MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, N° 1, 1978, pp. 81–93

NOUVELLE ÉTUDE SUR L'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DES SÉRIES NUMÉRIQUES

par

ANDREI NEY
(Cluj-Napoca)

PRÉLIMINAIRES. D'après PRINGSHEIM, [8], *une série numérique,* Σv_n, *converge* – par définition – *plus rapidement qu'une autre série numérique,* Σu_n, *si le rapport* $\frac{\rho_n}{r_n}$ *de leurs restes correspondants tend à zéro pour* $n \to \infty$. (Cette définition suppose que r_n ne s'annulle pour aucun $n \in N$.) *Accélérer la convergence d'une série* Σu_n *signifie : appliquer à* Σu_n *une transformation* A *qui conserve la somme, donc* $\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty A u_n$, *mais que la transformée,* $\Sigma A u_n$, *converge plus vite que la série originelle,* Σu_n. Dans le cas des séries à termes positifs la relation à la limite $\frac{v_n}{u_n} \to 0$ implique pour les restes correspondants $\frac{\rho_n}{r_n} \to 0$ si $n \to \infty$; ce fait nous suggère de chercher – premièrement – une transformation B tel que $\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty B u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Bu_n}{u_n} = 0$. Une telle transformation conserve la somme et accélère au moins la convergence à zéro du terme général de la série. Un deuxième problème sera d'examiner les conditions pour qu'une transformation B soit une transformation A.

§ 1.

Si on conçoit d'une façon simple l'opérateur B, notamment, comme une multiplication du terme u_n par un facteur α_n, alors on arrive à chercher une suite (α_n) tendant à zéro si $n \to \infty$ et pour laquelle $\sum_1^\infty u_n =$

$= \sum_1^\infty \alpha_n u_n$. On obtient le

THÉORÈME 1.1. *Pour qu'une série numérique convergente, Σu_n, (réelle, complexe ou de quaternions) à termes non-nuls, puisse être transformée dans une série convergente Σv_n avec la conservation de la somme et soummise simultanément à la condition* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite numérique (ω_n) avec $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1$ et orthogonale à la suite (u_n), c'est-à-dire $\sum_1^\infty \omega_n u_n = 0$. Alors on aura $v_n = (1 - \omega_n)u_n$ $(n \in \mathbf{N})$.*

Démonstration. Regardant la nécessité : de l'égalité $\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty v_n$ suit $\sum_1^\infty (u_n - v_n) = 0 = \sum_1^\infty \left(1 - \frac{v_n}{u_n}\right) u_n$; et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$, résulte $\omega_n = 1 - \frac{v_n}{u_n}$ $(n \in \mathbf{N})$, qui satisfait les conditions imposées. Regardant la suffisance : s'il existe (ω_n) dans les conditions précisées par l'énoncé du théorème, alors

$$\sum_1^\infty u_n - \sum_1^\infty \omega_n u_n = \sum_1^\infty (1 - \omega_n) u_n$$

et la transformation demandée sera :

$$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty (1 - \omega_n) u_n. \tag{1}$$

On verra tout de suite que la transformation (1) du type B est aussi du type A si la série à transformer est à termes positifs.

R e m a r q u e. 1.1. Bien entendu qu'une transformation du type (1) se réalise aussi, si (ω_n) est substituée par $(\lambda \omega_n)$, (λ constante non-nulle), ainsi que par une combinaison linéaire pondérée des suites orthogonales du type (ω_n).

Dans ce qui suit, on présentera *une méthode pour chercher une suite (ω_n) orthogonale à la suite (u_n) et satisfaisant la condition* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1$.

1.1. Soit Σu_n une série numérique (réelle, complexe ou de quaternions) absolument convergente, pour laquelle $u_n \neq 0$, $s_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ et $s = \sum_1^\infty u_n \neq 0$.

Considérons au préalable la série $\sum \frac{u_n}{s_n}$ qui sera aussi absolument convergente, car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{\left|\frac{u_n}{s_n}\right|} = |s| \neq 0$. On applique la sommation par parties,

d'Abel, [2] :

$$\sum_{n+1}^{n+p} u_k \omega_k = \sum_{n+1}^{n+p} s_k(\omega_k - \omega_{k+1}) + s_{n+p}\,\omega_{n+p+1} - s_n\,\omega_{n+1} \qquad \left(s_k = \sum_{i=1}^{k} u_i\right)$$

et on pose $n = 0$ (par définition $s_0 = 0$), d'où

$$\sum_1^p u_k \omega_k = \sum_1^p s_k(\omega_k - \omega_{k+1}) + s_p\,\omega_{p+1}.$$

En faisant $p \to \infty$ et en imposant la condition d'orthogonalité, tenant compte du fait que $\omega_{p+1} \to 1$, on obtient

$$0 = \sum_1^\infty u_k \omega_k = \sum_1^\infty s_k(\omega_k - \omega_{k+1}) + s,$$

d'où

$$s = \sum_1^\infty u_k = \sum_1^\infty s_k(\omega_{k+1} - \omega_k) \tag{2}$$

(cette dernière identité étant valable même pour une série „simplement" convergente !). On cherche à identifier les termes du même rang des deux séries figurant dans (2) :

$$u_k = s_k(\omega_{k+1} - \omega_k), \quad \text{d'où} \quad \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{u_k}{s_k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

On y applique l'opération $\sum_1^{n-1}$, d'où : $\omega_n = \omega_1 + \sum_1^{n-1} \frac{u_k}{s_k}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. On impose la condition $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1$, et on obtient $1 = \omega_1 + \sum_1^\infty \frac{u_k}{s_k}$ donc

$$\omega_n = 1 - \sum_1^\infty \frac{u_k}{s_k} + \sum_1^{n-1} \frac{u_k}{s_k} = 1 - \sum_n^\infty \frac{u}{s_k}.$$

Or, $\sum_n^\infty \frac{u_k}{s_k}$ est le reste r'_{n-1} de la série convergente $\sum \frac{u_k}{s_k}$. Ainsi on arrive au résultat — „théoriquement" constructif —

$$\omega_n = \begin{cases} 1 - r'_{n-1}, & \text{pour } n = 2, 3, \ldots \\ 1 - \sum_1^\infty \frac{u_k}{s_k}, & \text{pour } n = 1 \end{cases} \qquad \left(r'_0 = \sum_1^\infty \frac{u_k}{s_k}\right). \tag{3}$$

On peut montrer directement l'orthogonalité de la suite (3) à la suite (u_n), en utilisant de nouveau la sommation par parties d'Abel :

$$\sum_{n+1}^{n+p} u_k(1 - r'_{k-1}) = \sum_{n+1}^{n+p} s_k[(1 - r'_{k-1}) - (1 - r'_k)] + s_{n+p}(1 - r'_{n+p}) - s_n(1 - r'_n).$$

Pour $n = 0$ $(s_0 = 0)$

$$\sum_1^p u_k(1 - r'_{k-1}) = \sum_1^p s_k(r'_k - r'_{k-1}) + s_p(1 - r'_p) = -\sum_1^p u_k + s_p(1 - r'_p) = -s_p r'_p$$

$\left(\text{car } r'_{k-1} - r'_k = \frac{u_k}{s_k}\right)$. Le dernier membre du système ci-dessus a comme limite zéro, pour $p \to \infty$ (car $r'_p \to 0$ et $s_p \to s$), donc $\sum_1^\infty u_n(1 - r'_{n-1}) = 0$.

1.2. On envisage ensuite une autre construction théorique d'une suite (ω_n) qui satisfait aux conditions du théorème 1.1. Soit la série absolument convergente dont la somme est $s \neq 0$. Si on note $s_n = \sum_1^n u_k$ et $r_n = \sum_{n+1}^\infty u_k$, alors $\omega_n = \frac{1}{s}(s_n - r_{n-1}) \to 1$ $(n \to \infty)$. En effet, en appliquant la sommation par parties, d'Abel :

$$\sum_{n+1}^{n+p} u_k \frac{1}{s}(s_k - r_{k-1}) =$$

$$= \frac{1}{s}\left[\sum_{n+1}^{n+p} s_k(s_k - r_{k-1} - s_{k+1} + r_k) + s_{n+p}(s_{n+p+1} - r_{n+p}) - s_n(s_{n+1} - r_n)\right];$$

en y mettant $n = 0$ et par définition $s_0 = 0$, on obtient

$$\frac{1}{s}\sum_1^p u_k(s_k - r_{k-1}) = \frac{1}{s}\left[-\sum_1^p s_k(u_k + u_{k+1}) + s_p(s_{p+1} - r_p)\right].$$

Puis, en faisant $p \to \infty$, il résulte :

$$\frac{1}{s}\sum_1^\infty u_k(s_k - r_{k-1}) = \frac{1}{s}\left[s^2 - \sum_1^\infty s_k(u_k + u_{k+1})\right] =$$

$$= \frac{1}{s}\left[\sum_1^\infty s u_k - \sum_1^\infty s_k(u_k + u_{k+1})\right] = \frac{1}{s}\sum_1^\infty (s u_k - s_k u_k - s_k u_{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_1^\infty (r_k u_k - s_k u_{k+1}) = \frac{1}{s}\sum_1^\infty [u_k r_k - s_k(r_k - r_{k+1})] =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_1^\infty [(u_k - s_k) r_k + s_k r_{k+1}].$$

Donc : $\sum_1^\infty u_k \omega_k = \frac{1}{s}\sum_1^\infty (s_k r_{k+1} - s_{k-1} r_k) = 0$. C.Q.F.D.

1.3. Dans le §3 on verra des séries convergentes à termes positifs, pour lesquelles $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, et pour ce dernier motif les transformations usuelles n'ont pas l'effet d'accélérer leur convergence. *Dans ce cas on peut toujours construire effectivement une suite* (ω_n) *conformément aux conditions des théorèmes* 1.1. *et* 1.2., *à l'aide de laquelle on réalise l'accélération de la convergence.* En effet, soit $\sum_1^\infty u_n = s \in R_+$, $u_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$; $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et par définition $u_0 = 0$. On a évidemment

$$\sum_1^\infty \left(\frac{s_{n-1}}{s_n} u_n - \frac{s_n}{s_{n+1}} u_{n+1}\right) = 0, \text{ autrement : } \sum_1^\sigma \left(\frac{s_{n-1}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n+1}} \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) u_n = 0, \text{ d'où}$$

$$\omega_n = \frac{s_{n-1}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n+1}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1 \ (n \to \infty) \text{ et } \sum_1^\infty \omega_n u_n = 0.$$

Alors la transformation (1) appliquée à l'aide de cette suite, accélère la convergence de la série Σu_n. Les calculateurs sont convenables pour ce but.

§ 2.

La transformation formulée par le théorème 1.1. inclut des transformations classiques.

2.1. L'ENGENDREMENT DE LA TRANSFORMATION DE KUMMER. Soit $\sum_1^\infty u_n = s$ (s, nombre inconnu ou difficilement approximable) ; on met en jeu une série qui sera déterminée après et qui aura, par suite, une somme connue $\sigma = \sum_1^\infty v_n$. On en forme une série à somme nulle en mettant $v_0 = -\sigma$, donc $\sum_0^\infty v_n = 0$. On complète la série $\Sigma\, u_n$ avec un terme fictif u_0, donc $\sum_0^\infty u_n = u_0 + s$, et on cherche à déterminer une suite $(\omega_n)_0^\infty$ orthogonale à la suite $(u_n)_0^\infty$. On écrit

$$\omega_0 u_0 + \omega_1 u_1 + \ldots + \omega_n u_n + \ldots = 0,$$

et on impose

$$\omega_0 u_0 = v_0 = -\sigma,\ \omega_1 u_1 = v_1,\ \ldots,\ \omega_n u_n = v_n,\ \ldots$$

d'où $\omega_n = \frac{v_n}{u_n}$ $(n \in \mathbf{N})$, puis on soumet (ω_n) à la condition $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 1$, donc (v_n) doit être assymptotiquement égale à (u_n) et par suite $v_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Conformément à (1)

$$\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty \left(1 - \frac{v_n}{u_n}\right) u_n,$$

d'où, en détachant les termes initiaux des deux membres de l'égalité précédente :

$$u_0 + \sum_1^{\infty} u_n = \left(1 - \frac{v_0}{u_0}\right) u_0 + \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{v_n}{u_n}\right) u_n,$$

d'où

$$(4) \qquad \sum_1^{\infty} u_n = \sigma + \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{v_n}{u_n}\right) u_n, \quad \left(\sigma = \sum_1^{\infty} v_n\right),$$

qui est justement la transformation de Kummer sous la forme présentée dans [2], et qui accélère toujours la convergence si $\Sigma\, u_n$ est une série convergente à termes positifs, [4].

Remarque 2.1. *La transformation de Kummer appliqué au séries trigonométriques*, [3], [1], *accélère effectivement la convergence de celles-ci* — — vu le **théorème 3** que l'auteur a publié dans [7].

2.2. LA DÉTERMINATION D'UNE SUITE (ω_n) POUR UNE SÉRIE ALTERNÉE. Soit $\Sigma(-1)^{n-1} u_n$ avec $u_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; on note $s = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ et on applique la sommation par parties, d'Abel, [2] :

$$(4') \qquad \sum_{n+1}^{n+p} (-1)^{k-1} u_k = \sum_{n+1}^{n+p} s_k (u_k - u_{k+1}) + s_{n+p} \cdot u_{n+p+1} - s_n u_{n+1},$$

où $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} = \frac{1 + (-1)^{k-1}}{2}$. On pose dans (4') $n = 0$ (par définition $s_0 = 0$), puis on passe à la limite : $p \to \infty$, d'où

$$s = \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} u_k = \sum_1^{\infty} s_k (u_k - u_{k+1})$$

et d'ici :

$$\sum_1^{\infty} \left[(-1)^{k-1} u_k - \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{k-1}\right)(u_k - u_{k+1}) \right] = 0,$$

qui se transforme en mettant $(-1)^{k-1} u_k$ en facteur :

$$\sum_1^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \left((-1)^{k-1} + 1\right) \left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \right] (-1)^{k-1} u_k = 0.$$

Par suite $\omega_k = 1 - \frac{1}{2} \left((-1)^{k-1} + 1\right) \left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$, $k \in \mathbf{N}$, ou autrement

$$\omega_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases}$$

évidemment $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1$. Alors, la transformation (1) avec (ω_n) qui vient d'être déterminée, sera

$$s = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}\right) (-1)^{2m-2} \cdot u_{2m-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (u_{2m-1} - u_{2m}) ;$$

ceci veut dire qu'il faut coupler les termes de la série alternée deux par deux, pour obtenir une série à termes positifs $\Sigma\, v_m$, où $v_m = u_{2m-1} - - u_{2m}$ $(m \in \mathbf{N})$, [7].

2.3. SUR LA TRANSFORMATION D'EULER. Cette transformation, [2], est

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

où $\Delta^0 a_k = a_k$, $\Delta^1 a_k = \Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^{n+1} a_k = \Delta(\Delta^n a_k)$, $(n \in \mathbf{N})$ et $\Sigma(-1)^n a_n$ est une série numérique convergente (pas nécessairement alternée — la notation ci-dessus est adoptée pour quelques avantages formelles). On conçoit comme suite (ω_n) nécésitée par la transformation (1) :

$$\omega_n = 1 + \frac{1}{(-2)^{n+1}} \frac{\Delta^n a_0}{a_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

En effet

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n = \sum_0^{\infty} \left[(-1)^n a_n - \frac{\Delta^n a_0}{2^{n-1}} \right] = 0,$$

tenant compte de (5). Pour que le terme général de la transformée tende plus vite à zéro que celui de la série originelle, il faut et il suffit qu'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1$. Ceci implique $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\Delta^n a_0}{a_n} = 0$. Conformément au théorème de Toeplitz, [2], on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^n} = 0$, car $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; notre condition est donc plus exigente, — la transformation d'Euler pouvant aussi retarder la convergence à zéro du terme général.

2.4. SUR LA TRANSFORMATION D'EULER-ABEL. Cette transformation, [1], se rapporte à une série de puissance (réelle ou complexe, même de quaternions) $\Sigma\, a_n z^n$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, donc pour laquelle le rayon de convergence est 1, notamment

$$(6) \qquad \sum_0^{\infty} a_n z^n = \sum_0^{\infty} \frac{\Delta a_{n-1}}{1 - z} z^n \qquad \text{où } \Delta a_{n-1} = a_n - a_{n-1}, \ a_{-1} = 0.$$

La suite (ω_n) sera donnée par

$$\omega_n = 1 - \frac{1}{1-z}\,\frac{\Delta a_{n-1}}{a_n} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

l'orthogonalité se vérifie facilement à l'aide de (6) et $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1$ résulte du fait que $\frac{\Delta a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = 1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} \to 0 \ (n \to \infty)$; donc l'accélération de la convergence du terme général vers zéro est assurée. (Regardant une condition suffisante pour que la transformée converge plus vite que la suite originelle, voir [7].)

§ 3.

3.1. COMMENT POSE-T-ON LE PROBLÈME DU POINT FIXE DANS LE CAS DES TRANFORMATIONS ACCÉLÉRATRICES? Une transformation quelconque T, soummise à la seule condition qu'elle conserve la somme d'une série convergente: $\sum\limits_1^\infty u_n = \sum\limits_1^\infty Tu_n$, peut être une transformation B ou une transformation A (voir : préliminaires) ou bien une transformation qui pour certaine séries se comporte comme une transformation B ou A et pour d'autre séries elle n'est ni B ni A. Pour une telle transformation on peut — en principe — chercher les points fixes, c'est-à-dire les séries qui restent les mêmes après qu'on leur applique T, donc $Tw_n = w_n$. La transformation (1) n'a pas de point fixe, car elle est une transformation B (d'ailleurs, de $(1-\omega_n)u_n = u_n$ résulterait pour chaque $n \in \mathbf{N}$ l'égalité $\omega_n = 0$, qui contredit les conditions fondamentales de cette transformation). La transformation de Kummer — forme (4) — n'est pas exactement du type $\sum\limits_1^\infty u_n = \sum\limits_1^\infty Tu_n$, mais du type $\sum\limits_1^\infty u_n = \sigma + \sum\limits_1^\infty Au_n$, où σ est une constante positive. Même si on cherchait de satisfaire la condition $Au_n = u_n$ à partir d'un certain rang $n \geqslant n_0$, on arriverait à $v_n = 0$ $(n \geqslant n_0)$ ce qui serait absurde pour la série Σv_n à termes strictement positifs. Mais il y a des transformations du type T (mentionnées ci-dessus) pour lesquelles le problème du point fixe se pose. Du point de vue du calcul numérique on peut considérer *des „véritables" points fixes, donc des séries pour lesquelles* $\sum\limits_1^\infty Tu_n = \sum\limits_1^\infty u_n$ *et* $Tu_n = u_n$ $(n \in N)$, d'autre part *des points „pseudo-fixes" c'est-à-dire des séries pour lesquelles* $\sum\limits_1^\infty Tu_n = \sum\limits_1^\infty u_n$ *et* ΣTu_n *converge avec la même rapidité que* Σu_n, *sans qu'on ait* $Tu_n = u_n$ $(n \in \mathbf{N})$. C'est le cas, par exemple, où Σu_n este une valeur propre de T, donc $Tu_n = \lambda u_n$, $n \in \mathbf{N}$ et λ étant une constante différente de l'unité, et simultanément $\sum\limits_1^\infty Tu_n = \sum\limits_1^\infty u_n$. *Les points fixes et pseudo-fixes d'une transformation T sont des séries qui marquent le domaine d'inefficacité de T, au point de vue de l'accélération de la convergence.*

3.2. POINTS FIXES DES TRANSFORMATIONS KUMMERIENNES. Partant de la forme limite

(7) $$\mu_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \to \mu > 0 \qquad (n \to \infty)$$

du critère de Kummer-Jensen pour les séries à termes strictement positifs, [6], que l'on peut mettre aussi sous la forme

(7 bis) $$\frac{u_{n+1}}{a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}} \to \frac{1}{\mu} \qquad (n \to \infty),$$

on voit facilement que $\sum \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1})$ est une série convergente qui peut jouer le rôle de la série Σv_n dans la transformation (4) de Kummer. Cette transformation peut être écrite d'après [7],

$$\sum_1^\infty u_n = \left(1 + \frac{a_1}{\mu}\right) u_1 + \sum_1^\infty \left[1 - \frac{1}{\mu}\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\right] u_{n+1},$$

et après une légère modification elle devient

(8) $$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \left[1 - \frac{1}{\mu}\left(a_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} - a_n\right)\right] u_n, \text{ avec } u_0 = 0.$$

Pour notre but on fait la substitution $l_n = \frac{1}{1+\mu_n}$, donc

(9) $$l_n = \frac{u_{n+1}}{a_n u_n - (a_{n+1} - 1) u_{n+1}} \to l = \frac{1}{1+\mu} \qquad (n \to \infty),$$

d'où

(10) $$\mu = \frac{1-l}{l}.$$

Si on substitue (10) dans (8) on obtient

(11) $$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \left[1 - \frac{l}{1-l}\left(a_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} - a_n\right)\right] u_n.$$

On envisage la transformation kummerienne

(12) $$T_{u_n}^{(a_n)} = \left[1 - \frac{l}{1-l}\left(a_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} - a_n\right)\right] u_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

et on en cherche les points fixes de $T^{(a_n)}$ à partir de $T^{(a_n)}u_n = u_n$, donc on identifie la parenthèse droite de l'égalité (12) avec l'unité. Par suite

$$\frac{l}{1-l}\left(a_{n-1}\frac{u_{n-1}}{u_n} - a_n\right) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

d'où: soit $l = 0$, soit $a_{n-1}u_{n-1} - a_n u_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Or, la dernière égalité ne peut pas avoir lieu, car ceci signifierait $0 = a_0 u_0 = a_1 u_1 = \ldots = a_n u_n = \ldots$, malgré que $a_n \neq 0$ et $u_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Donc, *les points fixes de la transformation* (11) *de Kummer sont justement les séries pour lesquelles la constante l obtenue de* (9), *est nulle.*

La condition $l = 0$ équivaut — conformément à (10) — *à* $\mu = +\infty$. Regardons de plus près ce résultat pour les différentes classes kummeriennes:

I. Soit $a_n = 1$ $(n \in \mathbf{N})$, la *„classe de d'Alembert"*, $T^{(1)}$. D'après (9) on a $l_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ $(n \to \infty)$; $l = 0$ caractérise une famille de séries dont chaque élément converge plus rapidement qu'une série pour laquelle $0 < l < 1$.

II. Soit $a_n = n$ $(n \in \mathbf{N})$, la *„classe de Raabe-Duhamel"*, $T^{(n)}$. D'après (9):

$$l_n = \frac{u_{n+1}}{n\,u_n - n\,u_{n+1}} = \frac{1}{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)} \to l\,;$$

$l = 0$ équivaut à $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r = +\infty$; $r = +\infty$ caractérise une famille de séries, dont chaque élément converge plus rapidement qu'une série pour laquelle $1 < r < +\infty$.

De ces deux cas particuliers ressort l'intéressante constatation, que *ces classes de transformations kummeriennes n'ont aucun effet sur les séries faisant part de la famille ayant la rapidité de convergence „très grande"*.

On remarque, d'après (9), que *si dans le cas du critère de d'Alembert* $l_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$ $(n \to \infty)$, *alors dans le cas de celui de Raabe-Duhamel résulte* $l_n = \frac{1}{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)} \to 0$ $(n \to \infty)$. *La réciproque n'a pas lieu.* En effet, soit la série $\sum \frac{n!}{n^n}$. Conformément au critère de Raabe-Duhamel

$$l_n = \frac{1}{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)} = \frac{1}{n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1\right]} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

mais conformément au critère de d'Alembert

$$l_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \qquad (n \to \infty),$$

donc:

l'ensemble des points fixes de la transformation $T^{(n)}$ („Kummer — Raabe-Duhamel") *contient comme sous-ensemble celui des points fixes de la transformation* $T^{(1)}$ („Kummer — d'Alembert").

III. On envisage le développement du nombre e en série

$$e = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}.$$

Si on applique le critère de d'Alembert, on obtient

$$l_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \to l = 0 \qquad (n \to \infty)$$

et dans le cas du critère de Raabe-Duhamel un calcul direct nous donne

$$l_n = \frac{1}{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)} = \frac{1}{n^2} \to l = 0 \qquad (n \to \infty),$$

donc, *aucun des formes particulières* $T^{(1)}$ *ou* $(T^{(n)}$, *de la transformation de Kummer n'accélère pas la convergence de la série envisagée.*

Si on applique le critère de Kummer avec $a_n = \frac{1}{n}$, alors conformément à (9) on aura pour $u_n = \frac{1}{n!}$:

$$l_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{n(n+1)}} \to l = \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

En séparant le premier terme de la somme qui figure dans le second membre de (11) et en tenant compte de (8) — d'après laquelle $u_0 = 0$ — on obtient $\left(\text{avec } l = \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n!} = 2 - \sum_2^\infty \frac{1}{(n-1)n^2(n-1)!} = 2 - \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)^2 n!},$$

pour la série de e on aura, donc

$$e = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} = 3 - \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)^2 n!},$$

qui est une transformation accélérant sensiblement la convergence.

Nous remarquons, que même la convergence de la série $\Sigma \frac{1}{n^n}$ peut être accélérée par cette voie, en mettant $a_n = \frac{1}{cn}$ $\left(\text{d'où } l = \frac{1}{2}\right)$.

Dans le cas $a_n = \frac{1}{n}$ on a conformément à (9) :

$$l_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\frac{u_n}{u_{n+1}} + 1 - \frac{1}{n+1}}, \quad \text{d'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n\left(\frac{1}{l_n} - \frac{n}{n+1}\right)}$$

Si pour $n \to \infty$ on a $l_n \to 0$, alors on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$. Vu aussi l'exemple traité au point III., on peut énoncer la proposition :

l'ensemble des points fixes de la transformation kummerienne $T^{(1)}$ contient comme sous-ensemble celui des points fixes de la transformation kummerienne $T^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Alors :

THÉORÈME 3.1. *Les ensembles de points fixes correspondant aux transformations kummeriennes $T^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, $T^{(1)}$, $T^{(n)}$, satisfont la suivante relation: $F_{T^{\left(\frac{1}{n}\right)}} \subset F_{T^{(1)}} \subset F_{T^{(n)}}$ — donc, l'ensemble des points fixes envisagés croit d'une façon monotone avec la „sensibilité" des critères d' a_n-convergence,* [5].

3.3. POINTS PSEUDO-FIXES DES TRANSFORMATIONS D'EULER. La transformation (5) d'Euler a un seul point fixe trivial, notamment la série à tous les termes nuls. On s'en peut convaincre facilement en mettant $\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} = \lambda(-1)^n a_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et λ une constante réelle. D'ici, en faisant

$$n = 0, \text{ on obtient } \frac{a_0}{2} = \lambda\, a_0, \qquad \text{d'où } \lambda = \frac{1}{2};$$

$$n = 1, \quad ,, \quad \frac{a_0 - a_1}{2^2} = -\frac{1}{2} a_1, \quad ,, \quad a_1 = -a_0;$$

$$n = 2, \quad ,, \quad \frac{a_0 - 2a_1 + a_2}{2^3} = \frac{1}{2} a_2, \quad ,, \quad a_2 = a_0,$$

et par induction : $a_n = (-1)^n\, a_0$, d'où la série cherchée sera $\Sigma(-1)^{2n}\, a_0$, c'est-à-dire Σa_0, qui peut converger si et seulement ai $a_0 = 0$; c'est le cas trivial.

Concernant la transformation (6) d'Euler-Abel, le résultat de notre investigation sera le même. En effet, de $\frac{\Delta a_{n-1}}{1-z} z^n = \lambda a_n z^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ résulte $\Delta a_{n-1} = \lambda(1 - z)a_n$; on note $k = \lambda(1 - z)$ pour une certaine valeur de z et on obtient successivement

pour $n = 0$ on a $a_0 - a_{-1} = ka_0$, d'où $k = 1$

pour $n = 1$ on a $a_1 - a_0 = a_1$, d'où $a_0 = 0$

et ainsi de suite ... $a_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Mais *on peut avoir des éléments pseudo-fixes* (c'est-à-dire dont la transformée a la même rapidité que la série originelle). Dans ce but on transcrit (6) de la façon suivante, [1],

$$\sum_0^\infty a_n z^n = \frac{a_0}{1-z} + \frac{z}{1-z} \sum_0^\infty (\Delta a_n) \cdot z^n$$

et on cherche à mettre $\Delta a_n = a_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, d'où $a_{n+1} - a_n = a_n$, donc $a_{n+1} = 2a_n$, et par induction : $a_n = 2^n\, a_0$. La transformation Euler-Abel de la série $\Sigma\, 2^n a_0 z^n$ $\left(\text{à rayon de convergence } r = \frac{1}{2}\right)$ sera

$$\sum_0^\infty 2^n a_0 z^n = \frac{a_0}{1-z} + \frac{z}{1-z} \sum_0^\infty 2^n a_0 z^n.$$

(On peut vérifier aussi directement la validité de l'identité précédente.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Démidovitch, B., Maron I., *Éléments de calcul numérique*. Ed. MIR. Moscou, 1973.
[2] Knopp, K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Springer Verlag, Berlin-New York, 1964.
[3] Крылов, А. Н.,: *Лекции о приближенных вычислениях*. Техтеориздат,. Москва, 1954.
[4] Ney, A., *Un procedeu de îmbunătăţire a convergenţei seriilor şi a integralelor improprii*. Studii şi Cerc. de Mat, Cluj, Tom. **XIII**, **2**, 317–339 (1962).
[5] — *Contribution à l'étude de la rapidité de convergence des séries à termes positifs*. Mathematica, **4 (27)**, 1, **77**–106 (1962).
[6] — *O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi*. Studii şi Cerc. de Mat. Cluj Tom **XII**, nr, 2, 315–332 (1961).
[7] — *Compléments regardant la rapidité de convergence des séries*. Rev. Analyse num. et théorie de l'approx. Tome **5**, No. 2, 189–192 (1976).
[8] Pringsheim, A., *Vorlesungen über Zahlen und Funktionenlehre*. 1.2. Unendliche Reihen mit reellen gliedern. Verl. Teubner, Berlin, 1923.
[9] Романовский, В, Н.: *Введение в анализ. Избранные труды I*. Изд. Акад. наук Узбекской СС. Ташкенм, 1959.

Reçu le 8. I. 1978.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică
Str. Kogălniceanu 1
3400 Cluj–Napoca,