MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 8, N° 1, 1979, pp. 33—42

MÉTHODES DE L'ARITHMÉTIQUE DES INTERVALLES, APPLIQUÉES AU CONTRÔLE STATISTIQUE DE LA QUALITÉ

par

ŞTEFAN N. BERŢI

(Cluj-Napoca)

La notion de nombre (réel, complexe) est une notion de base, tant dans la recherche mathématique, que dans les différents domaines d'activité pratique. En recherche mathématique, le nombre est un objet d'étude, nombre de propriétés des nombres étant inconnues ; il arrive souvent de ne pouvoir même pas prévoir la voie qu'il faudrait suivre pour établir les propriétés respectives.

Dans l'étude des nombres on a obtenu des résultats fondamentaux ; nous rappellerons parmi ces résultats, ceux qui concernent la transcendance de certains nombres (c'est-à-dire, la propriété de ne pas être les solutions d'une équation algébrique de degré $\geqslant 1$, à coefficients entiers), la possibilité de déterminer (à l'aide des ordinateurs, et en utilisant des formules théoriques d'estimation) un grand nombre de chiffres décimaux de nombres tels que π, $\sqrt{2}$, etc. C'est ainsi que dès l'année 1961 on a calculé les premiers 100 000 chiffres décimaux de π. En contrôle statistique, un point qui présente souvent de l'importance est la génération de certaines suites pséudoaléatoires. La génération de telles suites fait souvent appel à des questions de la théorie des nombres particulièrements avancées (suites normales, suites de distribution uniforme).

De tels résultats retiennent l'attention des mathématiciens, mais en ce qui concerne les domaines de la pratique, leur utilité n'a souvent pas été avérée. Par exemple, dans les conditions présentes, nous n'avons pas besoin d'utiliser dans des calcules numériques des approximations à des centaines ou même à des dizaines de chiffres d'un nombre et à plus forte raison, de faire la distinction entre un nombre algebrique et un nombre transcendant. Par contre, en d'autres questions pratiques, la distinction entre algébrique et transcendant joue un rôle de tout premier ordre. Nous donnerons en exemple, le cas des courbes à allure semblable à la parabole d'équation $y = x^2$ et la chaînette, d'équation $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, qui expriment deux phénomènes distincts du point de vue pratique (trajectoire d'un corps librement jeté et forme d'un pont suspendu) ; du point de vue mathématique, la première courbe est algébrique et la seconde transcendante.

En mathématiques et dans les questions d'applications à la pratique, la notion de nombre connaît de nombreuses généralisations et particularisations. En ce qui concerne les généralisations, nous mentionnerons le passage du nombre naturel au nombre entier, rationnel, réel, complexe, hypercomplexe, aux éléments d'un espace abstrait : Hilbert, Banach etc. Quand aux particularisations, nous rappelerons, le passage des nombres naturels, aux nombres pairs, impairs, le passage des nombres réels ou rationnels, aux nombres pratiques. Par le terme ,,nombre pratique du type n'' on entend les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $a_1a_2 \ldots . a_n$, c'est-à-dire, à l'aide d'au plus n chiffres décimaux. Ces nombres pratiques son utilisées en technique, en la représentation effective de certaines valeurs dans les ordinateurs.

Un généralisation de la notion de nombre imposée par les problèmes de calcul aproximatif, est la notions d'intervalle, ou plus généralement, la notion de quantité multivalorique (complexe).

Si $a_1 \leq a_2$ sont deux nombres réels, alors $[a_1, a_2] = \{u \mid a_1 \leq u \leq a_2\}$ est l'ensemble des nombres réels, compris entre a_1 et a_2. Nous désignerons par $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres naturels, entiers, rationnels, réels, respectivement complexes, par $\mathcal{I}(\mathbf{R})$, ou plus simplement, par $\mathcal{I}$, l'ensemble des intervalles réels et fermés $[a_1, a_2]$, où $a_1 \leq a_2$.

Si dans un problème de contrôle de la qualité sont données les marges d'acceptabilité K_i et K_s, nous sommes en fait en présence d'un intervalle $[K_i, K_s]$, c-est-à-dire, d'un élément de l'ensemble $\mathcal{I}$. Au cas idéal, où $K_i = K_s$, l'intervalle respectif a les extrémités égales, il peut être identifié au nombre réel K_i $(= K_s)$.

Un contrôle statistique de qualité peut se caractériser par les sytèmes

$$(1) \qquad \underbrace{N_L,\ IC,\ LCA\,;\ N_C\,;}_{\alpha}\ \ \underbrace{COD,\ n,\ A,\ R\,;\ D)}_{\beta}$$

N_L = volume du lot $\in \{2, 3, 4, \ldots\}$;
IC = importance du contrôle (très important, ..., non essentiel);
LCA = marge de la qualité acceptée $\in \{0{,}1\,;\ 0{,}15\,;\ \ldots\,;\ 4\,;\ 10\}$;
N_C = niveau de contrôle ;
$COD \in \{A, B, C, \ldots, Q, R\}$;
n = volume de l'échantillon $\in \{1, 2, 3, \ldots\}$;
A = nombre d'acceptation $\in \{0, 1, 2, \ldots\}$;

R = nombre de rejet $\in \{1, 2, 3, \ldots\}$;
D = décision prise $\in$ {le lot est rejeté, le lot est admis, on effectue le contrôle à 100%, on effectue un second contrôle statistique, ...}.

En fonction de paramètres α, il est possible de déterminer des paramètres β, de differentes manières. On utilise souvent les normes internationales MIL, STD 105 – D.

Les résultats d'un contrôle du type (1) se reflètent dans l'utilisation pratique par les bénéficiaires des produits respectifs. De cette manière, il se présente un système de la forme

$$(2) \qquad S_2 = (p_1,\ a_1\,;\ p_2,\ a_2\,;\ \ldots\,;\ p_n,\ a_n),$$

où $0 \leq p_1, p_2, \ldots, p_n \leq 100$ (%) ; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 100$ (%) et $a_1, \ldots, a_n$ sont des estimations en ordre croissant (a_1 — l'acceptation la plus faible et a_n — la plus favorable). En (2), la paire p_j, a_j représente : p_j % du produit a été aprrécié par la bénéficiaire par le qualificatif a_j.

Il existe une correspondence de la forme

$$(3) \qquad S_2 = f(S_1\,;\ C,\ D,\ \ldots) = f(N_L,\ IC,\ LCA\,;\ \ N_C\,;\ C,\ D,\ \ldots),$$

par concéquent, l'appréciation du produit dépend du contrôle de qualité et de certains facteurs, désignés par C, D, ..., tels que : conditions de production, niveau de prétention du bénéficiaire, etc. Les variables de S_1 peuvent être des nombres, des intervalles, ou des quatités multivaloriques (nous entendons par ce terme, des ensembles quelconques de nombres, ou plus généralement, d'entités même non numériques). Nous en présenterons quelques exemples.

Exemple 1. N_L est un nombre déterminé quand on connaît le volume du lot de production ; N_L est un ensemble discret de nombres (quantité multivalorique), quand on connaît, de manière approximative, le volume du lot de production.

Exemple 1.1. Connaissant le niveau de contrôle II et le code D, on sait que $N_L \in \{26, 27, \ldots, 50\}$.

Exemple 2. Si l'on connaît $N_L \in \{501, 502, \ldots, 10\,000\}$ et $N_C = $ II, alors $COD \in \{J, K, L\}$.

Dans cet exemple, COD est une quantité multivalorique, non numérique (complexe).

Exemple 3. Si $N_C = $ II, $LCA = 0{,}10$ et $n = 125$, alors nous pouvons avoir $COD \in \{A, B, C, \ldots, L\}$ et $N \in \{2, 3, 4, \ldots, 10\,000\}$.

Dans cet exemple COD est un complexe et N une quantité multivalorique.

Exemple 4. Si $COD = P$ et $n = 800$, alors LCA est un intervalle, auquel appartiennent les marges de qualité acceptées 0,1; 0,15; 0,25 ; ... ; 1,5, mais auquel n'appartient pas $LCA \geq 2{,}5$.

Il résulte des exemples présentés, que l'ensemble de définition de la fonction (3) peut être un système constitué de nombres, d'intervalles, de quantités, multivaloriques numériques, ou non numériques. D'autre part, le domaine des valeurs de (3) peut lui aussi être une fonction d'intervalle, ainsi qu'il résulte de l'exemple suivant :

Exemple 5. Si $LCA = 1{,}5$; $COD = K$; $N_C = \mathrm{II}$, alors dans les conditions de production des bénéficiaires, désignés (C, D, ...), en $S_2(p_1, a_1; \ldots; p_n, a_n)$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont déterminés et les purcentages $p_1, \ldots, p_n$ appartiennent à certains intervalles (on suppose que a_i est une appréciation moins favorable que a_{i+1}). Nous désignerons les intervalles, auxquels appartiennent les pourcentages, de la manière suivante : $[p_{11}, p_{12}], \ldots, [p_{n1}, p_{n2}]$, où $p_j \in [p_{j1}, p_{j2}]$ et $\sum_{j=1}^{n} p_j = 100$ (%). En ce cas, les placements des pourcentages dans les intervalles respectifs peuvent affecter l'une des formes indiquées dans les figures 1 et 2,

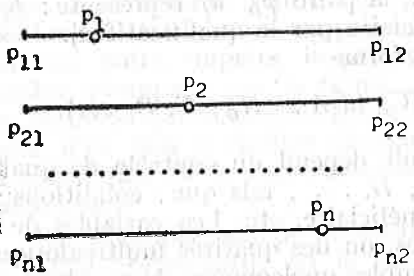

Fig. 1.

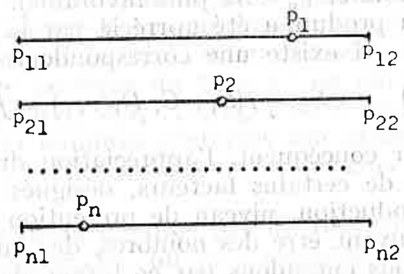

Fig. 2.

selons que nous sommes plus proches avec N_L de 1201 respectivement de 3200.

Les exemples ci-dessus illustrent l'importance de l'étude de fonctions dans lesquelles les variables et les valeurs sont des quantités multivaloriques, en particulier, des intervalles.

Au cas général nous sommes en présence de fonctions de la forme $f: L_1 \times \ldots \times L_m \to M_1 \times \ldots \times M_k$, où $L_1, \ldots, L_m$; $M_1, \ldots, M_k$ sont des nombres, des intervalles, des quantités multivaloriques numériques, ou non numériques ; au cas particulier des fonctions d'intervalles, celles-ci sont de la forme $f: I^m \to I^k$. C'est ainsi qu'on a été conduit à l'étude des fonctions d'intervalle à partir de questions de contrôle qualitatif statistique, de la production. Les problèmes soulevés par le contrôle statistique se réduisent souvent à la comparaison de certaines fonctions d'intervalle.

Nous présenterons à cet égard l'exemple suivant :

Exemple 6. Si l'on effectue un contrôle statistique sur un ensemble de repères, ou plus généralement sur un agrégat et si nous restons dans le domaine de tolérance admis, alors il ne s'ensuit pas que le contrôle statistique des repères nous conduit à respecter le domaine de tolérances. Inversement, à respecter les domaines de tolérance pour des repères, peut conduire au rejet de l'agrégat (par exemple, pour cause de défaut d'assemblage). En des conditions d'assemblage correctes, à respecter les domaines de

tolérance pour repères, implique le domaine de tolérance correct pour l'ensemble de repères, pour l'agrégat respectif. Il existe par conséquent la possibilité qu'un ensemble, soit acceptable, mais qu'il existe des rebuts dans les détails, mais il n'est pas possible de ne pas monter un bon appareil, à partir de bons details. C'est une analogie avec une situation extrêmement banale en arthmétique : il est possible d'effectuer des opérations erronées et d'obtenir un résultat correct, mais en effectuant des opérations correctes, il est impossible d'obtenir un résultat erroné (en utilisant les résultats erronés suivants : $2 \times 8 = 14$, $14 + 5 = 21$, nous obtenons le résultat correct : $2 \times 8 + 5 = 21$).

Les situations présentées dans cet exemple nous conduisent au principe d'inclusion de la théorie des intervalles, qui s'avère exact, en particulier, au cas des fonctions d'intervalle : $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ et $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. Ici $\mathbf{AB} = \{uv \mid u \in \mathbf{A} \,\&\, v \in \mathbf{B}\}$, par conséquent, $\mathbf{AB}$ est la totalité des résultats qui peuvent s'obtenir par la multiplication d'un nombre de $\mathbf{A}$, par un nombre de $\mathbf{B}$.

Pareillement, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{u + v \mid u \in \mathbf{A} \,\&\, v \in \mathbf{B}\}$.

Pour les fonctions d'intervalle $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ et $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, nous avons la loi de sous distributivité

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \subseteq \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \tag{4}$$

qui exprime le fait que l'intervalle $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ ne peut excéder l'intervalle $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

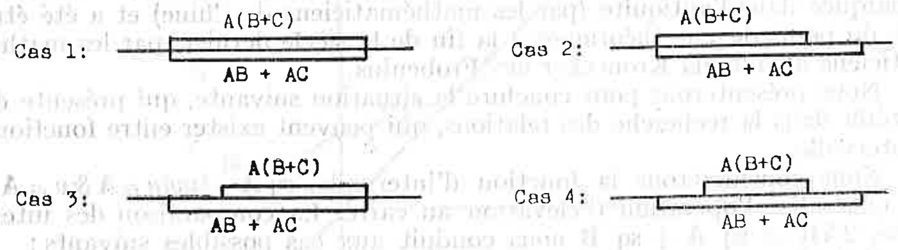

Fig. *.

L'égalité peut intervenir à maintes occasions, par exemple, si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sont des intervalles constitués par des nombres positifs. Dans l'exemple suivant :

$$\mathbf{A} = [-1,\ 2], \quad \mathbf{B} = [-3,\ 6], \quad \mathbf{C} = [-2,\ -1],$$

nous aurons

$$\mathbf{AB} = [-1,\ 2][-3,\ 6] = [-6,\ 12];$$

$$\mathbf{AC} = [-1,\ 2][-2,\ -1] = [-4,\ 2]; \quad \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = [-10,\ 14];$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = [-5,\ 5]; \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = [-1,\ 2]\ [-5,\ 5] = [-10,\ 10],$$

par conséquent $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \subset \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ et nous nous retrouvons dans le cas 2, ci-dessus presénté. On démontre que tous les cas 1) — 4) se peuvent effectivement rencontrer.

Le problème de l'assemblage de deux pièces cylindriques

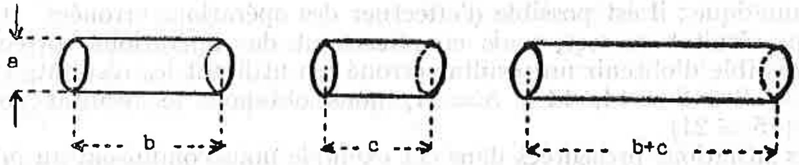

Fig. 3.

du point de vue des superficies laterales

$$A_{\text{lat. repères}} = \pi ab + \pi ac\,; \quad A_{\text{lat. ensemble}} = \pi a(b+c),$$

nous conduit à une telle situation, à laquelle l'erreur par repères peut excéder celle par ensemble, mais non inversement. Par conséquent, l'erreur des repères étant suffissamment petite, l'erreur de l'ensemble sera certainement égale à, ou moindre que la somme des erreurs par repères.

Cette loi de sous distributivité s'avère particulièrement importante aussi en calcul numérique dans le problème de la cumulation des erreurs dans les ordinateurs, dans des problèmes de prognose, d'autre part, elle présente également de l'intérêt en recherche fondamentale. Cette loi a été remarquée dans l'antiquité (par les mathématiciens de Chine) et a été étudiée du point de vue théoriques a la fin de la siècle dernier, par les mathématiciens allemands Kronecker et Frobenius.

Nous présenterons pour conclure la situation suivante, qui présente de l'intérêt dans la recherche des relations, qui peuvent exister entre fonctions d'intervalle.

Nous considérerons la fonction d'intervalle. sq $\mathbf{A} = \{uv \mid u \in \mathbf{A} \,\&\, v \in \mathbf{A}\}$, qui généralise l'opération d'élévation au carré. La comparaison des intervalles $2\mathbf{AB}$ et sq $\mathbf{A}$ + sq $\mathbf{B}$ nous conduit aux cas possibles suivants:

1) $2\mathbf{AB} \subseteq$ sq $\mathbf{A}$ + sq $\mathbf{B}$ (fig. 4)

Fig. 4.

2) $2\mathbf{AB} \leqslant$ sq $\mathbf{A}$ + sq $\mathbf{B}$ (fig. 5)

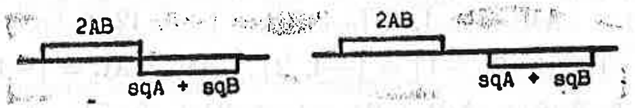

Fig. 5.

3) $2\mathbf{AB} =\mid$ sq $\mathbf{A}$ + sq $\mathbf{B}$ (fig. 6)

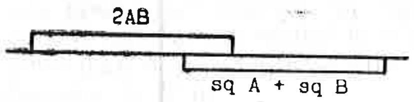

Fig. 6.

Ainsi que nous le verrons, ces fonctions d'intervalle peuvent être aussi dans des relations autres que celles d'inclusion. Ainsi, si nous nous donnons l'intervalle $\mathbf{A}$, alors en faisant changer l'intervalle $\mathbf{B}$, nous avons l'une des situations 1), 2), 3), selon que nous nous plaçons dans les domaines D_1, D_2, D_3, de la figure 7.

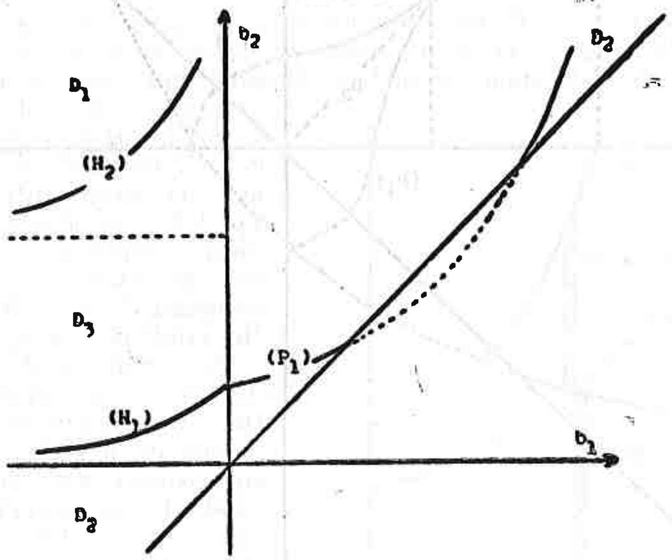

Fig. 7.

La cas où $\mathbf{A}$ est un intervalle positif: $\mathbf{A} = [a_1, a_2]$, $0 < a_1 < a_2$.

$$(P_1) \quad b_2 = \frac{a_1^2 + b_1^2}{2a_2}\,;$$

$$(H_1) \quad b_2 = \frac{a_1^2}{2a_2 - b_1}\,;$$

$$(H_2) \quad b_2 = 2a_2 - \frac{a_1^2}{b_1}\,;$$

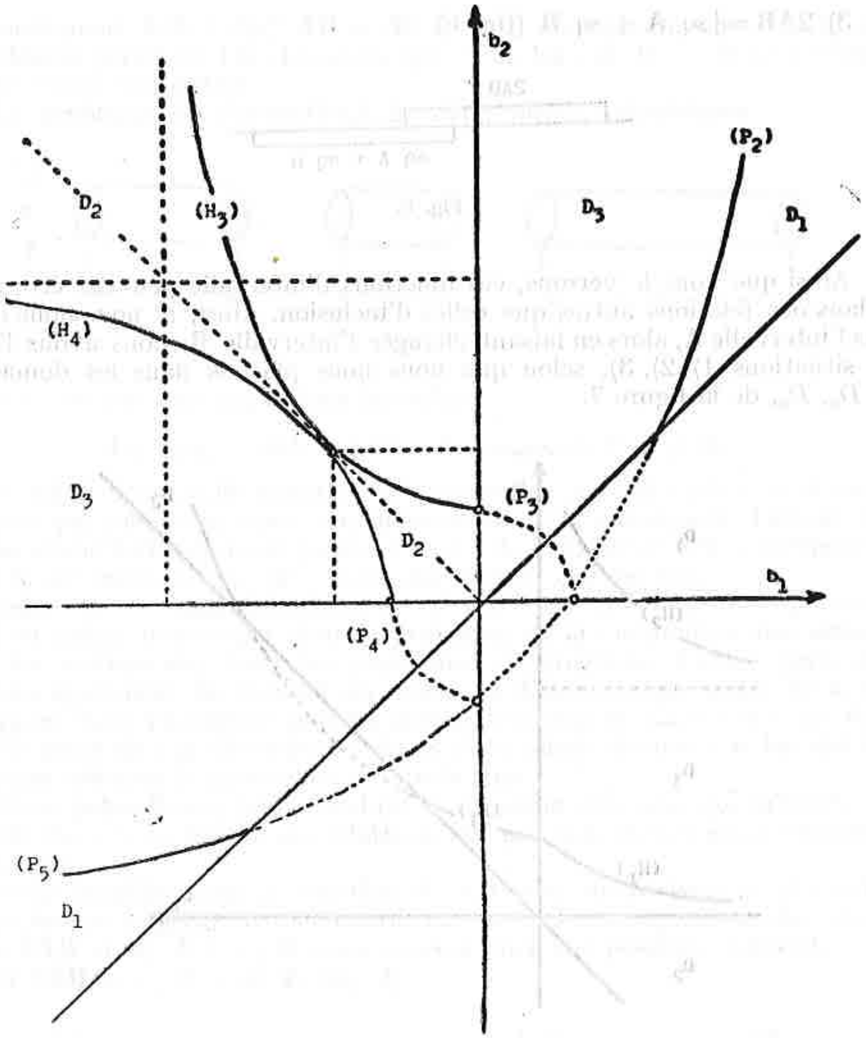

Fig. 8.

Le cas où **A** est un intervalle mixte : $\mathbf{A} = [a_1, a_2]$, $a_1 < 0 < a_2$.

$$(P_2)\ b_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{b_1^2}{2a_2}\,; \quad (P_3)\ b_2 = \frac{a_2}{2} + \frac{b_1^2}{2a_1}\,;$$

$$(P_4)\ b_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{b_2^2}{2a_2}\,; \quad (P_5)\ b_1 = \frac{a_2}{2} + \frac{b_2^2}{2a_1}\,;$$

$$(H_3)\ 2a_1b_2 = a_1a_2 + b_1b_2\,; \quad (H_4)\ 2a_2b_1 = a_1a_2 + b_1b_2\,;$$

Au cas où l'intervalle **A** est négatif (c'est-à-dire constitué par des nombres négatifs), nous avons une situation semblable à celle du cas où l'intervalle **A** donné est positif (on obtient une figure symétrique).

Dans les figures 7 et 8 nous avons utilisé la représentation des intervalles par points du demi-plan $b_1 \leqslant b_2$. L'intervalle $[b_1, b_2]$ est représenté par le point de coordonnées b_1 et b_2.

À l'intérieur des domaine D_1, D_2, D_3 nous avons les situations représentées aux cas 1) — 3). Aux frontières de ces domaines nous avons des situations aux limites. Nous présenterons à titre d'exemple, le cas où nous sommes placés sur l'arc de parabole (P_2). Si nous écrivons $\mathbf{A} = [-a, b]$ où a et b sont des nombres positifs, alors pour se trouver sur l'arc de parabole (P_2), l'intervalle **B** est de la forme

$$\mathbf{B} = \left[b + c + \sqrt{b^2 + ab},\ \frac{1}{2b}\,(b + c + \sqrt{b^2 + ab})^2 - \frac{a}{2}\right],$$

où c est un paramètre qui varie dans l'intervalle $[0, +\infty)$. Lorsque $c = 0$, nous sommes placés au point d'intersection de la parabole (P_2) avec la première bissectrice. Nous présentons dans la figure 9 la représentation, en fonction de c, des intervalles **2AB** et sq **A** + sq **B**, au cas où nous sommes placés sur l'arc de parabole (P_2). Dans ce cas, l'extremité gauche de sq **A** + sq **B** coïncide avec l'extrémité droite de **2AB**, les extrémités de l'intervalle **2AB** (et par conséquent l'extrémité gauche de l'intervalle sq **A** + sq **B**) se déplacent le long de coniques et l'extrémité droite de l'intervalle sq **A** + sq**B** se déplace le long d'une quartique, ce qui nous montre que l'ordre de l'erreur est de beaucoup plus grand à droite, qu'à gauche ; ceci est valable également dans des points de l'interieur du domaine $b_1 \leqslant b_2$, suffisamment proches de l'arc, de parabole (P_2). Nous sommes ainsi en possession d'informations précieuses en ce qui concerne la cumulation des erreurs par les fonctions d'intervalle considerées.

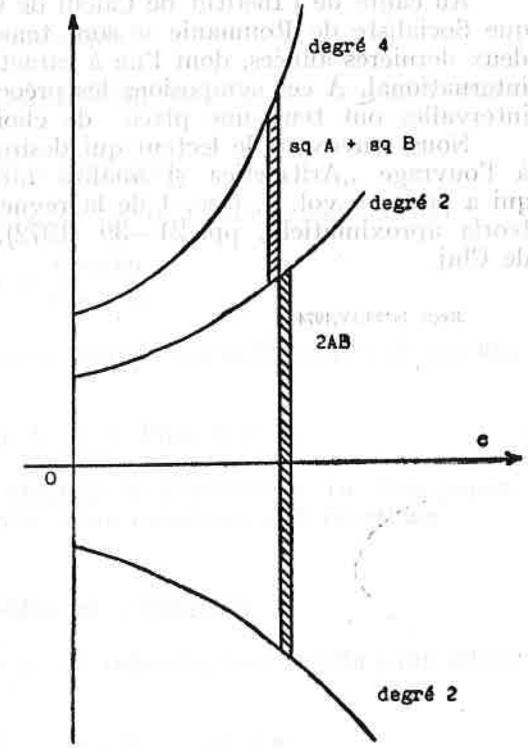

Fig. 9.

Nous présentons l'exemple numérique suivant :

Exemple 7. Si $\mathbf{A} = [-3, 1]$, alors sur l'arc de parabole (P_2) nous aurons $\mathbf{B} = [3 + c,\ 3 + 3c + c^2/2]$ et en efectuant les calculs, $2\mathbf{AB} = [-18 - 18c - 3c^2,\ 6 + 6c + c^2]$ et $\mathrm{sq}\,\mathbf{A} + \mathrm{sq}\,\mathbf{B} = \left[6 + 6c + c^2,\ 18 + 18c + 12c^2 + 3c^3 + \frac{c^4}{4}\right]$.

Quleques remarques bibliographiques. Dans notre pays, l'artihmétique des intervalles a fait l'objet de travaux de plusieurs mathématiciens et ingénieurs. Nous citerons à cet égard l'étude des complexes (quantités multivaloriques dans des structures algébriques) de DAN BARBILIAN, les recherches de l'académicien T. POPOVICIU de l'année 1937, concernant la détermination des estimations de certains déterminants fonctions d'intervalles (un déterminant d'ordre n est un fonction de n^2 variables), ainsi que l'étude faite également par l'académicien T. POPOVICIU, concernant les nombres pratiques, les travaux du professeur ingénieur ION LĂZĂRESCU, concernant les calculs à tolérances (1948), ainsi que l'axiomatisation de la théorie des tolérances(1968), les travaux à caractère apliquatif de l'ingénieur I. RABINOVICI (estimations fonctionelles et technologiques, tolérances, ajustages).

Au cadre de l'Institut de Calcul de Cluj de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie se sont tenus deux symposions, au cours des deux dernières années, dont l'un à caractère national et l'autre à caractère international. À ces symposions les préocupations concernant le calcul des intervalles ont tenu une place de choix.

Nous renvoyons le lecteur qui desirerait des références plus détaillées à l'ouvrage ,,Aritmetica şi analiza intervalelor'' de ŞTEFAN N. BERŢI, qui a paru au vol. 1, fasc. 1 de la revue ,,Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei'', pp. 21—39 (1972), éditée par l'Institut de Calcul de Cluj.

Reçu, la 23.IV.1974

Institut de Calcul de la Filiale de Cluj de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie.