convolution. Les éléments de M s'appellent opérateurs dans le sens de Mikusinski. Dans M, l'égalité, l'addition et la multiplication se definissent de la même façon que dans le cas des fonctions numériques. Avec ces opérations, M devient un anneau, qui s'appelle l'anneau de Mikusinski.

Vu que dans [4] n'est pas défini aucune notion de convergence pour M, nous définirerons ici une convergence, analogue avec celle définie dans [6], pour le cas $T = \infty$.

Définition 1. *Disons que la suite des opérateurs* (a_n) *converge, s'il existe* $\rho \in C^*[0, T[$, *afin que* $\rho * a_n \in C[0, T[$ *et sur chaque intervalle fermé de* $[0, T[$, *la suite* $(\rho * a_n)$ *converge uniformement. Dans ce cas, disons que la limite de* (a_n) *est* l'operateur

$$a = \frac{\lim(\rho * a_n)}{\rho}$$

et nous désignons ceci par $\mathrm{Lim}\, a_n = a$.

Montrons que si cette limite existe, alors elle ne dépend pas de $\rho \in C^*[0, T[$. Soi $r \in C^*[0, T[$ tel que $r * a_n \in C[0, T[$ et sur chaque intervalle fermé de $[0, T[$, $(r * a_n)$ converge uniformement et nous montrerons que

$$\frac{\lim(r * a_n)}{r} = \frac{\lim(\rho * a_n)}{\rho}.$$

En vertu de la définition de l'égalité des opérateurs, ça revient à montrer que $\rho * \lim (r * a_n) = r * \lim (\rho * a_n)$. On sait (voir [5]), que si la suite $(r * a_n)$ converge uniformement sur chaque intervalle fermé de $[0, T[$, alors la suite $\rho * r * a_n$ a aussi la même propriété et

$$\rho * \lim (r * a_n) = \lim (\rho * r * a_n).$$

Dans une façon analogue, a lieu

$$r * \lim (\rho * a_n) = \lim (r * \rho * a_n).$$

Puisque $r * \rho * a_n = \rho * r * a_n$, il résulte la conclusion.

Remarque. Vu que les fonctions localement integrables sont des cas particuliers d'opérateurs, il résulte que la définition 1 de la convergence peut être appliquée aussi aux suites des fonctions localement intégrables.

La limite introduite par la définition 1 a plusieurs des propriétés que les limites ont d'habitude.

Nous allons démontrer seulement celles qui nous seront utiles dans le §3.

Lemme 1. *Si* (f_n) *et* (g_n) *sont deux suites de fonctions continues sur* $[0, T[$, *qui convergent dans le sens de la définition* 1, *alors les suites* $(f_n \pm g_n)$ *et* $(f_n * g_n)$ *sont aussi convergentes dans le sens de la définition* 1 *et ont lieu*

$$\mathrm{Lim}\, (f_n \pm g_n) = \mathrm{Lim}\, f_n \pm \mathrm{Lim}\, g_n; \quad \mathrm{Lim}\, (f_n * g_n) = \mathrm{Lim}\, f_n * \mathrm{Lim}\, g_n.$$

Démonstration. Par hypotèse, il existe $\rho, r \in C^*[0, T[$, tel que $(\rho * f_n)$ et $(r * g_n)$ convergent uniformement sur chaque intervalle fermé de $[0, T[$ et

$$\mathrm{Lim}\, f_n = \frac{\lim(\rho * f_n)}{\rho}; \quad \mathrm{Lim}\, g_n = \frac{\lim(r * g_n)}{r}.$$

Vu que la suite, avec le terme de rang n

$$\rho * r * (f_n \pm g_n) = r * (\rho * f_n) \pm * \rho * (r * g_n)$$

converge uniformement sur chaque intervalle fermé de $[0, T[$, il résulte que $(f_n \pm g_n)$ est convergent dans le sens de la définition 1 et a lieu

$$\mathrm{Lim}\, (f_n \pm g_n) = \frac{\lim[\rho * r * (f_n \pm g_n)]}{\rho * r} = \frac{\lim[r * (\rho * f_n)] \pm \lim[\rho * (r * g_n)]}{\rho * r} =$$

$$= \frac{r * \lim(\rho * f_n) \pm \rho * \lim(r * g_n)}{\rho * r} = \frac{\lim(\rho * f_n)}{\rho} \pm \frac{\lim(r * g_n)}{r} =$$

$$= \mathrm{Lim}\, f_n \pm \mathrm{Lim}\, g_n.$$

Vu que la suite avec le terme de rang n

$$(\rho * r) * (f_n * g_n) = (\rho * f_n) * (r * g_n)$$

converge uniformement sur chaque intervalle fermé de $[0, T[$, il résulte que $(f_n * g_n)$ est convergent dans le sens de la définition 1 et a lieu

$$\mathrm{Lim}\, (f_n * g_n) = \frac{\lim(\rho * r) * (f_n * g_n)}{\rho * r} = \frac{\lim[(\rho * f_n) * (r * g_n)]}{\rho * r} =$$

$$= \frac{\lim(\rho * f_n) * \lim(r * g_n)}{\rho * r} = \frac{\lim(\rho * f_n)}{\rho} * \frac{\lim(r * g_n)}{r} = (\mathrm{Lim}\, f_n) * (\mathrm{Lim}\, g_n).$$

§2. Lemme 2. *Pour chaque opérateur* $a \in M$, *il existe une suite* (h_n), $h_n \in C[0, T[$, *qui converge vers* a, *dans le sens de la définition* 1.

Pour le cas $T = \infty$, l'affirmation du lemme 2 a été donnée par C. FOIAȘ dans [2].

Démonstration. Dans la démonstration du cas général, nous utiliserons aussi le lemme démontré dans [2]. „Si $T_0 > 0$, f, g sont somables sur $[0, T_0)$ et g est non-nulle presque partout dans le voisinage de l'origine, alors il existe $k_n \in C[0, T_0[$, tel que $(g * k_n)$ converge en moyenne vers f". De ce lemme, il résulte le corollaire suivant : si $T_0 > 0$, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $k \in C[0, T_0]$ tel que

$$\int_0^{T_0} |g * k - f| dt < \varepsilon.$$

Ce corollaire sera utilisé dans la démonstration du lemme 2.

Soit $a \in M$, ce qu'on peut écrire sous la forme $a = \frac{f}{g}$, $f \in C[0, T[$, $g \in C^*[0, T[$. Il faut montrer qu'il existe une suite (h_n), $h_n \in C[0, T[$, tel que (h_n) converge vers $\frac{f}{g}$, dans le sens de la définition 1. Nous allons construire (h_n) dans la façon suivante: prenons T_n, tel que $0 < T_n < T$ et $(T_n) \to T$ et prenons $\varepsilon_n < 0$, tel que $(\varepsilon_n) \to 0$. Conformément au corollaire ci-dessus, pour T_n et ε_n donnés, il existe $k_n \in C[0, T_n]$ tel que

$$\int_0^{T_n} |g * k_n - f| dt < \varepsilon_n.$$

Nous pouvons prolonger les fonctions k_n, tel que nous obtenions les fonctions h_n, définies et continues sur $[0, T[$ (par example, nous pouvons définir pour $t \in]T_n, T]$, $h_n(t) = k_n(T_n)$).

Montrons que (h_n) converge vers $\frac{f}{g}$, dans le sens de la définition 1. Ca signifie qu'il existe $\rho \in C^*[0, T[$, tel que $\rho * h_n \in C[0, T[$ et $(\rho * h_n)$ converge uniformement sur chaque intervalle fermé $[0, T^*] \cup [0, T[$ vers $\rho * \frac{f}{g}$. Soit $\rho = 1 * g \in C^*[0, T[$. Il est évident que $\rho * h_n \in C[0, T[$, car la convolution de deux fonctions continues est une fonction continue. Nous montrerons que, quelque soi T^*, $0 < T^* < T$, $((1*g)\bar{*}h_n)$ converge uniformement sur $[0, T[$, vers $1 * g * \frac{f}{g} = 1 * f$, c'est à dire, quelque soit $\varepsilon < 0$, il existe un entier positif m, tel que pour chaque $n > m$ et pour chaque $t \in [0, T[$, $|(1 * g * h_n)(t) - (1 * f)(t)| < \varepsilon$.

Des hypothèses faites sur les suites (T_n) et (ε_n), il résulte qu'il existe m_1 et m_2, tel que pour chaque $n > m_1$, $T_n > T^*$ et pour chaque $n > m_2$ $\varepsilon_n < \varepsilon$. En désignant par m le maximum de m_1 et m_2, nous avons pour chaque $n > m$, $[0, T^*] \subset [0, T_n]$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, et pour chaque $t \in [0, T^*]$

$$|(1 * g * h_n)(t) - (1 * f)(t)| = |(1 * g * k_n)(t) - (1 * f)(t)| =$$

$$= |(1 * (g * k_n - f))(t)| = \left| \int_0^t (g * k_n - f)(\tau) d\tau \right| \leqslant \int_0^t \left| (g * k_n - f)(\tau) \right| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{T^*} \left| (g * k_n - f)(\tau) d\tau \leqslant \int_0^{T_n} |(g \bar{*} k_n - f)(\tau)| d\tau < \varepsilon_n < \varepsilon.\right.$$

Par cela nous avons démonstré qu'il existe une suite (h_n), qui converge vers $a \in M$, dans le sens de la définition 1.

§3. La construction d'un anneau isomorphe avec M. Nous maintenons toutes les notations introduites dans les paragraphes précedents de cet article. Soit F, l'ensemble des suites ayant, comme termes, des fonctions de $C[0, T[$, soit $F_0 \subset F$, le sous-ensemble constitué des suites convergents dans le sens de la définition 1, et soit $N \subset F_0$, le sous-ensemble des suites ayant la limite zéro, dans le sens de la définition 1.

THÉORÈME 1. *L'ensemble F_0, muni de l'opération d'addition habituelle et de l'opération de convolution, forme un anneau.*

Démonstration. Conformément au lemme 1, il résulte que tant la somme que le produit de convolution des deux suites convergentes, dans le sens de la définition 1, est un suite convergente dans le sens de la définition 1. Les axiomes de l'anneau peuvent être aisément vérifier.

THÉORÈME 2. *L'ensemble N forme un idéal de F_0.*

Démonstration. Si (μ_n) et (ν_n) appartient au N, alors elles sont convergentes dans le sens de la définition 1, et $\text{Lim}\, \mu_n = 0$, $\text{Lim}\, \nu_n = 0$. D'après le lemme 1, il résulte $\text{Lim}\, (\mu_n - \nu_n) = \text{Lim}\, \mu_n - \text{Lim}\, \nu_n = 0$, donc $(\mu_n - \nu_n) \in N$. D'après le lemme 1, il résulte aussi que pour chaque $(\nu_n) \in N$ et $(f_n) \in F_0$, $(f_n * \nu_n)$ converge dans le sens de la définition 1, et $\text{Lim}\, f_n * \nu_n = \text{Lim}\, f_n * \text{Lim}\, \nu_n = 0$, donc $(f_n * \nu_n) \in N$. Donc N est un idéal de F_0.

THÉORÈME 3. *L'ensemble N forme une neutrice.*

Démonstration. Pour vérifier la définition de la neutrice, prenons $\nu_n \in N$. Il existe $\rho \in C^*[0, T[$ tel que sur chaque intervalle fermé de $[0, T[$, $(\rho * \nu_n)$ converge uniformement vers zero. Supposons que (ν_n) est un suite stationaire, donc pour chaque entier positif n, $\nu_n = \nu$. Le fait que $(\rho * \nu)$ converge vers zéro, implique $\rho * \nu = 0$. Puisque $\rho \in C^*[0, T[$, d'après le théorème de TITCHMARSH, il résulte que $\nu = 0$ sur $[0, T[$.

Désignons par $\mathfrak{M}$, l'ensemble $F_0/N = \{(f_n) + N, (f_n) \in F_0\}$, dans lequel nous définissons l'addition et la convolution des classes d'après la manière habituelle, utilisant pour chaque classe un représentant de celle-ci. N étant un idéal, les définitions des opérations ne dépendent pas des représentants, et $\mathfrak{M}$ a une structure d'anneau.

THÉORÈME 4. *L'anneau $\mathfrak{M}$ construit dans ce paragraphe est isomorphe avec l'anneau M des opérateurs de* MIKUSINSKI.

Démonstration. Considérons l'application $i : \mathfrak{M} \to M$, qui attache à une classe de $\mathfrak{M}$, la limite d'une suite de la classe respective. Montrons que la définition de i ne dépend pas du choix du représentant. Soit (f_n) et $(\bar{f}_n)$, deux suites de la même classe et soit a et $\bar{a}$, les limites des suites respectives. Il faut montrer que $a = \bar{a}$. Puisque (f_n) et $(\bar{f}_n)$ appartiennent à la même classe, il résulte qu'il existe $(\nu_n) \in N$, tel que pour chaque entier positif n, $\bar{f}_n - f_n = \nu_n$. Écrivant que les limites de ces deux membres sont égaux, et tenant compte du lemme 1, nous obtenons $a - \bar{a} = 0$, d'où la conclusion.

L'application i est injective. Ceci revient à montrer que si deux suites ont la même limite, alors elles appartiennent à la même classe de $\mathfrak{M}$. Le fait que les deux suites ont la même limite implique d'apres le lemme 1 que leur différence a la limite zéro, donc appartient à N, ce qui signifie que les deux suites sont de même classe.

L'application i est surjective. D'après le lemme 2, pour chaque opérateur $a \in M$, il existe une suite (f_n), $f_n \in C[0, T[$, qui converge vers a, dans le sens de la définition 1. Donc, a sera l'image par l'application i de la celle classe de $\mathfrak{M}$, qui contient la suite (f_n).

Jusqu'ici nous avons montré que i est une application bijective entre $\mathfrak{M}$ et M. Le fait que l'application i conserve l'addition et la convolution, résulte directement des propriétés de la limite contenues dans le lemme 1.

THÉORÈME 5. *L'anneau $\mathfrak{M}$ a un sous-ensemble isomorphe avec* $C[0, T[$.

Démonstration. Désignons par $\mathfrak{M}_1$, le sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, constitué par des classes qui contiennent des suites stationnaires des fonctions de $C[0, T]$, et par $\varkappa$, l'application $\varkappa : C[0; T[\to \mathfrak{M}_1$, qui attache à la fonction $f \in C[0, T[$, la classe de $\mathfrak{M}_1$, qui contient la suite stationnaire ayant le, termes égaux avec f. Montrons que l'application $\varkappa$ est injective. Pour cela supposons que $f, g \in C[0, T[$, $\varkappa(f) = \varkappa(g)$. L'égalité $\varkappa(f) = \varkappa(g)$, peut être encore écrite $(f) + N = (g) + N$.

D'ici il résulte qu'il existe $\mu_n, \nu_n \in N$, tel que $(f) + (\mu_n) = (g) + (\nu_n)$. Il résulte que $(f - g) \in N$, ce qui implique d'après la définition de la neutrice que $f - g = 0$, donc $f = g$. La surjectivité de $\varkappa$, et aussi le fait que l'application $\varkappa$ conserve les opérations, résultent imédiatement. Donc, $\varkappa$ est un izomorphisme entre $C[0, T[$ et $\mathfrak{M}_1$.

Remarque. Le théorème 5 pourrait être obtenu aussi sur une voie indirecte, utilisant le théorème 4, d'àprès quel $\mathfrak{M}$ est isomorphe avec M, et le théorème qui affirme que M a un sous-ensemble isomorphe avec $C[0, T[$ (démontré dans [5]). Même d'une façon plus générale, on sait que M a un sous-ensemble isomorphe avec l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $[0, T[$ D'après le théorème 4, il résulte que $\mathfrak{M}$ a aussi cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Corput, J. G. Van der, *Introduction in neutrices calculs.* Bulletin de la Société Mathematique de Belgique, XV, fasc. 1–3, pp. 19–32 (1963).

[2] Foiaş, C., *Approximation des opérateurs de J. Mikusinski par des fonctions continues.* Studia Math. **21**, pp. 73–74.

[3] Halic, G., *Sur une relation dans le calcul des neutrices.* Revue d'Analyse numérique et de la théorie de l'approximation, **3**, 2, pp. 167–171 (1974).

[4] Mikusinski, J., *Le calcul opérationnel d'intervalle fini.* Studia Math. **15**, pp. 225–251, (1956).

[5] Mikusinski, J., *Operatorszámitás.* Müszaki könyvkiado Budapest, 1961.

[6] Mikusinski, *Convolution approximation and shift approximation.* Studia Math. **28**, pp. 1–8. (1966).

Reçu le 18. I. 1976.

Str. 7 Noembrie 3 Arad