MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 7, N° 2, 1978, pp. 189—192

# SUR LES FONCTIONNELLES SIMPLES PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE INTERPOLATOIRE

ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

Les ensembles interpolatoires interviennent dans l'étude de nombreux problèmes d'analyse numérique. Beaucoups de problèmes de calcul reviennent à la détermination de la valeur $A(f)$ d'une fonctionnelle $A$, pour l'élément $f$ de l'ensemble de définition de $A$. Le fait que la différence $f - A(f) = R(f)$ s'annule sur un ensemble interpolatoire $F$, peut nous donner des informations sur les possibilités de délimiter ce qu'on appelle le reste $R(f)$. Cette délimitation dépende toujours de l'espace dans lequel on considère la fonctionnelle $R$. Si on peut caractériser d'une manière convenable le comportement de $R$ par rapport à l'ensemble des fonctions qui sont $F$-convexe ou $F$-concave au sens que nous l'avons précisé dans [3], [6], [8], alors l'étude du reste $R$ peut devenir encore plus interessant [4].

Pour préciser les notions qui interviennent, supposons que l'ensemble $F$ est interpolatoire d'ordre fixé $n$ où $n \geqslant 1$, sur l'intervalle compact $[a, b] \subset \mathbf{R}$, au sens que nous l'avons considéré dans [1], [8]. Désignons par $C[a, b]$ l'espace linéaire des fonctions continues sur $[a, b]$, la norme de $f \in C[a, b]$ étant $||f|| = \max\limits_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Soit $B : C[a, b] \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle qui devra encore satisfaire à des conditions qu'on va préciser. Pour en donner des exemples, $B$ peut être le reste dans un procédé d'interpolation, dans un procédé d'integration numérique etc. La condition $B(f) = 0$ pour chaque $f \in F$ veut généraliser la propriété en vertu de laquelle $B$ a un degré d'exactité au moins égal à $m$, c'est à dire $B(P) = 0$ quel que soit $P \in \mathfrak{P}_m$, $\mathfrak{P}_m$ étant l'ensemble des polynomes de degré $m$.

Dans les travaux que nous avons cités, nous avons introduit une términologie regardant le comportement d'une fonctionnelle $B$ par rapport à un ensemble interpolatoire $F$. *Nous disons que la fonctionnelle $B$ est $F$ — exacte si elle s'annule pour chaque $f \in F$. Nous disons que $B$ est $F$ — sim-*

*ple si elle est F — exacte et quelle que soit la fonction F — convexe ou F — concave sur* $[a, b]$, *f, l'on a* $B(f) \neq 0$.

Si la fonctionnelle $B$ est linéaire et elle et $\mathfrak{P}_n$ — simple, alors elle a le degré d'exactité $n$ et quelle que soit la fonction $f \in C[a, b]$, il existe un système de $n+2$ points distincts $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$, de l'intervalle $[a, b]$, pour lesquels on a $A(f) = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ où $K$ est un nombre qui ne dépande pas de $f$ et $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ est la différence divisée de la fonction $f$, sur les points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$ (voir [11]).

Comme la $F$-exactité n'entraîne pas la $F$-simplicité il est utile de connaître la classe des ensembles interpolatoire $G$ par rapport aux quels $B$ est $G$-exacte et la classe des ensembles interpolatoires $H$ par rapport aux quels $B$ est $H$-simple.

Les ensembles $G$ et $H$ étant interpolatoires d'un même ordre $n$ et sur le même intervalle $[a, b]$, nous disons que $G$ est $n$-valent par rapport à $H$ si chaque $g \in G$ est $n$-valent par rapport à $H$ sur l'intervalle $[a, b]$ (voir [7]).

THÉORÈME 1. *Si l'ensemble G est n-valent par rapport à l'ensemble H et si B est une fonctionnelle G-simple, alors B n'est pas H-simple.*

Pour la démonstration il faut remarquer que si $G$ est $n$-valente par rapport à $H$ alors ou bien tous les éléments de $H$ sont $G$-convexe sur l'intervalle $[a, b]$ ou bien chaque élément de $H$ est $G$-concave sur $[a, b]$. En supposant donc que la fonctionnelle $B$ est $G$-simple elle ne peut s'annuler pour aucune $f \in H$ car si $f \in H$ alors $f$ est $G$-convexe ou $G$-concave sur $[a, b]$, ce qui entraîne $B(f) \neq 0$. Donc $B$ ne peut pas être $H$-simple, ne pouvant pas être $H$-exacte.

Le théorème 1 a une application interessante. Soit $U$ un ensemble interpolatoire d'ordre $n+1$ sur $[a, b]$.

THÉORÈME 2. *Si G et H sont des ensembles disjoints, interpolatoires d'ordre n sur* $[a, b]$ *et si* $G \subset U$, $H \subset U$, *alors la fonctionnelle B ne peut pas être en même temps G-simple et H-simple.*

Pour la démonstration il suffit de remarquer que si les hypothèses de l'énoncé du théorème 2 sont ramplites, alors $G$ doit être $n$-valent par rapport à $H$. En effet, si $g \in G$, $h \in H$ et $g-h$ s'annule sur $n+1$ points, comme on ne peut pas avoir $g = h$, nous sommes conduits à une contradiction avec le fait que $U$ est interpolatoire d'ordre $n+1$. En appliquant donc le théorème 1, on obtient la conclusion du théorème 2.

Considérons maintenant deux ensembles linéaires $V_1$, $V_2$, interpolatoires d'ordre $n$ sur $[a, b]$. Supposons $n \geqslant 2$. Soit

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

un système de Tchebytcheff sur $[a, b]$ ainsi choisi que $V_1$ soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit

(2) $$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$



un système de Tchebytcheff sur $[a, b]$ ainsi que $V_2$ soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i$, $\beta_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ est aussi un système de Tchebytcheff sur $[a, b]$, alors l'ensemble $U_1 \subset V_1$ des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \varphi_i$ est interpolatoir d'ordre $n-1$ sur $[a, b]$. Si $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ est un système de Tchebytcheff sur $[a, b]$, alors l'ensemble $U_2 \subset V_2$ des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \psi_i$ est interpolatoire d'ordre $n-1$, sur $[a, b]$. Les différences divisées généralisées correspondante peuvent être désigner par

(3) $$\left[\begin{matrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{matrix}; f\right]$$

et

(4) $$\left[\begin{matrix}\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{matrix}; f\right]$$

pour une fonction $f$ définie sur les points distincts $x_1, x_2, \ldots x_n$ de l'intervalle $[a, b]$.

On sait que la fonction $\varphi_n$ est $U_1$-convexe sur $[a, b]$ et la fonction $\psi_n$ est $U_2$-convexe sur $[a, b]$. (en dehors d'un changement de signe)

Si $B$ est linéaire et $U_1$-simple (ou bien $U_2$-simple), alors on peut appliquer les résultat contenus dans [7] : pour chaque $f \in C[a, b]$ il existe un système de $n$ points distincts $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de manière que

(5) $$B(f) = B(\varphi_n)\left[\begin{matrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ u_1, u_2, \ldots, u_n\end{matrix}; f\right]$$

(ou bien un système de n points distincts $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de manière que

(6) $$B(f) = B(\psi_n)\left[\begin{matrix}\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \\ w_1, w_2, \ldots, w_n\end{matrix}; f\right].$$

THÉORÈME 3. *Si la fonctionnelle linéaire B est* $U_1$*-simple et* $U_2$*-simple et si elle prend des valeurs positives pour chaque fonction* $U_1$*-convexe sur* $[a, b]$ *et pour chaque fonction* $U_2$*-convexe sur* $[a, b]$, *alors pour chaque fonction* $f \in C[a, b]$ *qui est* $U_1$*-convexe (ou bien* $U_2$*-convexe) il existe un système de n points distincts sur lesquels f est simultanément* $(U_1, U_2)$*-convexe.*

Pour la notion de simultanément — convexité il faut voir notre travail [9].

La démonstration du théorème 3 résulte en appliquant les formules (5) et (6) et compte tenant de l'hypothèse contenue dans l'énoncé.

Les formules (5) et (6) qui nous donnent des représentations de la valeur $B(f)$ quand $B$ a les propriétés de simplicité qu'on a supposées, permetent de faire une comparaison entre les diverses représentations possibles.

BIBLIOGRAPHIE


[1] Moldovan (Popoviciu), Elena, *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate*, Studii şi cerc. St. Seria Mat. (Cluj), **VI**, 3–4, 65–73 (1955).

[2] —, *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime interpolatoare*, Studii şi Cerc. Inst. de calcul (Cluj), **IX**, 1–4, 161–124 (1958).

[3] —, *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica (Cluj), **1** (24), 49–80, (1950).

[4] —, *Sur l'interpolation généralisée*, idem, **2** (2), 143–147 (1960).

[5] —, *Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires*, idem, **6** (29), 145–155 (1964).

[6] Popoviciu, Elena, *Sur la notion de convexité par rapport à un procédé d'interpolation*, I.S.N.M. **10**, Abstract spaces and approximation, 321–327 (1969).

[7] —, *Propriétés des ensembles interpolatoires comparables par rapport à leur n-valence*, *Mathematica* (Cluj), **8** (31), 133–136 (1966).

[8] —, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, 1972.

[9] —, *Sur la convexité simultanée par rapport aux plusieurs enxembles interpolatoires* (*sous* presse),

[10] Popoviciu, Tiberiu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

[11] —, *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica (Cluj), **1** (24), 95–142 (1959).


Reçu le 12.XI.1977

*Str. Dorobanților* 40
*3 400 Cluj-Napoca*