MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THEORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, N° 2, 1978, pp. 171–188

PROBLÈMES DE CONVERGENCE REGARDANT LES SÉRIES EN ESPACES TOPOLOGIQUES

par
ANDREI NEY
(Cluj-Napoca, Roumanie)

§1. Séries dans les groupes topologiques

1.1. Introduction

Préliminaires. On considère, [1], [2], [6], un groupe G, dont l'opération interne sera notée par „o" et l'élément neutre par θ. Soit τ une topologie Haussdorff sur G, compatible avec sa structure de groupe, ça veut dire que la composition $(x, y) \mapsto x \circ y$, $x, y \in G$ et l'inversion $x \mapsto x^{-1}$, $x \in G$, soient des opérations continues au sens de τ. On notera le groupe topologique par $(G, \circ, \tau)$, qui pourrait être commutatif ou non, suivant le cas. De cette définition on déduit les suivantes propriétés: 1°. Si U_0 est un viosinage de l'origine (de l'élément θ), alors $U_0^{-1} = \{x^{-1} | x \in U_\theta\}$ est aussi un voisinage de l'origine, 2°. Chaque voisinage de l'origine contient un voisinage symmétrique de l'origine, c'est-à-dire, quelqu'il soit V_θ, existe $W_\theta (W_\theta \subset V_\theta)$ tel que $W_\theta^{-1} = W_0$, 3°. Chaque voisinage de l'origine, U_0, contient un autre, V_0, tel que $x, y \in V_0$ implique $x \circ y \in U_0$, ou avec la notation de la „somme directe" : $V_\theta (\circ) V_\theta \subset U_0$.

L e m m e 1.1.1. *La limite d'une séquence* (x_n) *dans un groupe topologique* $(G, \circ, \tau)$, *notée par* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in G$ *et interprétée d'habitude par*

$$\forall U_x,\ \exists n_{U_x} \in \mathbf{N} \text{ tel que } n \geqslant n_{U_x} \Rightarrow x_n \in U_x, \tag{1.1.1.}$$

peut être définie par l'une quelconque des affirmations équivalentes, suivantes :

$$\forall U_0,\ \exists n'_{U_0} \in \mathbf{N} \text{ tel que } n \geqslant n'_{U_\theta} \Rightarrow x_n^{-1} \circ x \in U_\theta\,; \tag{1.1.2}$$

(1.1.3) $\forall U_\theta,\ \exists n''_{U_\theta} \in \mathbf{N}$ *tel que* $n \geq n''_{U_\theta} \Rightarrow x^{-1} \circ x_n \in U_\theta$;

(1.1.4) $\forall U_\theta,\ \exists n'''_{U_\theta} \in \mathbf{N}$ *tel que* $n \geq n'''_{U_\theta} \Rightarrow x \circ x_n^{-1} \in U_\theta$;

(1.1.5) $\forall U_\theta,\ \exists n^{\mathrm{IV}}_{U_\theta} \in \mathbf{N}$ *tel que* $n \geq n^{\mathrm{IV}}_{U_\theta} \Rightarrow x_n \circ x^{-1} \in U_\theta$.

Si $(G, \circ)$ *est commutatif, les deux dernières affirmations se confondent respectivement avec les deux premières.*

Démonstration. D'après les *préliminaires*, de $x_n \to x\ (n \to \infty)$ résulte $x_n^{-1} \to x^{-1} (n \to \infty)$ donc les séquences $(x_n^{-1} \circ x)$, $(x^{-1} \circ x_n)$, $(x \circ x_n^{-1})$ et $(x_n \circ x^{-1})$ tendent tous à l'élément θ du groupe, d'où résultent respectivement (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.5). Inversement, si on part de (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.5), et on introduit la notation (θ_n) pour une suite[1] tendant à θ, alors on a respectivement

$$\left.\begin{aligned} x_n^{-1} \circ x = \theta_n &\Rightarrow x_n = x \circ \theta_n^{-1} \\ x^{-1} \circ x_n = \theta_n &\Rightarrow x_n = x \circ \theta_n \\ x \circ x_n^{-1} = \theta_n &\Rightarrow x_n = \theta_n^{-1} \circ x \\ x_n \circ x^{-1} = \theta_n &\Rightarrow x_n = \theta_n \circ x \end{aligned}\right\} \text{d'où } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

D é f i n i t i o n 1.1.1 *La séquence* (x_n) *d'éléments de* $(G, \circ, \tau)$ *est une suite Cauchy à gauche, si et seulement si pour un voisinage* quelconque de l'origine, U_θ, existe un nombre natural n_{U_θ} tel que si $n \geq n_{U_\theta}$ et pour n'importe quel $p \in \mathbf{N}$ on ait $x_n^{-1} \circ x_{n+p} \in U_\theta$. D'une façon analogue on conçoit une suite Cauchy à droite, basée sur la différence abstraite $x_{n+p} \circ x_n^{-1}$.

P r o p o s i t i o n 1.1.1. *Une séquence quelconque,* (x_n), *convergente dans* $(G, \circ, \tau)$ à *une limite* $x \in G$, *est une suite Cauchy à gauche et aussi à droite.*

Démonstration. On part des deux égalités

$$x_n^{-1} \circ x_{n+p} = (x_n^{-1} \circ x) \circ (x^{-1} \circ x_{n+p}) \text{ et } x_{n+p} \circ x_n^{-1} = (x_{n+p} \circ x^{-1}) \circ (x \circ x_n^{-1}),$$

en se basant sur le lemmme 1.1.1. et vu les *préliminaires*, on constate que le deuxième membre de chacune des deux égalités précédentes se trouvent dans un voisinage arbitraire de l'origine θ, si $n \geq n_{U_\theta}$ d'où la proposition.

C o r o l l a i r e 1.1.1. *Si dans un groupe topologique* $(G, \circ, \tau)$ *une suite Cauchy à gauche (à droite) a une limite, alors elle est simultanément une suite Cauchy à droite (à gauche).*

Démonstration. L'existence de la limite et la proposition 1.1.1 nous permet de tirer immédiatement la conclusion.

Le corollaire 1.1.1 justifie la

D é f i n i t i o n 1.1.2. *Si dans un groupe topologique* $(G, \circ, \tau)$, *du fait que* (x_n) *est une suite Cauchy* (indifféremment si c'est à gauche ou à droite)

[1] On utilisera la notion de suite, comme synonime de celle de séquence.

résulte l'existence de sa limite, alors le groupe sera par définition un groupe séquentiellement complet.

À cause du corollaire 1.1.1 *on ne distingue pas deux notions de complétitude : l'une à gauche et l'autre à droite.*

1.2. Séries convergentes

En partant d'une séquence d'éléments du groupe topologique $(G, \circ, \tau)$, on peut définir une notion de *série à droite* et une notion de *série à gauche*, qui se confondent seulement si le groupe est abélien.

D é f i n i t i o n 1.2.1. *L'algorithme*

$$\text{(1.2.1)} \qquad \begin{cases} s_1 = x_1 \\ s_{n+1} = s_n \circ x_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

à l'aide duquel on obtient la suite (s_n) *des „opérés partiels"* („sommes partielles") *attachée à la suite* (x_n) *d'éléments de* $(G, \circ, \tau)$ *sera une série à droite, tandis que l'algorithme*

$$\text{(1.2.2)} \qquad \begin{cases} s'_1 = x_1 \\ s'_{n+1} = x_{n+1} \circ s'_n \qquad (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

sera une série à gauche. Si (s_n) *respectivement* (s'_n) *a une limite* s *respectivement* s' *dans* $(G, \circ, \tau)$, *alors la série correspondante sera regardée comme convergente; dans le cas contraire alle sera divergente.*

Pour une série à droite convergente, on a une somme $s \in G$ et une *suite des restes* (r_n) définie par $s_n \circ r_n = s\ (n \in \mathbf{N})$, ou bien explicitement par $r_n = s_n^{-1} \circ s$; par analogie pour une série à gauche convergente on aura $s' = r'_n \circ s'_n\ (n \in \mathbf{N})$, ou bien $r'_n = s' \circ s_n'^{-1}$. Avec la notation à droite on aura $s_n = \bigcirc_{k=1}^{n} x_k = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ et si la série est convergente sa some sera notée par $s = \bigcirc_{1}^{\infty} x_n$ et le reste par $r_n = \bigcirc_{k=n+1}^{\infty} x_k$; la série elle même sera symbolisée par $\bigcirc x_n$, indépendemment du fait qu'elle converge ou diverge. Notations analogues pour une série à gauche. On déduit :

$$s'_n = \left[\bigcirc_{n-1}^{1} (s_k^{-1} \circ s_{k+1})\right] \circ s_1.$$

Dans [3] l'auteur a démontré le

THÉORÈME 1.2.1. *Pour la convergence de la série à droite* $\bigcirc x_n$, *dans le groupe topologique* $(G, \circ, \tau)$ — *est nécessaire et suffisante l'existence d'une suite* (ρ_n) *d'éléments de G telle qu'elle satisfasse à*

$$(1.2.3)\qquad \begin{cases} \text{a)}\ \rho_n \to \theta & (n \to \infty) \\ \text{b)}\ \rho_n \circ \rho_{n+1}^{-1} = x_{n+1} & (n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

Dans le cas ou la série converge, résulte que (ρ_n) *est justement la suite des restes „à droite".*

Ce théorème peut être transcrit pour le cas d'une série à gauche, en changeant (1.2.3) par

$$(1.2.4)\qquad \begin{cases} \text{a)}\ \rho_n' \to \theta & (n \to \infty) \\ \text{b)}\ (\rho_{n+1}')^{-1} \circ \rho_n' = x_{n+1} & (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

et au cas de convergence on trouve que (ρ_n') est la suite des restes „à gauche".

Dès lors, nous remarquons que de la convergence de l'algorithme (1.2.1) on ne peut pas tirer une conclusion généralement valable pour la convergence de l'algorithme (1.2.3) — ou vice-versa. Mais *si* (1.2.1) *et* (1.2.2) *convergent simultanément, on peut démontrer, qu'entre leurs restes il y a la relation :*

$$(1.2.5)\qquad r_n' = r_1' \circ \bigcirc_{k=1}^{n-1} (r_{k+1} \circ r_k^{-1}) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

En effet, de (1.2.3 — b) et (1.2.4 — b) résulte $(r_{n+1}')^{-1} \circ r_n' = r_n \circ r_{n+1}^{-1}$, ou après une inversion : $(r_n')^{-1} \circ r_{n+1}' = r_{n+1} \circ r_n^{-1}$. En changeant n par k et en effectuant aux deux membres l'opération $\bigcirc_{k=1}^{n-1}$, on obtient $(r_1')^{-1} \circ r_n' = \bigcirc_{k=1}^{n-1} (r_{k+1} \circ r_k^{-1})$. Si on opère à gauche par r_1', on arrive à (1.2.5).

On démonte dans ce qui suit *un théorème du type Cauchy* pour la convergence d'une série à droite. (On peut le transcrire pour une série à gauche).

THÉORÈME 1.2.2. *Dans un groupe topologique la convergence de la série à droite* $\bigcirc x_n$ *implique pour un voisinage arbitraire* U_θ, *de l'origine, l'existence d'un nombre entier positif* n_{U_θ}, *tel qu'on ait*

$$(1.2.6)\qquad x_{n+1} \circ x_{n+2} \circ \ldots \circ x_{n+p} \in U_\theta \text{ și } n \geq n_{U_\theta},\ \forall p \in \mathbf{N}$$

si le groupe $(G, \circ, \tau)$ *est séquentiellement complet, alors de* (1.2.6) *résulte la convergence de la série.*

Démonstration. Regardant la nécessité : si $\bigcirc x_n$ converge, alors dans le groupe topologique existe une suite d'éléments, (r_n), satisfaisant les propriétés (1.2.3) du reste, donc $x_{n+1} \circ x_{n+2} \circ \ldots \circ x_{n+p} = r_n \circ r_{n+p}^{-1}$. Vu les points 3° et 2° des préliminaires, existe dans le voisinage arbitraire U_θ un voisinage V_θ $(V_\theta \subset U_\theta)$ tel que $V_\theta \circ V_\theta \subset U_\theta$ et il existera dans V_θ un voisinage symmétrique W_θ de l'origine. De (1.2.3 — a) résulte $r_n \in W_\theta$ si $n \geq n_{W_\theta}$ et de plus $r_{n+p} \in W_\theta$ respectivement $r_{n+p}^{-1} \in W_\theta$, quelque soit $p \in \mathbf{N}$. Puisque $W_\theta \subset V_\theta \subset U_\theta$, résulte $r_n \circ r_{n+p}^{-1} \in U_\theta$ și $n \geq n_{W_\theta}$, $p \in \mathbf{N}$. Regardant la suffisance de la condition (1.2.6) pour la convergence de la série dans un groupe topologique complet, — on en obtient à l'aide de l'égalité trivielle $x_{n+1} \circ x_{n+2} \circ \ldots \circ x_{n+p} = s_n^{-1} \circ s_{n+p}$, la relation

$$((1.2.7)\qquad s_n^{-1} \circ s_{n+p} \in U_\theta \qquad (n \geq n_{U_\theta},\ \forall p \in \mathbf{N}),$$

ce qui signifie que (s_n) est une suite Cauchy dans ce groupe séquentiellement complet, donc existe $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in G$.

1.3. Sur la convergence commutative

D é f i n i t i o n 1.3.1. *Soient deux séquences* (s_n) *et* (σ_n) *d'éléments d'un groupe topologique* $(G, \circ, \tau)$. *On dira que* (s_n) *est indéfiniment approchée à gauche respectivement à droite par* (σ_n) *si pour in voisinage arbitraire de l'origine,* U_θ, *existe un nombre natural* n_{U_θ} *tel que* $n, m \geq n_{U_\theta}$ *implique* $\sigma_m^{-1} \circ s_n \in U_\theta$ *respectivement* $s_n \circ \sigma_m^{-1} \in U_\theta$.

Remarque 1.3.1. 1°. Quelque soit U_θ, il contient un voisinage symmétrique de l'origine, W_θ ; de $\sigma_m^{-1} \circ s_n \in W_\theta$ $(n, m \geq n_{W_\theta})$ résulte $s_n^{-1} \circ \sigma_m \in W_\theta$ et vice-versa, tandis que de $s_n \circ \sigma_m^{-1} \in W_\theta$ $(n, m \geq n_{W_\theta})$ résulte $\sigma_m \circ s_n^{-1} \in W_\theta$ et vice-versa. On peut donc parler aussi de deux suites qui s'approchent indéfiniment à gauche, respectivement à droite. 2°. Si le groupe topologique est commutatif, les deux notions se confondent et on dira dans ce cas, que les deux suites sont indéfiniment approchées. 3°. Une suite Cauchy (s_n) est une suite indéfiniment approchée par elle-même à gauche respectivement à droite, parce qu'à un voisinage U_θ de l'origine on peut attacher un nombre natural n_{U_θ}, tel que $n, m \geq n_{U_\theta}$ implique $s_m^{-1} \circ s_n \in U_\theta$ respectivement $s_n \circ s_m^{-1} \in U_\theta$.

THÉORÈME 1.3.1. *Soit* (s_n) *une suite qui converge dans le groupe topologique* $(G, \circ, \tau)$ *à* $s \in G$. 1°. *Si une autre suite,* (σ_n), *converge dans* $(G, \circ, \tau)$ *à la même limite s, alors* (σ_n) *approche indéfiniment* (s_n) *à droite et à gauche.* 2°. *Si* (σ_n) *approche indéfiniment* (s_n) *à droite ou à gauche, alors* (σ_n) *converge à s.*

Démonstration. Regardant 1°: puisque (d'après les préliminaires) dans U_θ arbitraire existe $V_\theta \subset U_\theta$ tel que $V_\theta \circ V_\theta \subset U_\theta$, on écrira („à droite") $s_n \circ \sigma_m^{-1} = (s_n \circ s^{-1}) \circ (s \circ \sigma_m^{-1})$ et vu le lemme 1.1.1 on aura $s_n \circ s^{-1} \in V_\theta$ $(n \geq n'_{V_\theta})$ et $s \circ \sigma_m^{-1} \in V_\theta$ $(m \geq n''_{V_\theta})$. Donc si on note $n_{U_\theta} = \max\{n'_{V_\theta}, n''_{V_\theta}\}$, on aura $s_n \circ \sigma_m^{-1} \in U_\theta\,(n, m \geq n_{U_\theta})$. Puis, en partant de l'égalité $\sigma_m^{-1} \circ s_n = (\sigma_m^{-1} \circ s) \circ (s^{-1} \circ s_n)$, par un raisonnement tout-à-fait similaire on arrive à $\sigma_m^{-1} \circ s_n \in U_\theta$ $(n, m \geq n_{U_\theta})$. Regardant 2°, on part d'abord de l'égalité qui met en jeu l'approchement à droite: $\sigma_n \circ s^{-1} = (\sigma_n \circ s_m^{-1}) \circ (s_m \circ s^{-1})$, et puisque pour U_θ arbitraire existe V_θ tel qu'on a vu auparavant, il existe aussi n_{U_θ} tel que $n, m \geq n_{U_\theta}$ implique $\sigma_n \circ s_m^{-1} \in V_\theta$ et aussi $s_m \circ s^{-1} \in V_\theta$, d'où $\sigma_n \circ s^{-1} \in U_\theta$ si $n \geq n_{V_\theta}$. D'une façon analogue, si on partait de l'égalité $s^{-1} \circ \sigma_n = (s^{-1} \circ s_m) \circ (s_m^{-1} \circ \sigma_n)$ qui met en jeu l'approchement à gauche, on arrivera d'une manière analogue à ce qu'on a vu plus haut, à $s^{-1} \circ \sigma_n \in U_\theta$ si $n \geq n_{U_\theta}$. Dans les deux cas envisagés, le résultat signifie d'après le lemme 1.1.1 que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$.

Corollaire 1.3.1. *Soit une suite (s_n) qui converge dans le groupe topologique $(G, \circ, \tau)$ à $s \in G$. 1°. Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (σ_n) converge aussi à, $s \in G$ est que (σ_n) approche indéfiniment (s_n) à droite. 2°. On obtient une proposition équivalente à 1° si on change l'expression „à droite" avec l'expression „à gauche".*

En effet: on n'a qu'à suivre le cours de la démonstration du théorème 1.3.1.

Corollaire 1.3.2. *Si dans le groupe topologique $(G, \circ, \tau)$ la suite (σ_n) a la même limite que la suite (s_n), alors les deux suites s'approchent indéfiniment* (même si $(G, \circ)$ n'est pas abélien!). *Dans l'espace métrique R^p, du fait que deux suites (s_n) et (σ_n) s'approchent indéfiniment, résulte leur convergence à la même limite.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.3.1 (σ_n) et (s_n) s'approchent indéfiniment à droite et à gauche; la condition $n, m \geq n_{W_\theta}$ se réalise simultanément pour les deux alternatives si W_θ est un voisinage symétrique de l'origine. Dans un autre ordre des idées, en partant de $\rho(s_n, \sigma_m) < \varepsilon$ $(n, m \geq n_\varepsilon)$ et en fixant un indice m_0 $(m_0 \geq n_\varepsilon)$, il résulte que la suite $(s_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ a tous ses termes dans une sphère de centre σ_{m_0} et de rayon ε, donc (s_n) est bornée; même conclusion pour (σ_m). Supposons que (s_n) n'a pas de limite, alors, elle a dans R^p au moins deux points d'accumulation distincts: s' et s'', d'où il résulte qu'une suite partielle (s_{i_n}) aura la limite s'. D'autre part, $\rho(s_{i_n}, \sigma_m) < \varepsilon$ $(n, m \geq n_\varepsilon)$, donc, d'après le corollaire 1.3.1 résulte $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = s'$; par une voie analogue $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = s''$, ce qui est impossible puisque $s'' \neq s'$. Donc existe $\lim_{m\to\infty} s_n = s \in R^p$. On y applique de nouveau le corollaire 1.3.1 et il en résulte que $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = s$.

Le théorème 1.3.1 et ses deux corollaires ont un rôle important concernant l'établissement des conditions dans lesquelles se conservent la convergence et la somme d'une série, si on effectue des modifications dans l'ordre de ses termes, ou dans le sens d'opération. Tout d'abord, une conséquence immédiate du théorème 1.3.1:

Corollaire 1.3.3. *On considère une suite (x_n) d'éléments d'un groupe topologique $(G, \circ, \tau)$ à partir de laquelle on forme une série à droite, convergente $\bigcirc_1^\infty x_n = s \in G$. Pour que la série à gauche engendrée à partir de la même suite soit convergente ayant la même somme* s, *il faut que la suite (σ_n) de ses sommes partielles approche indéfiniment à droite* et *à gauche la suite (s_n) des sommes partielles de la série à droite $\bigcirc x_n$. Si (σ_n) approche indéfiniment (s_n) à droite* ou *à gauche, alors la série à gauche sera convergente, ayant sa somme égale à celle de la série à droite.*

Au sens du corollaire 1.3.3: *pour que la série à gauche converge à la même somme que la série à droite qui est convergente, il faut et il suffit que les suites de leurs sommes partielles s'approchent indéfiniment.* On formule la condition, comme il suit:

$$(x_m \circ \ldots \circ x_2 \circ x_1)^{-1} \circ (x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n) =$$
$$= (x_1^{-1} \circ x_2^{-1} \circ \ldots \circ x_m^{-1} \circ x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n) \in U_\theta \qquad (n,\ m \geq n_{U_\theta}).$$

On notera, dans ce qui suit, par $(\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$ la famille de toutes les bijections de l'ensemble des nombres naturels sur lui-même, et un élément de cette famille, c'est-à-dire une permutation de $\mathbf{N}$ sera notée en général par $p \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, tandis que la succession des termes de la permutation p sera $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

Définition 1.3.2. *Soit une suite (x_n) d'éléments du groupe topologique $(G, \circ, \tau)$; la série $\bigcirc x_n$ sera nommée série „commutativement convergente à la somme $s \in G$ „ou bien" „commutativement convergente avec conservation de la somme", si quelque soit la permutation $p \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, on aura $\bigcirc_{n=1}^{\infty} x_{p_n} = s$.*

THÉORÈME 1.3.2. *Pour que la série $\bigcirc x_n$ convergente dans le groupe topologique $(G, \circ, \tau)$ soit commutativement convergente à la somme $s \in G$, est nécessaire pour deux permutations quelconques $p, q \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, que la suite $(\sigma_{q_n})_{n \in N}$ des sommes partielles de $\bigcirc x_{q_n}$ approche indéfiniment à droite* et *à gauche la suite $(s_{p_n})_{n \in N}$ des sommes partielles de $\bigcirc x_{p_n}$. Si quelqu'ils* *soient p, $q \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, (σ_{q_n}) approche indéfiniment (s_{p_n}) à droite* ou *à gauche alors la série convergente $\bigcirc x_n$ est commutativement convergente à la même somme $s \in G$.*

Démonstration. Regardant la première affirmation de l'énoncé du théorème, on part des égalités

$$s_{p_n} \circ \sigma_{q_n}^{-1} = (s_{p_n} \circ s^{-1}) \circ (s \circ \sigma_{q_n}) \text{ et } \sigma_{q_n}^{-1} \circ s_{p_n} = (\sigma_{q_n}^{-1} \circ s) \circ (s^{-1} \circ s_{p_n})$$

et on suit la voie de la démonstration du théorème 1.3.1. Regardant la deuxième affiramtion, on utilisera les notations $s = \bigcirc_{1}^{\infty} x_n$ et $s_n = \bigcirc_{k=1}^{n} x_k$, puis on écrira pour une permutation quelconque $p \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$ et pour une autre $q_n = n$ $(n \in \mathbf{N})$:

$$s_{p_n} \circ s^{-1} = (s_{p_n} \circ s_n^{-1}) \circ (s_n \circ s^{-1}) \text{ ou bien } s^{-1} \circ s_{p_n} = (s^{-1} \circ s_n) \circ (s_n^{-1} \circ s_{p_n})$$

et on suit, après, la voie déja vue.

C o r o l l a i r e 1.3.4. *Pour que la série $\bigcirc x_n$ convergente dans le groupe topologique $(G, \circ, \tau)$ soit commutativement convergente avec conservation de la somme, il est nécessaire et suffisante que pour deux permutations quelconques p, $q \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, les suites des sommes partielles correspondantes s'approchent indéfiniment.*

En effet: on tient compte du corollaire 1.3.2 regardant la nécessité, — quant à la suffisance on choisit $q_n = n$ $(n \in \mathbf{N})$ et (p_n) arbitraire, puis on suit la partie correspondante de la démonstration du théorème 1.3.2.

Si on ne sait rien sur la nature de la série $\bigcirc x_n$ dans un groupe topologique, on peut formuler avec une condition restrictive au plus, le

THÉORÈME 1.3.3. *Pour qu'une série $\bigcirc x_n$ soit commutativement convergente avec conservation de la somme dans le groupe topologique séquentiellement complet $(G, \circ, \tau)$, il est nécessaire pour deux permutations arbitraires — même identiques — p, $q \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, que la suite (σ_{q_n}) approche indéfiniment à droite* et *à gauche la suite (s_{p_n}). Si quelque soit p, $q \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, (σ_{q_n}) approche indéfiniment (s_{p_n}) à droite ou à gauche, alors $\bigcirc x_n$ est commutativement convergente avec conservation de la somme.*

Démonstration. Regardant la première affirmation de l'énoncé, on utilise mot-à-mot la partie correspondante de la démonstration du théorème 1.3.2. Quant à la deuxième affirmation, on on prend $p = q = (1, 2, \ldots, n, \ldots)$ et en nous basant sur le remarque 1.3.1, la relation $s_n^{-1} \circ s_m \in U_\theta(n, m \geqslant n_{U_0})$ caractérise une suite Cauchy à gauche. Puisqu'on est dans un groupe séquentiellement complet, (s_n) aura une limite $s \in G$ et sera simultanément (vu corollaire 1.1.1) aussi une suite Cauchy à droite. Dès lors, on peut suivre la partie correspondante de la démonstration du théorème 1.3.2.

C o r o l l a i r e 1.3.5. *Pour qu'une série $\bigcirc x_n$ soit commutativement convergente avec conservation de la somme dans le groupe topologique séquentiellement complet $(G, \circ, \tau)$, il faut et il suffit que pour deux permutations arbitraires — même identiques — p, $q \in (\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{N})$, les suites des sommes partielles (s_{p_n}), (σ_{q_n}) s'approchent indéfiniment.*

En effet: on n'a qu'à suivre les corollaires 1.3.1 et 1.3.2 ainsi que la démonstration du théorème 1.3.3.

On remarque: dans l'énoncé du théorème 1.3.3. et du corollaire 1.3.5 on peut laisser à côté la locution „même identiques", car dans la démonstration de l'alternative de la suffisance on peut prendre pour p respectivement q, les permutations: $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$, $(2, 1, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ des indices.

§2. Séries dans les clans topologiques

2.1. Introduction

Préliminaires. Dans [4] l'auteur a introduit une notion de limite dans $\mathfrak{P}(E)$ — l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble — et a considéré une notion de série basée sur l'opération de la réunion. Dans [5] l'auteur a étendu la famille d'ensembles $\mathfrak{P}(E)$ en passant à un clan respectivement à un tribe quelconque et a approfondie la notion de la limite introduite, ainsi que ses conséquences topologiques. Dans le présent travail on va traiter des séries de différents types dans un clan (dans un tribe). Pour préciser la terminologie et les notations: un clan $\mathcal{C}$ est une famille de parties d'un ensemble de références $\mathbf{X}$, pour laquelle a lieu

$$A \setminus B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad A \bigcup B \in \mathcal{C} \quad \text{si} \quad A, \ B \in \mathcal{C};$$

une famille $\mathcal{T}$ de parties de X satisfaisant à

$$A \setminus B \in \mathcal{T} \text{ et } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{T} \text{ si } A, B, A_i \in \mathcal{T} \qquad (i \in \mathbf{N})$$

est un tribe.

On reproduit d'après [5] les définitions et les propriétés absolument nécessaire pour pouvoir suivre le contenu de ce paragraphe.

D é f i n i t i o n 2.1.1. *Soit $\mathbf{X}$ un ensemble infini quelconque et $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de parties de $\mathbf{X}$. La suite (B_n) sera consédérée descendante à $\varnothing$ ($\varnothing$ étant l'ensemble vide) si et seulement si $B_n \subseteq B_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ et quelque soit $x \in B_n$ (n nombre naturel arbitraire) existe un nombre naturel n_x (évidemment $n_x > n$), tel que pour chaque $m \in \mathbf{N}$ et $m > n_x$ ait lieu $n \notin B_m$* (ceci signifie qu'un élément quelconque appartenant à l'un des termes de la suite (B_n) „soit éliminé après un nombre fini de pas"). *On symbolise cette propriété par $B_n \downarrow \varnothing$.*

Définition 2.1.2. *Soit $\mathcal{C}$ un clan et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$. L'élément $X \in \mathcal{C}$ est la limite analytique de la suite (X_n), si et seulement s'il existe dans $\mathcal{C}$ une suite $B_n \downarrow \emptyset$, tel qu'on ait pour n au moins à partir de $n_0(n \geq n_0 \in \mathbf{N})$*

$$X_n \vartriangle X \subseteq B_n,\ B_n \downarrow \emptyset$$

où on a noté $X_n \vartriangle X$ la différence symmétrique $X_n \setminus X \cup X \setminus X_n$. *Dans ce cas on dira que la suite (X_n) est (a)-convergente à X, ou bien que X est la „limite analytique" de (X_n), et on utilisera les notations :*

$$X = (a)\text{-lim } X_n \quad \textit{où} \quad X_n \xrightarrow{(a)} X.$$

On démontre que *la limite analytique* est *unique*. On démontre aussi, que *les opérations binaires : la réunion $\bigcup$, la soustraction $\setminus$, la différence symétrique $\vartriangle$ et l'intersection $\bigcap$, qui appliquent $\mathcal{C}^2$ dans $\mathcal{C}$, sont séquentiellement continues au sens de la limite analytique.*

Définition 2.1.3. *Soit un clan $\mathcal{C}$. Une suite (X_n) d'éléments du clan sera nommée suite Cauchy si et seulement s'il existe dans ce clan une suite descendante à l'ensemble vide, $B_n \downarrow \emptyset$, tel que l'on ait pour chaque $p \in \mathbf{N}$:*

$$X_{n+p} \vartriangle X_n \subseteq B_n \qquad (n \in \mathbf{N}), \quad n \geq n_0 \geq 1.$$

On démontre, que *chaque suite (a)-convergente dans un clan est une suite Cauchy.*

Définition 2.1.4. *Si chaque suite Cauchy d'éléments d'un clan a une limite analytique dans ce clan, alors le clan est séquentiellement complet, ou avec une autre dénomonation : un „clan Cauchy".*

On démontre, que *chaque tribe*, en particulier $\mathfrak{L}(X)$ aussi, *est un clan Cauchy, mais pas chaque clan Cauchy est un tribe.*

On démontre aussi, que *dans chaque clan, la proposition* « (X_n) *est un suite Cauchy* » *équivaut à* « $(a)\text{-lim}\,(X_n \vartriangle X_{n+1}) = \emptyset$ ».

Un clan dans lequel on a introduit la limite analytique devient un espace de convergence du type $\mathfrak{L}$ (terminologie de Fréchet), tandis qu'un tribe devient un espace de convergence du type $\mathfrak{L}^*$ (terminologie d'Alexandroff-Uryson).

2.2. $\triangle$-série dans un clan

Un clan $\mathcal{C}$ devient un groupe avec l'opération de la diférence symmétrique, $\vartriangle$, et si on y introduit la limite analytique (définition 2.1.2) on obtient l'espace de convergence ($\mathcal{C}$, $\vartriangle$, (a)-lim).

Définition 2.2.1. *Soit (X_n) une séquence d'éléments de l'espace ($\mathcal{C}$, $\vartriangle$, (a)-lim). L'algorithme*

$$(2.2.1) \qquad \begin{cases} S_1 = X_1 \\ S_{n+1} = S_n \vartriangle X_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

à l'aide duquel on forme la suite (S_n) des $\vartriangle$-opérés („sommes") partiels attachée à (X_n), définit la $\vartriangle$-série dans ($\mathcal{C}$, $\vartriangle$, (a)-lim) ; s'il existe (a)-lim $S_n = S \in \mathcal{C}$, alors la $\vartriangle$-série converge dans $\mathcal{C}$ (dans le cas contraire elle diverge) et sa $\vartriangle$-somme sera notée par $S = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\triangle}} X_n$.

Au cas de convergence d'une $\vartriangle$-série on introduit une notion de *reste* par $R_n = S \vartriangle S_n$ ou bien par $S = S_n \vartriangle R_n$. La suite (R_n) des restes jouit des propriétés

$$(2.2.2) \qquad \begin{cases} 1^\circ \quad (a)\text{-lim } R_n = \emptyset \\ 2^\circ \quad R_n \vartriangle R_{n+1} = X_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}) ; \end{cases}$$

1° résulte de $R_n = S \vartriangle S_n$, en faisant $n \to \infty$ et tenant compte de la continuité de l'opération $\vartriangle$ (§ 2.1.), tandis que 2° résulte de (2.2.1) et de l'égalité $S_n = S \vartriangle R_n$.

THÉORÈME 2.2.1. *Pour la convergence de la $\vartriangle$-série $\triangle X_n$ dans l'espace ($\mathcal{C}$, $\vartriangle$, (a)-lim) est nécessaire et suffisante l'existence d'une suite $(\overline{R}_n)$ d'éléments de $\mathcal{C}$ satisfaisant les conditions*

$$(2.2.3) \qquad \begin{cases} 1^\circ \quad (a)\text{-lim } \overline{R}_n = \emptyset \\ 2^\circ \quad \overline{R}_n \vartriangle \overline{R}_{n+1} = X_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}) ; \end{cases}$$

$(\overline{R}_n)$ se prouve-t-être la suite des restes de la $\vartriangle$-série convergente.

Démonstration. La nécessité résulte du fait que si $\triangle X_n$ converge, alors on peut mettre $\overline{R}_n = R_n$ $(n \in \mathbf{N})$, qui satisfait (2.2.2), donc aussi (2.2.3). Regardant la suffisance, on applique l'opération $\overset{n+p-1}{\underset{n}{\triangle}}$ à l'égalité (2.2.3 ; —2°) :

$$\overset{n+p-1}{\underset{k=n}{\triangle}} X_{k+1} = \overset{n+p-1}{\underset{k=n}{\triangle}} (\overline{R}_k \vartriangle \overline{R}_{k+1})$$

et on obtient

$$X_{n+1} \vartriangle X_{n+2} \vartriangle \ldots \vartriangle X_{n+p} = \overline{R}_n \vartriangle \overline{R}_{n+p} ;$$

en y opérant à gauche avec $X_1 \vartriangle X_2 \vartriangle \ldots \vartriangle X_n = S_n$, on obtient

$$S_{n+p} = X_1 \vartriangle X_2 \vartriangle \ldots \vartriangle X_{n+p} = S_n \vartriangle \overline{R}_n \vartriangle \overline{R}_{n+p}$$

et en faisant $p \to \infty$ on arrive à $S = (a)\text{-}\lim_{p\to\infty} S_{n+p} = S_n \vartriangle \overline{R}_n \in \mathcal{C}$, à cause de (2.2.3 ; 1°), donc la $\vartriangle$-série converge et $\overline{R}_n$ est son reste du rang n.

THÉORÈME 2.2.2. *Pour que la série $\triangle X_n$ converge dans un clan Cauchy, il faut et il suffit qu'on ait* (a)-lim $X_n = \emptyset$ (donc : que le terme général tende à l'ensemble vide).

Démonstration. Si $\triangle X_n$ converge, alors de (2.2.2) résulte (a)-lim $X_n = \emptyset$. D'autre part, on a $S_n \vartriangle S_{n+1} = X_{n+1}$ et si $X_{n+1} \xrightarrow{(a)} \emptyset$ $(n \to \infty)$, alors (a)-lim $(S_n \vartriangle S_{n+1}) = \emptyset$. Or, cette dernière relation à la limite équivaut au fait que (S_n) est une suite Cauchy dans un clan Cauchy (§2.1.), donc existe (a)-lim S_n, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 2.2.3. (du type Cauchy) *Dans un clan Cauchy, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une Δ-série est la réalisation de l'inclusion*

$$X_{n+1} \Delta X_{n+2} \Delta \ldots \Delta X_{n+p} \subseteq B_n, \quad \forall p \in \mathbf{N},$$

(B_n) *étant une suite d'éléments du clan, descendante à $\varnothing$.*

Démonstration. Le membre gauche de l'inclusion est égal à $S_{n+p} \Delta S_n$ où $S_n = \overset{n}{\underset{k=1}{\Delta}} X_k$. La relation $S_{n+p} \Delta S_n \subseteq B_n$, $B_n \downarrow \varnothing$, est justement la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la limite analytique de (S_n) dans un clan séquentiellement complet (§2.1).

Remarque 2.2.1. Dans [5] l'auteur a donné une représentation du terme du rang n d'une suite Cauchy quelconque dans un clan $\mathfrak{C}$, notamment :

$$X_n = X_1 \Delta \beta_1 \Delta \beta_2 \Delta \ldots \Delta \beta_n = X_1 \Delta \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} \beta_i \quad (n \in \mathbf{N}),$$

où $\beta_n = X_{n+1} \Delta X_n \subseteq B_n$, $B_n \downarrow \varnothing$. Si la suite (X_n) converge à $X \in \mathfrak{C}$, (c'est toujours le cas si $\mathfrak{C}$ est un clan Cauchy), alors l'élément X peut être développé dans une Δ-série, notamment : $X = X_1 \Delta \beta_1 \Delta \beta_2 \Delta \ldots \Delta \beta_n \Delta \ldots$. Puisque chaque suite (X_n) ayant une limite dans un clan est en effet une suite Cauchy, il résulte que *la limite X d'une suite (X_n) convergente dans un clan peut être développée dans une Δ-série :*

$$X = X_1 \Delta (X_2 \Delta X_1) \Delta (X_3 \Delta X_2) \Delta \ldots \Delta (X_{n+1} \Delta X_n) \Delta \ldots$$

§2.3. $\bigcup$-séries dans un clan

On considère un clan dans lequel on introduit la limite analitique (définition 2.1.2) ; relativement à l'opération de réunion, $\bigcup$, le clan est un semi-groupe commutative, mais on utilisera aussi l'opération de soustraction $\diagdown$. Ainsi on arrive à l'espace de convergence $(\mathfrak{C}, \bigcup, \diagdown, (a)\text{-lim})$.

Définition 2.3.1. *Soit (X_n) une séquence d'éléments de* $(\mathfrak{C}, \bigcup, \diagdown, (a)\text{-lim})$. *L'algorithme*

$$\text{(2.3.1)} \qquad \begin{cases} S_1 = X_1 \\ S_{n+1} = S_n \bigcup X_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

à l'aide duquel on engendre la suite (S_n) des $\bigcup$-opérés ($\bigcup$-sommes) partielles attachée à (X_n), sera une $\bigcup$-série. Si existe (a)-lim $S_n = S \in \mathfrak{C}$, alors cette $\bigcup$-série converge dans $(\mathfrak{C}, \bigcup, \diagdown, (a)\text{-lim})$ (au cas contraire elle diverge) *et sa $\bigcup$-somme sera notée par* $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Au cas de convergence d'une $\bigcup$-série on définit une notion de *reste*, par $R_n = S \diagdown S_n$ où $S_n \bigcap R_n = \varnothing$ $(n \in \mathbf{N})$, (pour lequel est valable, évidemment, la formule $R_n = S \Delta S_n$ aussi) d'où $S = S_n \bigcup R_n$ (respectivement $S = S_n \Delta R_n$). Puisque (S_n) est visiblement ascendante, la suite (R_n) est descendante à $\varnothing$ (voir [5]). D'autre part

$$R_n \diagdown R_{n+1} = (S \diagdown S_n) \diagdown (S \diagdown S_{n+1}) = S_{n+1} \diagdown S$$

c'est-à-dire

$$R_n \diagdown R_{n+1} = S_{n+1} \diagdown S_n = (X_{n+1} \bigcup S) \diagdown S_n = X_{n+1} \diagdown S_n.$$

Par conséquence, le reste de la série convergente $\bigcup X_n$ satisfait aux conditions

$$\text{(2.3.2)} \qquad \begin{cases} 1° \quad R_n \downarrow \varnothing \qquad (n \to \infty) \\ 2° \quad R_n \diagdown R_{n+1} = X_{n+1} \diagdown \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k \right), \qquad (n \in \mathbf{N}), \end{cases}$$

l'égalité 2° pouvant-être écrite sous la forme $R_n \Delta R_{n+1} = X_{n+1} \diagdown \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k \right)$ aussi.

THÉORÈME 2.3.1. *Pour la convergence de la série $\bigcup X_n$ dans le clan* $(\mathfrak{C}, \bigcup, \diagdown, (a)\text{-lim})$, *il faut et il suffit qu'il existe dans $\mathfrak{C}$ une suite (B_n) ayant les propriétés*

$$\text{(2.3.3)} \qquad \begin{cases} 1° \quad B_n \downarrow \varnothing \qquad (n \to \infty) \\ 2° \quad B_n \diagdown B_{n+1} = X_{n+1} \diagdown \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k \right), \qquad (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

et B_n se prouve-t-être le reste du rang n de la $\bigcup$-série convergente.

Démonstration. Si $\bigcup X_n$ converge, la suite (R_n) des restes satisfait effectivement (2.3.2) donc (2.3.3) aussi. Regardant la suffisance des conditions (2.3.3) pour la convergence de $\bigcup X_n$, on applique l'opération $\bigcup\limits_{n}^{n+p-1}$ à (2.3.3 ; 2°).

$$\bigcup_{k=n}^{n+p-1} (B_k \diagdown B_{k+1}) = \bigcup_{k=n}^{n+p-1} (X_{k+1} \diagdown S_k)$$

et en opérant dans le second membre une légère transformation :

$$X_{k+1} \diagdown S_k = (X_{k+1} \bigcup S_k) \diagdown S_k = S_{k+1} \diagdown S_k,$$

on arrive à

$$\bigcup_{k=n}^{n+p-1} (B_k \diagdown B_{k+1}) = \bigcup_{k=n}^{n+p-1} (S_{k+1} \diagdown S_k).$$

Tenant compte du fait que (B_n) est descendante et (S_n) ascendante, la dernière égalité nous conduit à $B_n \setminus B_{n+p} = S_{n+p} \setminus S_n$, qui est équivalente à $B_n \vartriangle B_{n+p} = S_{n+p} \vartriangle S_n$, et de cette dernière égalité on obtient $S_{n+p} = (S_n \vartriangle B_n) \vartriangle B_{n+p}$ (tenant compte de la commutativité et de l'associativité de l'opération $\vartriangle$). En faisant $p \to \infty$ (vu l'introduction de ce paragraphe) le membre droit de la dernière égalité tend à $S_n \vartriangle B_n$, donc existe $S = (a)\text{-}\lim\limits_{p\to\infty} S_{n+p} = S_n \vartriangle B_n \in \mathfrak{C}$. D'ici résulte $S \vartriangle S_n = B_n$; mais (S_n) étant ascendante, on a $S \supseteq S_n$, d'où $B_n \cap S_n = (S \vartriangle S_n) \cap S_n = (S \setminus S_n) \cap S_n = \emptyset$, donc la suite (B_n) satisfait les conditions (2.3.3) et la définition du reste.

Remarque 2.3.1. On mentionne le fait que dans un groupe topologique quelconque le terme du rang n tend à l'élément neutre du groupe si la série converge et de même si une Δ-série converge dans un clan alors le terme du rang n aura comme (a)-limite l'ensemble vide. Au contraire, *le terme du rang n d'une $\bigcup$-série convergente dans un clane ne doit pas nécessairement tendre à $\emptyset$.* Il est suffisant pour montrer ça de considérer la série $\bigcup X$ ayant tous ses termes égaux à $X \neq \emptyset$; évidemment $\bigcup\limits_1^\infty X = X$ et (a)-lim $X = X$ $(X \neq \emptyset)$. De (2.3.2; 2°) résulte à l'aide de (2.3.2; 1°)

$$X_{n+1} \setminus S_n = B_n \setminus B_{n+1} \subseteq B_n \downarrow \emptyset,$$

donc (a)-lim $(X_{n+1} \setminus S_n) = \emptyset$, ce qu'on peut formuler comme il suit: *l'exédent du terme du rang n sur la $\bigcup$-somme partielle du rang n aura comme* (a)-limite *l'ensemble vide pour chaque $\bigcup$-série convergente.* Ceci représente une condition de convergence nécessaire pour une $\bigcup$-série dans un clan.

Pour éviter des confusions, on rappelle que les éléments S, S_n, X_n $(n \in \mathbf{N})$ du clan $\mathfrak{C}$ sont des ensembles; les éléments dont ces ensembles sont formés à leur tour seront appellés *„éléments constituants"*.

THÉORÈME 2.3.2. *Si la série $\bigcup X_n$ converge dans le clan $(\mathfrak{C}, \bigcup, \setminus, (a)\text{-lim})$ à la $\bigcup$-somme $S \in \mathfrak{C}$, S étant notée conformémant à la définition 2.3.1 par $\bigcup\limits_1^\infty X_n$, alors S est l'ensemble formé par tous les éléments constituants de chaque terme X_n $(n \in \mathbf{N})$ de la $\bigcup$-série et seulement ces éléments constituants.*

Démonstration. On choisit arbitrairement $n \in \mathbf{N}$ et $x \in X_n$; on aura évidemment $x \in S_n$, et puisque $S_n \subseteq S$ résulte $x \in S$. D'autre part, quelqu'il soit $x^0 \in S$, il existera au moins un indice $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x^0 \in X_{n_0}$, parce que dans le cas contraire on aurait $x_0 \notin X_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, — ce qui équivaut à $x^0 \notin S_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Or, la convergence à S de la suite (S_n) signifie l'existence d'une suite (B_n) descendante dans $\mathfrak{C}$ à $\emptyset$, de telle façon qu'on ait $S_n \vartriangle S \subseteq B_n \downarrow \emptyset$. De $x^0 \in S$ et $x_0 \notin S_n$ $(\forall_n \in \mathbf{N})$ résulte $x_0 \in (S_n \vartriangle S) \subseteq B_n$, donc $x_0 \in B_n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ et par conséquence (B_n) ne pourra pas descendre à $\emptyset$. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque 2.3.2. *Une $\bigcup$-série convergente dans un clan est commutativement convergente avec conservation de sa $\bigcup$-somme.*

En effet, on a pour la suite de ses $\bigcup$-sommes partielles

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots \quad \text{et} \quad S_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k \uparrow S \ (n \to \infty).$$

Soit $(i_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une permutation arbitraire de $\mathbf{N}$, alors la nouvelle $\bigcup$-série aura pour ses $\bigcup$-sommes partielles

$$S'_m = \bigcup_{j=1}^{m} X_{i_j} \qquad (m \in \mathbf{N}),$$

(S'_m) étant ascendante.

Quelque grand que soit $m_1 \in \mathbf{N}$, existera toujours un nombre naturel $n_1 \geqslant m_1$ tel que tous les termes figurant dans S'_{m_1} soient contenus dans S_{n_1}, et vice-versa: si grand que soit $n_1 \in \mathbf{N}$ existera toujours un nombre naturel $m_2 \geqslant n_1$ tel que les termes qui composent S_{n_1} soient contenus dans S'_{m_2}. Sur cette constatation est basée l'existence de deux suites de nombres naturels indéfiniment croissantes, $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$ et $m_1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ tel que $S'_{m_1} \subseteq S_{n_1} \subseteq \dots \subseteq S_{n_{p-1}} \subseteq S'_{m_p} \subseteq S_{n_p} \subseteq \dots$. Puisque $S_n \uparrow S$ si $n \to \infty$ et (S'_m) est ascendante, le système $S_{n_{p-1}} \subseteq S'_{m_p} \subseteq S_{n_p}$ nous conduit à: (a)-lim $S'_m = S$.

Remarque 2.3.3. *On pose le problème de principe:* si on considère dans *un tribe* la série $\bigcup X_n$ conformément à la définition 2.3.1, *quelle est la relation entre la $\bigcup$-somme de la série au sens de la* (a)-convergence *de la suite de ses $\bigcup$-sommes partielles et l'élément $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ du tribe?* La $\bigcup$-somme de la série $\bigcup X_n$ est interprétée à l'aide d'un passage à la limite, donc *au sens „potentiel"*, tandis que l'élément $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ du tribe existe dans son *acception „actuelle"*. La réponse se trouve formulée dans le

THÉORÈME 2.3.3. *Dans un tribe $\mathfrak{T}$ quelconque, une série quelconque $\bigcup X_n$ est (a)-convergente et sa $\bigcup$-somme, c'est-à-dire $S = (a)\text{-lim} \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$ est égale à l'élément $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ du tribe.*

Démonstration. On montre que pour la série $\bigcup X_n$ le rôle du reste est joué par $B_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} X_k \in \mathfrak{T}$ $(n \in \mathbf{N})$. Pour plus de commodité on note par A_{k+1} l'excédent du terme X_{k+1} de la série sur sa $\bigcup$-somme partielle $S_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i$ $(k \in \mathbf{N})$. Ces excédents sont évidemment disjoints deux par deux, par suite a lieu la représentation $B_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k$ $(n \in \mathbf{N})$ et suivant la définition 2.1.1 résulte $B_n \downarrow \emptyset$. D'autre part

$$B_n \setminus B_{n+1} = \left(\bigcup_{n+1}^{\infty} A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{n+2}^{\infty} A_k\right) = \left(A_{n+1} \cup \bigcup_{n+2}^{\infty} A_k\right) \setminus \bigcup_{n+2}^{\infty} A_k = A_{n+1} \setminus \bigcup_{1}^{n} A_k.$$

La suite (B_n) satisfait, donc, aux conditions (2.3.2), par conséquence la série $\bigcup A_n$, et ainsi la série $\bigcup X_n$ aussi, est convergente, B_n étant le reste du rang n. Mais dans ces conditions

$$S = S_n \cup B_n = \left(\bigcup_{1}^{n} X_k\right) \cup \left(\bigcup_{n+1}^{\infty} X_k\right) = \bigcup_{1}^{\infty} X_k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On présente dans ce qui suit une application de la notion de $\bigcup$-série dans la théorie de la mesure, en donnant une démonstration spéciale d'une bien connue propriété.

THÉORÈME 2.3.4. *Soit μ une mesure réelle et positive définie sur le clan $\mathcal{C}$. Si (B_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$, descendante à $\emptyset$, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.

Démonstration. On a évidemment

$$B_1 = \left[\bigcup_{1}^{n} (B_k \setminus B_{k+1})\right] \cup B_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N});$$

$$B_{n+1} \cap (B_k \setminus B_{k+1}) = \emptyset \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n \in \mathbf{N}).$$

On note $T_k = B_k \setminus B_{k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$ et on considère la série $\bigcup T_k$; on montre à l'aide du théorème 2.3.1 que cette $\bigcup$-série converge et son reste du rang n, R_n, est justement B_{n+1}. En effet, la condition (2.3.3; 1⁰) est satisfaite par $R_n = B_{n+1}$, tandis que pour (2.3.3; 2⁰) on procède comme il suit:

$$R_n \setminus R_{n+1} = B_{n+1} \setminus B_{n+2} = T_{n+1} = T_{n+1} \setminus \bigcup_{1}^{n} T_k$$

(parce que $T_{n+1} \cap \left(\bigcup\limits_{1}^{n} T_k\right) = \emptyset$). D'ici résulte $B_1 = \bigcup\limits_{1}^{\infty} (B_k \setminus B_{k+1})$, étant donné que $\bigcup\limits_{1}^{n} (B_k \setminus B_{k+1}) = B_1 \setminus B_{n+1}$ et $(B_1 \setminus B_{n+1}) \uparrow B_1$ pour $n \to \infty$. Puis

$$\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} (B_k \setminus B_{k+1})\right) = \sum_{1}^{\infty} \mu(B_k \setminus B_{k+1}) = \sum_{1}^{\infty} [\mu(B_k) - \mu(B_{k+1})] = s \in R_+,$$

d'autre part, la somme partielle du rang n de la *série numérique* est

$$s_n = \sum_{1}^{n} [\mu(B_k) - \mu(B_{k+1})] = \mu(B_1) - \mu(B_{n+1}),$$

donc son reste du rang n est

$$r_n = s - s_n = \mu(B_1) - [\mu(B_1) - \mu(B_{n+1})] = \mu(B_{n+1}),$$

mais $r_n \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.

On mentionne que la démonstration est valabile aussi pour le cas où μ est une mesure prenant des valeurs dans un groupe topologique (la limite en cause — au sens de la topologie — sera l'élément neutre du groupe).

2.4. Séries alternées dans un clan

Kuratowski[2], dans son traité classique de topologie, traite les „*séries alternées d'ensembles fermés*'' en attirant l'attention sur *les ensembles développables en une série alternée d'ensembles fermés, décroissants*, notée par cet auteur

$$E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_\xi - F_{\xi+1} + \ldots \quad (F_\xi \supset F_{\xi+1}).$$

Nous donnerons un critère du type Leibniz pour les séries alternées d'ensembles — éléments d'un tribe.

THÉORÈME 2.4.1. *Pour la convergence d'une série alternée*

$$X_1 \setminus X_2 \cup X_3 \setminus X_4 \cup \ldots \cup X_{2k-1} \setminus X_{2k} \cup \ldots$$

(où les opérations $\setminus$ et $\bigcup$ s'appliquent successivement), *dont les éléments forment une suite descendante*, $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$, *dans un tribe* $(\mathcal{T}, \bigcup, \setminus (a)\text{-lim})$, *est nécessaire et suffisante qu'on ait $X_n \downarrow \emptyset$.*

Démonstration. Considérons la somme partielle de rang pair $S_{2n} = \bigcup\limits_{i=1}^{2n-1} (X_i \setminus X_{i+1})$ $(n \in \mathbf{N})$, celle-ci est ascendante dans le tribe $\mathcal{T}$, donc — en nous basant sur la complétitude monotone du tribe — existe $(a)\text{-lim } S_{2n} = S \in \mathcal{T}$. On a aussi $S_{2n+1} = S_{2n} \cup X_{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$: en faisant $n \to \infty$ existera $(a)\text{-lim } X_n = X \in \mathcal{T}$, parce que (X_n) est descendante dans $\mathcal{T}$. Puis, en utilisant la continuité de l'opération $\bigcup$ relativement à la *(a)-limite*, on obtient de la dernière égalité: $(a)\text{-lim } S_{2n-1} = S \cup X$. Pour la convergence de la série alternée il faut et il suffit d'avoir $(a)\text{-lim } S_{2n} = (a)\text{-lim } S_{2n+1}$, donc $S = S \cup X$. D'autre part, $S_{2n} \cap X_{2n+1} = \emptyset$ et pour $n \to \infty$ résultera $S \cap X = \emptyset$, d'où en envisageant les égalités $S = S \cup X$ et $S \cap X = \emptyset$, résulte $X = \emptyset$. Dans un autre ordre des idées: puisque $(a)\text{-lim } S_{2n} = S$, de l'égalité $S_{2n+1} = S_{2n} \cup X_{2n+1}$ résulte

$$(a)\text{-lim } S_{2n+1} = (a)\text{-lim } S_{2n} = S \quad \text{si} \quad X_n \downarrow \emptyset.$$

2.5. $\bigcap$-séries dans un clan

D é f i n i t i o n 2.5.1. *Soit* $(\mathcal{C}, \bigcup, \setminus, (a)\text{-lim})$ *un clan dans lequel on exprime l'opération d'intersection par* $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. *L'algorithme*

$$(5.2.1) \qquad \begin{cases} 1^\circ & S_1 = X_1 \\ 2^\circ & S_{n+1} = S_n \cap X_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

définit une $\bigcap$*-série.*

[2] *Topologie*, vol. I. Druk. Univ. Jagiellonskogo, Waraszawa-Wroclaw, 1948.

Si $\mathbf{X}$ est l'ensemble de référence dont une famille de parties forme le clan $\mathcal{C}$, alors à l'aide de la substitution utilisant le complémentaire d'un ensemble, $Y_n = \complement_X X_n$ $(n \in \mathbf{N})$, on transpose l'étude de la série $\bigcap X_n$ à l'étude d'une $\bigcup$-série, grace à la formule de De Morgan :

$$\bigcap_{k=1}^{n} X_k = \bigcap_{k=1}^{n} \complement_X Y_k = \complement_X \bigcup_{k=1}^{n} Y_k = \mathbf{X} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} Y_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki, N., *Topologie générale* (chap. 1—4). Hermann, Paris, 1971.
[2] Наймарк, М. А., *Нормированные кольца.* Гостехиздат, Москва, 1956.
[3] Ney, A., *Algorithmes infinis dans un groupe topologique.* Mathematica, Vol. **7** **(30)**, *1*, pp. 59—65 (1965).
[4] — *Contribution à la théorie de la convergence des suites et des séries d'ensembles dans* $\mathfrak{P}(E)$. I^e. Mathematica, vol **13**, **(36)**, 1, pp. 127—139 (1971).
[5] — *Notions de convergence dans un clan et topologies définies par elles.* Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, Tome **6**, N^0 1, pp. 57—80 (1977).
[6] Pontrjagin, L. S., *Topologische gruppen* I—II. Teubner Verlag, Leipzig, 1957
[7] Schwartz, L., *Analyse.* Partie 2, Hermann, Paris, 1970.

Reçu le 2.IV.1978

Universitatea „Babeş — Bolyai"
Facultatea de Matematică
Str. Kogălniceanu 1
3 400 *Cluj-Napoca*