MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, N° 1, 1978. pp. 95—99

UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE DE NEWTON

par

ION PĂVĂLOIU

(Cluj-Napoca)

Dans ce travail on indique une manière d'obtenir une classe de méthodes itératives de type Newton pour la résolution des équations opérationnelles dans les espaces de Banach.

Ensuite, on étudie les conditions de convergence de cette méthode.

Soit X un espace de type Banach et Y un espace linéaire normé. Nous désignons par X^2 le produit cartésien de l'espace X par lui-même et par $D = \{(x, y) \in X^2 | \ x = y\}$ la diagonale de l'espace X^2.

Soit

(1) $$P(x) = \theta,$$

où P est une application définie sur X et à valeurs dans Y et θ est l'élément zéro de l'espace Y.

De plus, nous considérons une application $F: X^2 \to Y$ qui jouit de la propriété suivante:

(2) $$F|_D = P,$$

c'est-à-dire $F|_D$ est la restriction de F sur D.

Nous désignons par F'_x et F'_y les dérivées partielles au sens de Fréchet de F, par rapport à x respectivement à y.

Soit x_i un élément quelconque de l'espace X. Nous supposons que l'application $F'_x(x_i, y_i) \in \mathfrak{L}(X, Y)$ possède une application inverse unique $\Gamma_x^{(i)} = [F'_x(x_i, y_i)]^{-1}$, où $y_i \in X$.

Nous considérons maintenant les éléments $x_{i+1} \in X$ donnés par les égalités suivantes

(3) $$x_{i+1} = x_i - \Gamma_x^{(i)} P(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Nous avons obtenir par conséquent une méthode d'itération pour la résolution de l'equation (1).

Relativement à la convergence de la méthode (3) nous avons le théorème suivant:

THEOREME. *Si l'élément initial* $x_0 \in X$, *et le nombre réel et positif* δ *sont choisis de manière telle que, pour chaque* $x \in S$ *où* $S = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leqq \delta\}$, *les conditions suivantes sont remplies:*

(i) *l'application* F *admet des dérivées partielles au sens de Fréchet du premier ordre pour chaque* $(x,y) \in \mathrm{Int}\ (S) \times \mathrm{Int}\ (S)$;

(ii) *l'application* F *admet la dérivée partielle du second ordre* (au sens de Fréchet) *par rapport à* x, *pour chaque* $(x,y) \in \mathrm{Int}\ (S) \times \mathrm{Int}\ (S)$ *et*

$$\sup \{\| F''_{x^2}(x,y) \| \mid (x, y) \in \mathrm{Int}\ (S) \times \mathrm{Int}\ (S)\} \leqq M < +\infty$$

où M *est un nombre réel et nonnégatif;*

(iii) *pour chaque* $x \in \mathrm{Int}\ (S)$, *l'application linéaire* $F'_x(x,x)$ *admet une application inverse bornée, c'est-à-dire*

$$\| [F'_x(x,x)]^{-1} \| \leqq \beta < +\infty, \text{ pour chaque } x \in \mathrm{Int}\ (S);$$

(iv) *l'application* $F'_y(x,y)$ *est bornée, c'est-à-dire*

$$\| F'_y(x, y) \| \leqq \alpha < +\infty, \text{ pour chaque } (x, y) \in \mathrm{Int}\ (S) \times \mathrm{Int}\ (S);$$

(v) $q = \beta\left(\alpha + \frac{M\eta_1}{2}\right) < 1$ *où* $\eta_1 = \| x_1 - x_0 \|$ *et* $\eta_1/(1 - q) \leqq \delta$;

alors:

(j) *la suite* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *donnée par* (2) *est convergente;*

(jj) si $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *alors* $P(\bar{x}) = \theta$;

(jjj) $\|\bar{x} - x_n\| \leqq \frac{\eta_1 q^n}{1-q}$.

Démonstration. Montrons que les éléments de la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ appartiennent à l'ensemble Int (S). L'élément $x_0 \in \mathrm{Int}\ (S)$. Pour x_1 nous avons:

$$\| x_1 - x_0 \| = \eta_1 < \eta_1/(1 - q) \leqq \delta,$$

donc $x_1 \in \mathrm{Int}\ (S)$.

Supposons maintenant que $x_i \in \mathrm{Int}\ (S)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ nous pouvons alors montrer que $x_{k+1} \in \mathrm{Int}\ (S)$.

De (3) nous déduisons les egalités suivantes:

(4) $$F(x_i, x_i) + F'_x(x_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) = \theta, \quad \text{pour } i = 0,\ 1, \ldots$$

Alors nous avons les inégalités suivantes:

(5) $$\| F(x_i, x_{i-1}) \| = \| F(x_i, x_{i-1}) - \{F(x_{i-1}, x_{i-1}) + F'_x(x_{i-1}, x_{i-1}) \times (x_i - x_{i-1})\} \| \leqq (M/2) \cdot \| x_i - x_{i-1} \|^2, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

De (3) et de (iii), on déduit:

(6) $$\| x_{i+1} - x_i \| \leqq \beta \cdot \| F(x_i, x_i) \|.$$

En utilisant (iv) on a:

(7) $$\| F(x_i, x_i) \| \leqq \| F(x_i, x_i) - F(x_i, x_{i-1}) \| + \| F(x_i, x_{i-1}) \| \leqq \alpha \| x_i - x_{i-1} \| + \| F(x_i, x_{i-1}) \|.$$

Si nous écrivons $\rho_i = \| F(x_i, x_{i-1}) \|$, $i = 1, 2, \ldots, k$;

$$\eta_i = \| x_i - x_{i-1} \|, \quad i = 1, 2, \ldots, k + 1; \quad \delta_i = \| F(x_i, x_i) \|,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$, alors on déduit de (5), (6) et (7)

(8) $$\rho_i \leqq (M/2)\, \eta_i^2; \quad \mu_i \leqq \beta\, \delta_{i-1}; \quad \delta_i \leqq \alpha\, \eta_i + \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

En tenant compte de (8) on a:

(9) $$\eta_i \leqq \beta(\alpha\, \eta_{i-1} + \rho_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

En utilisant la formule ci-dessus et (8) on a:

(10) $$\eta_i \leqq \beta\left(\alpha\, \eta_{i-1} + \frac{M}{2}\, \eta_{i-1}^2\right) = \beta\, \eta_{i-1}\left(\alpha + \frac{M\eta_{i-1}}{2}\right),$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

Montrons maintenant que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ ont lieu les inégalités suivantes:

(11) $$\eta_{i+1} \leqq \eta_i.$$

On déduit de (10)

$$\eta_2 \leqq \beta\left(\alpha + \frac{M\eta_1}{2}\right)\eta_1 = q \cdot \eta_1 < \eta_1.$$

Supposons maintenant que les inégalités suivantes ont lieu:

$$\eta_1 \geqq \eta_2 \geqq \ldots \geqq \eta_{i-2} \geqq \eta_{i-1}.$$

Pour η_i on a:

(12) $$\eta_i \leqq \beta \cdot \eta_{i-1}\left(\alpha + \frac{M\eta_{i-1}}{2}\right) = q \cdot \eta_{i-1} < \eta_{i-1},$$

donc $\eta_i < \eta_{i-1}$. On déduit de (12)

$$\eta_i = q \cdot \eta_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, k, \text{ c'est-à-dire}$$
$$\eta_i = q^{i-1}\eta_1, \quad i = 2,\ 3, \ldots, k.$$

On conclut de (5) et (6)

$$\eta_{k+1} \le \beta \,\| F(x_k, x_k) \| \le \beta(\alpha \cdot \eta_k + \rho_k) \le \beta \cdot \eta_k \left(\alpha + \frac{M \cdot \eta_k}{2} \right) = q \cdot \eta_k,$$

donc

$$\eta_{k+1} \le q \cdot \eta_k = q^k \cdot \eta_1 \tag{13}$$

En tenant compte des inégalités ci-dessus, on a

$$\| x_{k+1} - x_0 \| \le \eta_{k+1} + \eta_k + \ldots + \eta_1 \le \eta_1 (1 + q + \ldots + q^k) < \frac{\eta_1}{1 - q} \le \delta$$

c'est-à-dire, $x_{k+1} \in \mathrm{Int}\ (S)$.

Soient p et n, deux nombres naturels. On a :

$$\| x_{n+p} - x_n \| \le \frac{q^n}{1 - q} \cdot \eta_1,$$

pour chaque $p = 1, 2, \ldots,$ et $n = 0, 1, \ldots$.

En effet les inégalités ci-dessus donnent

$$\| x_{n+p} - x_n \| \le \sum_{i=1}^{n+p-1} \| x_{i+1} - x_i \| = \sum_{i=n}^{n+p-1} \eta_{i+1} \le \eta_1 \cdot \sum_{i=n}^{n+p-1} q^i = \frac{\eta_1 \, q^n}{1 - q}. \tag{14}$$

Par conséquent, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite fondamentale.

Soit $\bar{x} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Montrons maintenant que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

Il résulte de (8) que $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = 0$, c'est-à-dire $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, donc $P(\bar{x}) = 0$.

En passant à la limite dans l'inégalité (14) pour $p \to \infty$, on a :

$$\| \bar{x} - x_n \| \le \frac{\eta_1 \cdot q^n}{1 - q}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Exemple numérique. Calculer par la méthode donnée la racine réelle de l'équation

$$x^3 - x^2 + 2 = 0. \tag{1'}$$

Nous posons par exemple $F(x, y) = x^2 y - xy + 2$. En ce cas, $F'_x = 2\,xy - y$, $F'_y = x^2 - x$ et $F''_{x^2} = 2y$. En posant $x_0 = -0{,}99$ et $\delta = 0{,}12$ nous avons $M = 2{,}2$, $\alpha = 2{,}04$, $\beta = 100/242$, $\eta_1 = 0{,}016$, $q = 0{,}86$ et $\eta_1/(1 - q) \le \delta$.

De (3) on déduit

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^3 - x_n^2 + 2}{2x_n - x_n}, \quad x_0 = -0{,}99; \ n = 0, 1, \ldots. \tag{2'}$$

En tenant compte du théorème énoncé, il est facile de démontrer que les hypothèses de ce théorème sont vérifiées et la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente. De (2′) nous obtenons pour la racine de l'équation (1′), $x_{14} = -0{,}99996687$.

Reçu le 20. IV. 1977

Institutul Matematic
Universitatea Babeş-Bolyai
Str. Kogălniceanu 1
3400 *Cluj-Napoca*