MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, N° 1, 1978, pp. 101–106

SUR LA CONVEXITÉ SIMULTANÉE PAR RAPPORT AUX PLUSIEURS ENSEMBLES INTERPOLATOIRES

par
ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

1. Dans les travaux [1], [2], [5], [7], nous avons introduit et étudié les fonctions convexes (nonconcaves, polynomiales, nonconvexes respectivement concaves) par rapport à un ensemble F supposé interpolatoire d'un certain ordre, sur un ensemble de points précisé. Nous avons appellé ces fonctions aussi des fonctions comparables par rapport aux éléments de l'ensemble F. L'ensemble F n'est pas supposé linéaire. La manque de la linéarité impose des méthodes d'investigation qui sont différentes de celles qui s'utilisent dans le cas où F est, par exemple, l'ensemble des polynomes d'un degré donné. Ce cas particulier est très important. Il a conduit à la notion de fonction convexe d'ordre supérieur, dont la théorie a été fondée et developpée par Tiberiu Popoviciu (voir les travaux [8], [9], et aussi d'autres, bien connus).

Comme nous l'avons encore remarqué, la théorie des fonctions douées d'une certaine propriété de convexité ou bien comparables par rapport aux éléments d'un ensemble interpolatoire, a des applications très importantes concernant l'analyse numérique, la théorie de la meilleure approximation, la théorie qualitative des équations différentielles. Il suffit de rappeler les méthodes d'integration numérique de Tschaplyghyne, l'étude du reste dans les procédés d'approximation. Les inégalités de Tschaplyghyne sont des cas particulier des inégalités qui caracterisent diverses propriétés de convexité. La théorie concernant la simplicité, au sens du Tiberiu Popoviciu [9], du reste dans les procédés linéaires d'approximation est appui sur la notion de convexité. Notamment, si $A: C[a, b] \to \mathbf{R}$ est une fonctionnelle linéaire, qui intervient comme terme reste dans une formule d'integration numérique, avec le degré d'exactitude égal à n, la possibilité d'exprimer la valeur $A(f)$ sous la forme $K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$,

K étant un nombre indépendant de la fonction f, est conditionné par le comportement de A sur l'ensemble des fonctions convexes d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$. En effet, si $A(f) \neq 0$ pour f convexe d'ordre n, dans les hypothèses faites plus haut sur la fonctionnelle A, il existe un système de $n+2$ points distincts $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$, dans l'intervalle $[a, b]$, tel que l'on a $A(f) = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ (le théorème de Tiberiu Popoviciu). La forme $K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ de la valeur $A(f)$ est un cas particulier de la forme $A(L(F; u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}; f))$ que nous avons donné en supposant que la fonctionnelle A — pas nécéssairement linéaire — est exacte par rapport a un ensemble interpolatoire d'ordre n, sur $[a, b]$, G, où $G \subset F$ et F est interpolatoire d'ordre $n+1$, sur $[a, b]$ (voir [3], [4]).

2. Soit, maintenant, donné un système de l ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$, $l \geq 2$, supposés interpolatoires d'ordre n, sur le même intervalle $[a, b]$. Le nombre naturel n, $n \geq 1$, est fixé. Considérons, aussi, une fonction $f: X \to \mathbf{R}$, ou $\mathbf{R}$ est l'ensemble des nombre réels et $X \subseteq [a, b]$ un ensemble qui contient au moins $n+1$ points distincts. Soit $Y \subseteq X$. On suppose que l'ensemble Y, lui même, contient au moins $n+1$ points distincts.

DÉFINITION. *La fonction f s'appelle simultanément convexe (simultanément nonconcave, simultanément polynomiale, simultanément nonconvexe respectivement simultanément concave) par rapport au système d'ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$, sur Y, si elle est convexe (nonconcave, polynomiale, nonconvexe respectivement concave) par rapport à chacun des ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$, sur Y.*

Nous avons supposé qu'on connet la définition de la convexité (nonconcavité, polynomialité, nonconvexité respectivement concavité) par rapport à un ensemble interpolatoire F, sur un ensemble de points Y (voir [1], [3], [7]). Dans nos travaux, nous avons utilisé aussi la terminologie F-convexe, F-concave etc. On peut, donc, dire simultanément $(F_1, F_2, \ldots, F_l)$ — convexe, au lieu de simultanément convexe par rapport au sistème $F_1, F_2, \ldots, F_l$ d'ensembles. La même simplification est valable pour les autres propriétés precisées dans la définition.

Nous nous arrêtons à deux exemples très simples. Soit F_1 l'ensemble des polynomes P où $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, α et β étant des nombres réeles quelconque et $x \in [0,1]$. Soit F_2 l'ensemble des polynomes de premier degré, sur l'intervalle $[0,1]$. Une fonction $f: [0,1] \to \mathbf{R}$, où $f(x) = 2x^2 + \gamma x + \delta$ est toujours simultanément (F_1, F_2)-convexe. Si F_1 est, par exemple, l'ensemble des polynomes P où $P(x) = x + \alpha$, α prennant toutes les valeurs réeles et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et F_2 est l'ensemble des polynomes P où $P(x) = -x + \beta$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, β étant un nombre réele quelconque, alors on peut considérer la fonction $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ où $g(x) = -\sin x$ qui est F_1-concave mais n'est pas F_2-concave. Quand H est un ensemble interpolatoire de premier ordre sur un intervalle $[a, b]$, la H-convexité, la H-concavité (ou bien la H-polynomialité, la H-nonconvexité respectivement la H-nonconcavité) sont les analogues des diverses propriétés de monotonie sur $[a, b]$.

Dans le premier exemple F_1 et F_2 sont interpolatoires d'ordre 2 sur $[0,1]$ et dans le deuxième, F_1 et F_2 sont interpolatoires de premier ordre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Compte tennant des exemples donnés plus haut, nous pouvons affirmer que l'ensemble des fonctions simultanément convexe par rapport a plusieurs ensembles interpolatoires n'est pas vide. En même temps, on peut construire des exemples, comme plus haut, de deux ensembles interpolatoires d'un même ordre, F_1 et F_2, par rapport aux quels il existe une fonction qui est F_1-concave mais qui n'est pas F_2-concave. Le problème de préciser les conditions qui assurent la G-convexité d'une fonction H-convexe, quand G et H sont interpolatoires d'un même ordre, se pose donc d'un façon naturel. En général, on peut se poser la question de trouver les conditions qui assurent l'existence d'une fonction simultanément convexe ou simultanément concave par rapport à un système *donné* d'ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$, qui sont interpolatoires d'un ordre précisé n et sur un intervalle donné $[a, b]$. Un autre problème qui se pose est de trouver les conditions qui assurent la H-convexité (H-concavité) de chaque fonction qui est G-convexe (G-concave), H et G étant des ensembles interpolatoires d'ordre n, donné. Naturellement, au lieu d'un seul ensemble H on peut s'imaginer un système d'ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_k$.

Pour pouvoir énoncer un théorème concernant les problèmes posés, nous rappellons une définition que nous avons donnée dans [5]. Cette définition est le point de départ de la théorie comparative des ensembles interpolatoires, l'énoncé en étant le suivant, pour H et G ensembles interpolatoires d'ordre n, sur l'intervalle $[a, b]$: *l'ensemble H est n-valent par rapport à l'ensemble G si chaque élément de H est une fonction n-valente par rapport a l'ensemble G, sur l'intervalle $[a, b]$.*

On démontre que si H est n-valent par rapport à G, alors G est n-velent par rapport à H.

Dans le travail [5], nous avons démontré qu'il est possible d'introduire la relation, „H est un ensemble sous G" ou bien „G est un ensemble sur H" si H est n-valent par rapport a G. *On dit que H est un ensemble sous G si chaque élément de H est une fonction G-concave sur $[a, b]$. On dit que G est un ensemble sur H si chaque élément de G est une fonction H-convexe sur $[a, b]$.*

Si H est un ensemble sous G on utilise la notation $H \prec G$ qui signifie, en même temps, que G est un ensemble sur H. C'est justifié par le fait que si H est un ensemble sous G alors G est un ensemble sur H.

Dans [5], nous avons démontré que si H est n-valent par rapport à G, alors on a ou bien $H \prec G$ ou bien $G \prec H$.

THÉORÈME 1. *Si les ensembles H et G, interpolatoires d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$, satisfont la condition $H \prec G$, alors chaque fonction G-con-*

vexe sur l'intervalle $[a, b]$ *est en même temps H-convexe sur l'intervalle* $[a, b]$, *c'est à dire simultanément* (H, G)*-convexe sur l'intervalle* $[a, b]$.

Pour la démonstration il suffit de remarquer que si f est une fonction G-convexe sur $[a, b]$, alors elle est n-valente par rapport à G, sur $[a, b]$. Si on suppose maintenant que l'on a $H \prec G$, considérons les points

(1) $$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$$

de l'intervalle $[a, b]$. Soit

(2) $$L(G; x_1, x_2, \ldots, x_n; f) = g$$

la fonction de l'ensemble G qui prend les valeurs $f(x_i)$ sur les points correspondants x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. On utilise la notation analogue:

(3) $$L(H; x_1, x_2, \ldots, x_n; f) = h$$

si on change l'ensemble G avec H. Si la fonction f est G-convexe sur $[a, b]$, alors quelque soient les points (1) de l'intervalle $[a, b]$, on a

(4) $$f(x_{n+1}) - L(G; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) > 0.$$

Mais nous avons supposé $H \prec G$. On a donc, toujours,

(5) $$h(x_{n+1}) - L(G; x_1, x_2, \ldots, x_n; h)(x_{n+1}) < 0$$

Les relations (4) et (5) ont comme conséquence l'inégalité

(6) $$f(x_{n+1}) - L(H; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) > 0,$$

quelques soient les points (1) de l'intervalle $[a, b]$. C'est à dire f est une fonction H-convexe sur l'intervalle $[a, b]$.

THÉORÈME 2. *Si les ensembles H et G, interpolatoires d'ordre n sur l'intervalle* $[a, b]$, *satisfont la condition* $H \prec G$, *alors chaque fonction H-concave sur l'intervalle* $[a, b]$ *est en même temps G-concave sur* $[a, b]$, *c'est à dire simultanément* (H, G)*-concave sur l'intervalle* $[a, b]$.

Considérons maintenant le système des ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$, chacun d'eux étant interpolatoire d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$, sur lequel l'ensemble G est aussi interpolatoire d'ordre n. On peut énoncer le

THÉORÈME 3. *Si les ensembles* F_i *satisfont les conditions* $F_i \prec G$, *pour* $i = 1, 2, \ldots, l$, *alors chaque fonction G-convexe sur* $[a, b]$ *est simultanément* $(F_1, F_2, \ldots, F_l, G)$*-convexe sur* $[a, b]$.

On a aussi le

THÉORÈME 4. *Si les ensembles* F_i *satisfont les conditions* $G \prec F_i$, *pour* $i = 1, 2, \ldots, l$, *alors chaque fonction G-concave sur* $[a, b]$ *est simultanément* $(F_1, F_2, \ldots, F_l, G)$*-concave sur* $[a, b]$.

Dans les travaux [5], [7], nous avons donné des conditions qui assurent, pour un ensemble interpolatoire donné F, l'existence d'un ensemble H satisfaisant la condition $H \prec F$, respectivement l'existence d'un ensemble G satisfaisant la condition $F \prec G$.

Dans le deuxième exemple que nous avons donné, les ensembles F_1 et F_2 satisfont la condition $F_2 \prec F_1$. La fonction g qu'on a considerée n'est pas univalente par rapport à l'ensemble F_2.

3. Pour mieux préciser une voie qui va nous conduire à la construction d'exemples qui présentent un interêt, considérons les ensembles $V_n \subset V_{n+1}$, $n \geq 1$, où V_n est interpolatoire d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$ et V_{n+1} est interpolatoires d'ordre $n + 1$ sur $[a, b]$. Les éléments de l'ensemble V_{n+1}, qui n'appartiennent pas à V_n sont des fonctions n-valentes par rapport à l'ensemble V_n. Ces éléments sont donc des fonctions V_n-convexes, les unes, les autres étant des fonctions V_n-concaves, sur $[a, b]$. L'ensemble V_{n+1} est la réunion de trois ensembles, $V_{n+1} = V_n \cup V_{n+1}^+ \cup V_{n+1}^-$. Comme nous l'avons fait déjà, dans d'autres travaux, nous avons désigné par V_{n+1}^+ l'ensemble des fonctions appartennant à V_{n+1} qui sont V_n-convexes sur $[a, b]$ et avec V_{n+1}^- l'ensemble des fonctions qui appartiennent à V_{n+1} et qui sont V_n-concaves sur $[a, b]$. En utilisant la notion d'épi interpolatoire, nous avons démontré que les ensembles V_{n+1}^+, et V_{n+1}^- ne sont pas vides. Il est claire que les ensembles V_n, V_{n+1}^+, et V_{n+1}^-, deux à deux n'ont pas des éléments comuns.

Soit $F \subset V_{n+1}^+$ un ensemble interpolatoire d'ordre n sur $[a, b]$. On a $V_n \prec F$.

THÉORÈME 5. *Dans l'ensemble* V_{n+1} *il existe une fonction qui est simultanément* (V_n, F)*-convexe sur* $[a, b]$. *Les éléments de l'ensemble* V_{n+1}^- *sont des fonctions simultanément* (V_n, F) *— concaves sur* $[a, b]$.

En utilisant la notion d'épi interpolatoire [3], la démonstration de l'existance, dans V_{n+1}, d'une fonction simultanément (V_n, F)-convexe en résulte. La deuxième partie de la conclusion est imédiate.

Si les ensembles interpolatoires qui ont intervenu ont comme éléments les solutions de certaines équations differentielles, alors les notions de convexité simultanée que nous avons introduites sont liées avec les inégalités différentielles correspondantes.

En ce qui concerne la simplicité du reste dans certaines formules d'approximation, il sera intéressant de préciser la famille d'ensembles interpolatoires par rapport aux quels un reste donné est simple. Il faut encore préciser s'il existe, pour un reste donné, un ensemble interpolatoire par rapport à quel il soit simple. Pour la notion de simplicité il faut voir [7].

La condition contenue dans l'énoncé du théorème 2 est suffisante. Il faut trouver des conditions aussi nécessaires pour que *chaque* fonction F-convexe soit simultanément (H, F)-convexe.

La définition que nous avons donnée regarde, avec d'autre propriétés, la propriété de simultanément polynomialité par rapport à un système d'ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$. Elle a un rôle special. En effet, la fonction f étant définie sur $[a, b]$ et $F_1, F_2, \ldots, F_l$, $l \geq 2$, étant des ensembles interpolatoires d'un même ordre n, sur $[a, b]$, on peut faire la remarque suivante. Si f est simultanémet $(F_1, F_2, \ldots, F_l)$-nonconcave (ou bien nonconvexe), sur $[a, b]$ et s'il existent des points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dans $[a, b]$ sur les-quels f soit simultanément $(F_1, F_2, \ldots, F_l)$-polynomiale, alors f est simultanement $(F_1, F_2, \ldots, F_l)$-polynomiale sur *l'intervalle* $[x_1, x_{n+1}]$. Mais, dans ce cas, les restrictions à l'intervalle $[x_1, x_{n+1}]$ des fonctions $L(F_i; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, sont égales. C'est une situation qui a des conséquences intéressantes, regardant les ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_l$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Moldovan (Popoviciu), Elena, *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexit t*, Studii și cerc. St. seria Mat. (Cluj), **VI**, 3–4, 65–73 (1955).

[2] — ,*Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime interpolatoare*, Studii și Cerc. Inst. de calcul (Cluj), **IX**, 1–4, 161–124 (1958).

[3] — ,*Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica (Cluj), **1** (24), 49–80 (1959).

[4] — ,*Sur l'interpolation généralisée*, idem, **2** (25), 143–147) (1960).

[5] — ,*Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires*, idem, **6** (23), 145–155 (1964).

[6] Popovivciu, Elena, *Sur la notion de convexité par rapport à un procédé d'interpolation*, I.S.N.M. **10**, Abstract spaces and approximation, 321–347 (1969).

[7] — ,*Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, 1972.

[8] Popoviciu, Tiberiu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

[9] — ,*Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica (Cluj), **1** (24), 95–142 (1959).

Reçu le 5. X. 1977.

Str. Dorobanților 40
3400 *Cluj-Napoca*