MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 8, N° 1, 1979, pp. 53—57

ÜBER EINIGE INTERVALLMÄSSIGE ITERATIONSVERFAHREN

von

J. HERZBERGER
(Karlsruhe)

Wir geben hier eine kurze Darstellung von Iterationsverfahren, welche in letzter Zeit entwickelt wurden und welche alle gemeinsam eine Reihe von praktischen Vorteilen aufweisen. Die einzelnen Beispiele stellen jeweils Lösungsmethoden für verschiedene spezielle Aufgabenstellungen dar. Allen gemeinsam liegt jedoch folgende Problemstellung zugrunde:

Für die gesuchte Lösung ξ *einer mathematischen Aufgabe sollen Folgen von oberen und unteren Schranken* $\{x_2^{(k)}\}$ *und* $\{x_1^{(k)}\}$ *berechnet werden, welche die Größe* ξ *fortwährend verbessert einschließen. Das Verfahren soll so angelegt sein, daß beim Übergang vom reellen Zahlenkörper* $\mathbf{R}$ *zu den Maschinenzahlarithmetiken* $\mathbf{R}_M$ *alle wesentlichen Eigenschaften erhalten bleiben.*

Abkürzend fassen wir nun die oberen und unteren Schranken $x_2^{(k)}$ und $x_1^{(k)}$ zum Intervall $X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}]$ zusammen. Damit läßt sich die gestellte Aufgabe im einzelnen durch folgende Forderungen umschreiben. Es sei ein Einschließungsintervall $X^{(0)} \ni \xi$ für die gesuchte Größe vorgegeben. Das angewendete Verfahren Φ soll Folgen von Intervallen $\{X^{(k)}\}$ berechnen, mit den Eigenschaften

(I) $\quad \xi \in X^{(k)},\ k \geqq 0,$ (Lösungseinschließung)

(II) $\quad X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \ldots,$ (Monotonie)

(III) $\quad \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = \xi,$ (Konvergenz)

(IV) $\quad \{(x_2^{(k)} - x_1^{(k)})\}$ soll von möglichst hoher Ordnung gegen Null konvergieren.

Wir werden verlangen, daß (I) und (II) auch noch bei Durchführung der Rechnung in einer Maschinenarithmetik $\mathbf{R}_M$ erhalten bleiben. Dagegen wird (III) bei diesem Übergang durch die Eigenschaft

$$\text{(III)}' \qquad X^{(k)} = X^{(n)}, \; k \geqq n \text{ für ein } n,$$

erzsetzt. Dies folgt zwangsläufig aus der Endlichkeit des Zahlbereichs $\mathbf{R}_M$. Diese, bei komplexeren Problemen nicht einfache, Aufgabestellung läßt sich jedoch in zahlreichen speziellen Fällen relativ einfach lösen, wenn man als Hilfsmittel die Intervallrechnung bzw. Maschinenintervallrechnung einsetzt. Eine ausführliche Darstellung der Intervallverknüpfungen, ihrer algebraischen, mengentheoretischen und metrischen Eigenschaften findet man etwa bei MOORE [8] oder bei ALEFELD und HERZBERGER [4]. Wir halten uns hier an die Bezeichnungen des Buches von ALEFELD und HERZBERGER [4]. Von den einfachen Intervalloperationen

$$\text{(1)} \qquad X * Y = \{x * y \mid x \in X, \; y \in Y\}, \; * \in \{+, -, \times, \setminus\}$$

für reelle Intervalle $X = [x_1, x_2] \in I(\mathbf{R})$ benützen wir dabei im wesentlichen nur die Eigenschaft

$$\text{(2)} \qquad X_1 \subset X, \; Y_1 \subset Y \Rightarrow X_1 * Y_1 \subset X * Y, \; \text{(Inklusionsmonotonie)}$$

welche als Folgerung die Einschließungseigenschaft

$$\text{(3)} \qquad x \in X, \quad y \in Y \Rightarrow x * y \in X * Y$$

nach sich zieht. Sowohl (2) als auch (3) bleiben beim Übergang zur Maschinenarithmetik erhalten. Mit Hilfe der Intervalloperationen lassen sich nun für eine große Klasse reeller Funktionen f einfache Einschleißungsintervalle für deren Wertebereiche über einem endlichen Intervall $X \in I(\mathbf{R})$ berechnen. Dazu bildet man den Intervallausdruck $f(X)$, in welchem alle vorkommenden Operationen durch die entsprechenden Intervalloperationen ersetzt sind und das Argument x durch das Intervall X ersetzt wird. Näheres dazu entnehme man der erwähnten Literatur. Wesentlich sind hierbei wiederum die zu (2) und (3) analogen Eigenschaften

$$\text{(4)} \qquad \begin{array}{c} X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y), \\ \{f(x) \mid x \in X\} \subset f(X). \end{array}$$

Als Abkürzungen wollen wir noch die üblichen Begriffe

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{ll} d(X) = x_2 - x_1, & \text{(Durchmesser)} \\ m(X) = (x_1 + x_2)/2, & \text{(Mittelpunkt)} \end{array}$$

verwenden.
Nun sollen einige Beispiele für die Anwendung der Intervallrechnung bei der Konstruktion von Algorithmen der einleitend beschriebenen Art skizziert

werden. Als erstes erwähnen wir das intervallmäßige Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Lösung der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Sei dazu ξ eine Lösung und es sei ein Intervall $X^{(0)}$ mit $\xi \in X^{(0)}$ bekannt Dann betrachten wir die folgende Iterationsvorschrift falls ohne Einschränkung $f(x_1^{(0)}) < 0$ ist:

$$\text{(6)} \qquad \begin{array}{l} X^{(k+1)} = \left\{ m(X^{(k)}) - \dfrac{f(m(X^{(k)}))}{f'(Y^{(k)})} \right\} \cap Y^{(k)}, \\ \text{wobei } Y^{(k)} = \begin{cases} [x_1^{(k)}, m(X^{(k)})] & \text{für } f(m(X^{(k)})) > 0, \\ [m(X^{(k)}), x_2^{(k)}] & \text{für } f(m(X^{(k)})) < 0. \end{cases} \end{array}$$

Hierfür läßt sich beweisen:
Unter den Voraussetzungen $\xi \in X^{(0)}$, $0 \notin f'(X^{(0)})$ *gelten für die Folge der Iterierten gemäß* (6) *die Eigenschaften* (*I*), (*II*) *und* (*III*), *sowie*

$$d(X^{(k+1)}) \leqq c \cdot (d(X^{(k)}))^2.$$

Bezüglich der eingehenden Behandlung dieses Verfahrens und Modifikationen davon sei auf MOORE [8], CHERNOUS'KO [6], HERZBERGHER [7], sowie ALEFELD und HERZBERGER [4] verwiesen.
Es wurden auch für den Fall eines nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ähnliche Algorithmen aufgestellt. Dabei wird mit Vektoren und Matrizen gerechnet, deren Komponenten jeweils Intervalle sind, also mit Größen

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \text{ bzw. } \mathbf{A} = (A_{ij}).$$

Die Verknüpfungen von Intervallvektoren und -matrizen werden dabei formal als Analogon zu den entsprechenden Operationen im $\mathbf{R}^n$ gebildet (siehe dazu APOSTOLATOS und KULISCH [5]). Eine einfache Form des intervallmäßigen Newton-Verfahrens, angewendet auf nichtlineare Gleichungssysteme, ist die folgende Iterationsvorschrift

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{X}^{(k+1)} = \{m(\mathbf{X}^{(k)}) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{f}(m(\mathbf{X}^{(k)}))\} \cap \mathbf{X}^{(k)}, \; k \geqq 0,$$

wobei der Vektor $\mathbf{X}^{(0)}$ die gesuchte Lösung $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ einschleießen muß. Die Operation $m(\cdot)$ und $\cap$ ist in (8) jeweils komponentenweise zu verstehen. $\mathbf{F}$ ist eine Intervallmatrix $\mathbf{F} = (F_{ij})$, welche die Menge von Inversen zu den Frechet-Ableitungen $\mathbf{f}'$ an den Stellen $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^{(0)}$ enthalten muß. Das bei MOORE [8] an einem Beispiel vorgeschlagene Verfahren (8) findet sich erstmals analysiert und auf Konvergenz untersucht bei ALEFELD und HERZBERGER [1]. Einen Überblick über zahlreiche Verbesserungen und Modifikationen von (8) findet man bei ALFELED und HERZBERGER [4]. Auch für diese Verfahren gelten sinngemäß die Eigenschaften

(I), (II) und (III). Die im Falle (8) nur lineare Konvergenz läßt sich durch ständige Neuberechnung von $\mathbf{F}$ in Form einer Folge

$$\{\mathbf{F}^{(k)}\} \text{ mit } \mathbf{F}^{(k)} \to [\mathbf{f}'(\xi_1, \ldots, \xi_n)]^{-1}$$

verbessern. Hierbei kommt man mit vertretbarem Mehraufwand auf die Konvergenzordnung 2, wie etwa beim Verfahren von ALEFELD und HERZBERGER [2].

Kurz erläutern wollen wir noch einen Sonderfall des mehrdimensionalen intervallmäßigen Newton-Verfahrens, welcher auf eine Vorschrift führt, die komponentenweise in eine (6) ähnliche Gestalt zerfällt. Dazu betrachten wir ein reelles Polynom

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

mit reellen Koeffizienten. Wir nehmen an, daß sämtliche Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von $p(x)$ reell und einfach seien. Liegen nun paarweise disjunkte Einschließungsintervalle

$$X^{(0,j)} \ni \xi_j, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$X^{(0,j)} \cap X^{(0,i)} = \emptyset, \quad 1 \leqq i < j \leqq n,$$

vor, dann läßt sich das folgende Verfahren durchführen:

$$X^{(k+1,\,j)} = \left\{ m(X^{(k,j)}) - \frac{p(m(X^{(k,j)}))}{\Omega^{(k,j)}} \right\} \cap X^{(k,j)},$$

(9)

$$\text{mit } \Omega^{(k,j)} = \prod_{i=1}^{j-1} (m(X^{(k,j)}) - X^{(k+1,i)}) \prod_{i=j+1}^{n} (m(X^{(k,j)}) - X^{(k,i)}).$$

Allein unter den getroffenen Voraussetzungen läßt sich beweisen:

Die Folge $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ *der Intervallvektoren* $\mathbf{X}^{(k)} = (X^{(k,1)}, X^{(k,2)}, \ldots, X^{(k,n)})$ *genügt komponentenweise den Forderungen (I), (II) und (III). Ferner hat die Folge der Vektoren* $(d(X^{(k,1)}), d(X^{(k,2)}), \ldots, d(X^{(k,n)}))$ *die Konvergenzordnung* $1 + \sigma > 2$, *mit* σ *als positive Wurzel der Gleichung* $\sigma^n - \sigma - 1 = 0$.

Eine ausführliche Behandlung dieses Verfahrens findet sich bei ALEFELD und HERZBERGER [3]. Man kann dieses Iterationsverfahren auch zur Verbesserung von Gerschgorin-Einschließungen von Eigenwerten bei Tridiagonalmatrizen anwenden.

Mit diesen Beispielen soll die Aufzählung von Algorithmen, welche durch Verwendung von Intervallarithmetik den eingangs gestellten Anforderungen genügen, beendet werden. Ganz unberücksichtigt blieben dabei die zahlreichen Anwendungen bei Problemen der linearen Algebra. Hierzu sei der Interessent auf die einschlägige Literatur verwiesen.

LITERATUR

[1] Alefeld, G., Herzberger, J., *Über das Newton-Verfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen.* Z. Angew. Math. Mech. **50**, 773–774 (1970).

[2] — *Über die Konvergenz intervallarithmetischer Iterationsverfahren.* Revue d'Analyse Numerique et de la Theorie de l'Approximation **3**, 117–124 (1974).

[3] — *Über Simultanverfahren zur Bestimmung reeller Polynomwurzeln.* Z. Angew. Math. Mech. **54**, 413–420 (1974).

[4+] — *Einführung in die Intervallrechnung.* Bibliographisches Institut Mannheim-Wien-Zürich, 1–389 (1974).

[5] Apostolatos, N., Kulisch, U., *Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen.* Elektron. Rechenanlagen **10**, 73–83 (1968).

[6] Chernous'ko, F. L., *An optimal algorithm for finding the roots of an approximately computed function.* Zh. Vychisl. Mat. i. mat. Fiz. **8**, 705–724 (1967).

[7] Herzberger, J., *Bemerkungen zu einem Verfahren von R. E. MOORE.* Z. Angew. Math. Mech. **53**, 356–358 (1973).

[8] Moore, R. E., *Interval Analysis.* Prentice Hall Inc., (1966).

Eingegangen am 2. II. 1975.

Institut fur Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe 1, Kaiserstr. 12