MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 8, N° 1, 1979, pp. 67–77

MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN PROFIL DANS UN FLUIDE IDÉAL EN PRÉSENCE D'UNE PAROI PERMÉABLE ILLIMITÉE. CADRE VARIATIONNEL ET APPROXIMATION PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS

par

TITUS PETRILA

(Cluj-Napoca)

Le présent travail considère l'écoulement plan, potentiel, sans circulation d'un fluide parfait incompressible, écoulement produit par le déplacement général d'un profil, en présence d'une paroi illimitée perméable. Le fluide est supposé en repos à l'infini.

Pour l'étude de cet écoulement qui conduit à un problème aux limites de type mixte (Dirichlet et Poincaré) pour un domaine doublement connexe nous nous plaçons dans un cadre fonctionnel convenablement choisi. Cette méthode a été déjà utilisée, par J. F. CIAVALDINI, M. POGU et G. TOURNEMINE dans le cas particulier de l'écoulement autour d'un obstacle fixe, qui conduit à un problème aux limites pour un domaine simplement connexe [1]. Nous allons suivre pour notre problème général la technique proposée par ces auteurs, sans être intéressés dans tous les détails théoriques, moins importants pour la pratique.

L'approximation effective de la solution par une méthode d'éléments finis aussi que les problémes de convergence et d'estimation de l'erreur qui s'y posent constituent l'objet du deuxième paragraphe du travail.

Enfin, une fois démontrée l'existence et l'unicité de la solution, on fera „a posteriori'' quelques remarques sur des problèmes mathématiques, auxquels nous serions conduits par l'abordée du problème initial avec des méthodes de l'analyse classique.

1. Le modèle variationnel attaché au problème mécanique

Supposant la paroi rectiligne illimitée perméable à distance suffisante du profil mobil C, pour pouvoir linéariser sa condition de fonctionnement[1], la détermination du potentiel complexe de l'écoulement fluide consideré revient à la résolution du suivant problème aux limites pour la fonction uniforme de courant Ψ

$$
(1)\quad \begin{cases} \Delta\Psi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Psi|_C = ny - mx + \dfrac{1}{2}\,\omega[(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2] + K(t) \\ \alpha_1 \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\Big|_\Gamma = l(x) \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = \lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = 0 \end{cases}
$$

où Ω c'est le domaine de l'écoulement du plan physique — l'exterieur du profil C limité par la paroi Γ, $n(t)$, $m(t)$, $\omega(t)$, les composantes[2], fonctions de temps, au point (x_C, y_C), de la rototranslation du profil C dans la masse de fluide idéal en repos à l'infini, $K(t)$ une fonction arbitraire de temps, pendant que la fonction $l(x)$ et les constantes réelles α_1 et α_2 sont liées à la perméabilité P de la paroi et à la pression p_e régnant à l'extérieur de Γ par $l(x) = \alpha_2(2 - p_e)$, $\alpha_1 P + \alpha_2 = 0$, $P < 0$; on suppose que $\lim\limits_{|z|\to\infty} p_e(x) = p_\infty = 2$, cette égalité étant en accord avec la condition sur la paroi $\Gamma/y = 0/$, où $|x| \to \infty$.

Mais la condition de repos à l'infini du fluide, dans l'hypothèse normale de la convergence uniforme des limites $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$ et $\lim\limits_{|y|\to\infty} \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = 0$, entraîne la constance des limites $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Psi(x, y)$ et $\lim\limits_{|y|\to\infty} \Psi(x, y)$, donc $\lim\limits_{|z|\to\infty} \Psi(x, y) = \delta =$ constante, constante δ qu'on fixe en zéro.

Alors le problème (1) se ramène à

$$
(2)\quad \begin{cases} \Delta\Psi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Psi|_C = l_1(x, t) \\ \alpha_1 \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\Big|_\Gamma = l(x) \\ \Psi \underset{|z|\to\infty}{(x, y) \to 0} \end{cases}
$$

[1] La théorie du fonctionnement des parios perméables conduit, en général, à une condition aux limites non linéaire.

[2] Par rapport au système fixe d'axes Oxy, dont l'axe des x coincide avec la paroi Γ.

[3] A l'aide d'une translation $\Psi \to \Psi + \delta$.

où $l_1(x, t)$ c'est la fonction $ny - mx + \dfrac{1}{2}\,\omega[(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2] + K(t) - \delta$ dans laquelle $y = K_1(x)$ sur l'extrados C_e du profil C et $y = K_2(x)$ sur l'intrados C_i du même profil C ; $y = K_1(x)$ et $y = K_2(x)$, les équations de l'extrados et de l'intrados, appartiennent à $C^2[a, b]$ et, en plus, $K_1^{(i)}(a) = K_2^{(i)}(a)$, $K_1^{(i)}(b) = K_2^{(i)}(b)$, $i = 1, 2$.

Mais la condition de Dirichlet sur C peut être rendue homogène par relèvement : étant donné $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit, et $A > 0$, arbitrairement grand, on introduit une fonction $w \in C^\infty(\Omega)$, à support contenu dans le demi-cercle $\{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 < A^2,\ y > \varepsilon\}$, et vérifiant sur le profil C la condition $w(x, y)|_C = l_1(x, t)$[4].

On pose alors $\Psi = u + w$ et la fonction u vérifie le problème

$$
(3)\quad \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega\ (f = \Delta w) \\ u|_C = 0 \\ \alpha_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_\Gamma = l(x) \\ \underset{|z|\to\infty}{u(x, y) \to 0} \end{cases}
$$

Pour placer maintenant le problème (3) dans un cadre variationnel adéquat, nous suivons le chemin classique [2] :

On introduit donc $V = \{v \in H^1(\Omega)\,;\ v|_C = 0\}$ où

$$
H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\,;\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\right\}^5,
$$

sur lequel l'inégalité de Poincaré-Friedrichs est vraie et que l'on peut donc munir de la norme

$$
\|v\| = \|\text{grad } v\|_{L^2(\Omega)} = \left[\iint_\Omega \left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2\right) dx\, dy\right]^{1/2\ 6}.
$$

On définit aussi la forme bilinéaire antisymétrique et continue sur $V \times V$

$$
J(u, v) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\, dy
$$

[4] L'existence d'une telle fonction est évidemment assurée.

[5] Les dérivées étant concues au sens généralisé.

[6] En général $\|v\|_{H^1(\Omega)} = (\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\text{grad } v\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$ qui conduit, l'inégalité de Poincaré-Friedrichs étant vraie $\|u\|_V \leqslant \text{const}\, \|\text{grad } v\|_{L^2(\Omega)}$, à l'équivalence des normes ci-dessus.

Si les fonctions u et v sont régulières, v étant nulle sur C[7], alors

$$J(u, v) = \int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx\,dy - \int_{\Omega}\left(-v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \int_{C}\left[\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right) n_1 + v\frac{\partial u}{\partial x}\, n_2\right] ds_1 + \int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial x}\, ds_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, 0)\, \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0)\, dx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tau}, v \right\rangle,$$

$\dfrac{\partial}{\partial \tau}$ désignant la dérivée tangentielle sur Γ, pendant que $\vec{n}(n_1, n_2)$ c'est le vecteur unitaire de la normale au contour C. L'application $(u, v) \to$ $\to \left\langle \dfrac{\partial u}{\partial \tau}, v \right\rangle$ se prolonge par densité à l'espace $H^1(\Omega) \times V$[8].

Posons maintenant $a(u, v) = \alpha_2 \int_{\Omega}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy + \alpha_1 J(u,v).$

Pour fixer les idées, nous supposons que $\alpha_2 > 0$ en remarquant que seul le signe du rapport $\alpha_2/\alpha_1 = -P < 0$ doit être respecté ; le cas $\alpha_2 = 0$, qui correspond à une perméabilité nulle, conduit à un problème qui a déjà fait l'objet de nos recherches antérieures [3], [4], [5].

Le problème (3) devient alors :

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = \alpha_2(f, v) + \langle l, v\rangle, \ \forall v \in V, \end{cases}$$

$(\cdot, \cdot)$ désignant le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, $\langle l, \cdot\rangle$ la fonctionelle linéaire et continue sur V, envisagée ci-dessus, et qui coïncide avec le produit scalaire de $L^2(\Gamma)$, dès que $l \in L^2(\Gamma)$.

Remarquant que $(f, v) = (\Delta w, v) = -(1/\alpha_2)a(w, v)$[9] on a aussi

$$(5) \qquad \begin{cases} \Psi = u + w, \quad u \in V, \\ a(\Psi, v) = \langle l, v\rangle, \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

---

[7] Par exemple, $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, $v \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, $\mathrm{supp}(v) \cap C = \emptyset$, où $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ est l'équivalent, pour les fonctions généralisées, de $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

[8] Initialement l'application $(u, v) \to \left\langle \dfrac{\partial u}{\partial \tau}, v \right\rangle$ est définie sur $\mathfrak{D}(\overline{\Omega}) \times \{\mathfrak{D}(\overline{\Omega}), \mathrm{supp}\,(v) \cap C = \emptyset\}$. Mais $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ este dense sur $H^1(\Omega)$ pendant que $\{\mathfrak{D}(\overline{\Omega}), \mathrm{supp}\,(v) \cap C = \emptyset\}$ este évidemment dense sur V. En plus, pour u fixée, cette application définit une fonctionnelle linéaire et continue sur V, qui est un élément de l'espace dual $H^{-1}(\Omega)$.

[9] $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta wv\, dxdy = \int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] dx\,dy - \int_{\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dx\,dy =$ $= -\dfrac{1}{\alpha_2}\, a(w, v)$ parce que $v|_C = 0$ et $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}$, donc $J(w, u)$, sont nulles sur Γ $|\mathrm{supp}\, w \cap \Gamma = \emptyset|$.

THÉOREME 1. *Etant donné $l \in L^2(\Gamma)$, il existe une fonction et une seule, solution du problème (4). La fonction $\Psi = u + w$ vérifie alors (5) ; elle est unique et indépendante du relèvement w.*

Démonstration: La démonstration est identique à celle du théorème équivalent de [1].

La forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue et coercive sur $V \times V$ car

$$|a(u, v| \leqslant \alpha_2||u|| \cdot ||v|| \text{ et}$$

$$(\alpha_2 > 0)$$

$$a(u, u) = \alpha_2\, ||\mathrm{grad}\ u||^2_{L(\Omega)} = \alpha_2||u||^2 \cdot$$

De l'autre côté l'application $v \to \alpha_2(f, v) + <l, v>$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur V, $<l, v>$ étant un produit scalaire dès que $l \in L^2(\Gamma)$.

L'existence et l'unicité de u résulte alors immédiatement du théorème de Lax-Milgram.

Soit maintenant w_1 et w_2 deux relèvements de la trace de Ψ sur C, u_1 et u_2 les solutions de (4) correspondantes, $\Psi = u_i + w_i$, $i = 1, 2$; alors

$$a(\Psi_1 - \Psi_2, v) = <l,v> - <l,v> = 0, \ \forall v \in V$$

et comme $\Psi_1 - \Psi_2 \in V$ (étant satisfaite $\Psi_1 - \Psi_2|_C = 0$) on déduit, par coercivité

$$\alpha_2||\Psi_2 - \Psi_1||^2 = a(\Psi_2 - \Psi_1, \Psi_2 - \Psi_1) = 0, \text{ q.e.d.}$$

2. L'approximation numérique de la solution

a. LE PROBLÈME DANS LE DOMAINE BORNÉ Ω_A

Pour construire une approximation numérique de la solution unique du problème (4) ou (5), il faut d'abord remplacer le domaine non borné Ω par un domaine borné de travail.

Soit l'ouvert borné Ω_A attaché au domaine initiale Ω, et défini par

$$\Omega_A = \Omega \cap \{(x, y) ;\ x^2 + y^2 < A^2\},$$

où le paramétre $A > 0$, destiné à tendre vers $+\infty$, doit être choisi tel que le contour C et son intérieur appartiennent à Ω_A.

Au lieu du problème (2) nous aurons naintenant le problème approché

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta\Psi_A = 0 \text{ dans } \Omega_A, \\ \Psi_A|_C = l_1(x, t), \\ \Psi_A|_{\delta_A} = 0, \\ \alpha_1 \dfrac{\partial \Psi_A}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial \Psi_A}{\partial y}\Big|_{\Gamma_A} = l_0(x), \end{cases}$$

où Γ_A est la restriction de Γ à l'intervalle $(-A, A)$ et δ_A, c'est la circonférence, de demi-plan positif, du demi-cercle $x^2 + y^2 = A^2$, donc $\delta_A = \{(x, y) ; x^2 + y^2 = A^2, y > 0\}$.

Le but de ce paragraphe est de montrer d'abord l'existence et l'unicité de la solution Ψ_A du problème (6) aussi bien que, sous certaines hypothèses, la fonction Ψ_A converge (dans un sens à préciser) vers la solution exacte Ψ du problème (2).

En poursuivant le même chemin du paragraphe précédent, on introduit de nouveau un relèvement $w_A \equiv w \in C^\infty(\Omega_A)$, à support contenu dans le demi-disque $\{(x, y) ; x^2 + y^2 < A^2, y > \varepsilon > 0\}$ et vérifiant sur le contour C la condition $w|_C = l_1(x, t)$ [10].

Comme $w|_{\delta_A} = 0$ et $\Psi_A|_{\delta_A} = 0$, posant $\Psi_A = u_A + w$ nous sommes conduits au problème suivant :

$$(7) \quad \begin{cases} -\Delta u_A = f_A \text{ dans } \Omega_A \quad (f_A = \Delta w) \\ u_A|_{C \cup \delta_A} = 0 \\ \alpha_1 \dfrac{\partial u_A}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial u_A}{\partial y}\Big|_{\Gamma_A} = l_0(x) \end{cases}$$

En introduisant maintenant l'espace

$$V_A = \{v \in H^1(\Omega)_A ; \quad v|\delta_A \cup C = 0\},$$

on donne, pour le problème (7), une formulation variationnelle analogue à celle du paragraphe précédent. On a alors le

THÉORÈME 2. *Sous les hypotheses du théoréme 1 le probleme (7) admet une solution unique $u_A \in V_A$. La fonction $\Psi_A = u_A + w_A$ est unique, indépendante du relèvement w_A et elle vérifie le probleme (6). En plus, si $\tilde{u}_A$ est le prolongement de u par zéro dans Ω, la fonction $\tilde{\Psi}_A = \tilde{u}_A + w$ converge fortement vers la fonction Ψ dans $H^1(\Omega)$.*

Démonstration : Il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème — la convergence, la première découlant automatiquement par raisonnements analogues à ceux utilisés dans le théorème I. De l'égalité $a(u_A, u_A) = -a(w, u_A) + \int_{\Gamma_A} l u_A \, dx$, qui découle du fait que la fonction $\Psi_A = w + u_A$ satisfasse au problème $a(\Psi_A, v_A) = \langle l, v_A \rangle, \quad \forall v_A \in V_A$ (en particulier pour $u_A = v_A$) on déduit que

[10] L'existence d'une telle fonction est évidemment assurée, quelque soit les deux nombres réels et positifs ε, $A > 0$, ε étant arbitrairement petit et A arbitrairement grand.

$\|\tilde{u}_A\| \leqslant C\{\|\text{grad } w\|_{L^2(\Omega)} + \|l\|_{L^2(\Gamma)}\}$, C étant une constante indépendante de A [11].

On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée $\tilde{u}_A$) telle que $\tilde{u}_A \rightharpoonup u^*$ dans V faible[12].

Soit $v \in V$ une fonction à support compact. Alors, en prenant A assez grand $\left(\text{pour avoir} \int_{\Gamma_A} lv dx = \int_\Gamma lv dx\right)$ on a

$$a(\tilde{u}_A, v) = a(u_A, v) = -a(w, v) + \int_{\Gamma_A} lv dx = -a(w, v) + \int_\Gamma lv dx$$

En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, $a(\cdot, v)$ étant une fonctionnelle linéaire et continue sur V et $\tilde{u}_A \rightharpoonup u$ dans V, nous obtenons $a(u^*, v) = - a(w, u) + \int_\Gamma lv dx$, l'égalité étant vraie par densité $\forall v \in V$ [13].

Mais l'unicité de la solution entraîne $u = u^*$ et donc, toute la suite $\tilde{u}_A$ converge faiblement vers u^* dans V.

D'autre part :

$$a(\tilde{\Psi}_A - \Psi, \tilde{\Psi}_A - \Psi) = a(\tilde{\Psi}_A - \Psi, \tilde{u}_A - u) = -a(\tilde{\Psi}_A - \Psi, u)^{14}$$

et la coercivité de $a(u, v)$ sur $V \times V$ $(\tilde{\Psi}_A - \Psi \in V)$ nous donne $\|\tilde{\Psi}_A - \Psi\| \leqslant C_1(|a(\tilde{\Psi}_A - \Psi, u)|)^{1/2}$, la constante C_1 ne dépendant pas de A ; mais $\tilde{u}_A \rightharpoonup u$ dans V et aussi $\tilde{\Psi}_A \rightharpoonup \Psi$ dans $H^1(\Omega)$ ce qui prouve $\|\tilde{\Psi}_A - \Psi\| \to 0$, q.e.d.

b. LA FONDAMENTATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS L'ESTIMATION DE L'ERREUR.

Soit $(\tau_k)_{k>0}$ une suite régulière de triangulations de Ω_A, donc pour laquelle il existe un θ_0 tel que, θ_k étant le plus petit angle de tous les triangles, on a la relation $\theta_k \geqq \theta_0 \ \forall k > 0$.

[11] La coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ nous permettent d'écrire respectivement

$$a(u_A, u_A) = \alpha_2\|u_A\|^2 \text{ et } |a(w, u_A)| \leqslant M\|w\| \, \|u_A\|$$

Mais $\|w\| = \|\text{grad } w\|_{L^2(\Omega)}$ et $\left|\int_{\Gamma_A} l u_A dx\right| \leqslant \left(\int_{\Gamma_A} l^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_A} u_A^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \|l\|_{L^2(\Gamma)}\|u_A\|$.

[12] V étant un espace de Banach reflexif il est aussi faible compact ; on peut donc extraire de n'importe quel ensemble borné, une sous-suite faiblement convergente.

[13] Le sous-ensemble des fonctions de V à support compact est dense dans V.

[14] $a(\tilde{\Psi}_A, \tilde{u}_A) = a(\Psi, \tilde{u}_A)$ parce que
$a(\tilde{\Psi}_A, \tilde{u}_A) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V$ et donc, $\tilde{u}_A \in V$,
$a(\tilde{\Psi}_A, \tilde{u}_A) = \langle l, \tilde{u}_A \rangle = a(\Psi, \tilde{u}_A)$.

On pose $\Omega_k = \bigcup_{K \in \tau_k} K$, le plus grand côté de tous les triangles K étant majoré par k.

Soit maintenant l'espace de dimension finie

$$V_k = \{v_k \in C^0(\overline{\Omega}_k)\,;\; v_k|K \text{ est afine, } \forall K \in \tau_k\}$$

et correspondant

$$V_k^0 = \{v_k \in V_k\,;\; v_k|_{\Gamma_k} = 0\} \text{ où } \Gamma_k = \delta_A^k \cup C^k,$$

donc Γ_k est la réunion de tous les contours poligonaux, qui correspondent à δ_A et C, dans la la triangularisation respective.

En désignant alors par $w_k = \Pi_k w (w_k \in V_k)$, l'interpolé linéaire de $w \equiv w_A$ aux sommets de K et en posant

$$a_k(u, v) = \alpha_2 \int_{\Omega_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy + \alpha_1 \int_{\Omega_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy$$

$$\forall u, v \in H^1(\Omega_k)$$

le problème approché revient à

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \text{Trouver une fonction } u_k \in V_k^0 \text{ tel que } \Psi_k = u_k + w_k \text{ soit une} \\ \text{solution de } a_k(\Psi_k, v) = \langle l, v_k\rangle, \ \forall v_k \in V_k^0. \end{cases}$$

Mais la résolution de ce problème est donnée par le suivant théorème du a MM. CIAVALDINI, POGU, TOURNEMINE [1], qui s'applique sans aucune restriction :

THÉOREME 3. (i) *Le problème approché* (P) *admet une solution* Ψ_k *et une seule ; cette solution converge vers* Ψ_A *lorsque* $k \to 0$;
(ii) *Si en autre* $\Psi_A \in H^2(\Omega_A)$ *on a l'estimation d'erreur*

$$\|\Psi_A - \Psi_k\|_{H^1(\Omega_A \cup \Omega_k)} \leqslant C_2 k \|\Psi_A\|_{H^2(\Omega_A)},$$

ou la constante C_2 *est indépendante du paramètre* k.

3. Une fois démontrées l'existence et l'unicité de la solution du problème (1) ou (2) nous pouvons faire immédiatement quelques remarques sur d'autres questions mathématiques auxquelles on serait conduit par l'utilisation des méthodes classiques dans l'abordée du problème initialement proposé.

Plus précisément on peut faire des appréciations sur la fonction de représentation conforme du domaine Ω sur une couronne circulaire, sur des problèmes de Riemann-Hilbert et Poincaré attachés au même modèle mécanique, aussi bien que sur la resolubilité du système correspondant d'équations intégrales singulières et automatiquement sur le „défaut'' de ces équations.

Soit, par exemple, la représentation conforme $z = z(Z) = h(X, Y) +$
$+ ig(X, Y)$ du domaine de l'écoulement du plan physique (z) sur l'inté-
rieur D d'une couronne circulaire $[L_0, L_1]$ du plan (Z), couronne centrée
au point $(1, 0)$ de rayons respectivement $1/q > 1$ et $q < 1$ (et donc qui
contient l'origine de (Z))[15]. Nous admettons que, par cette représentation,
la paroi Γ correspond à la circonférence L_0, pendant que le profil C corres-
pond à la circonférence L_1 ; soit $Z = 1 + \frac{1}{q}$ l'immage du point à l'infini
du plan physique (z).

En désignant alors $f(z(Z)) = \Phi + i\Psi$, $a = \dfrac{\partial h}{\partial X}$, $b = \dfrac{\partial g}{\partial X}$ le problème (2) se ramène à

$$(3') \quad \begin{cases} \Delta\Psi = 0 \text{ dans } D \\ \Psi|_{L_1} = f_1(X, Y, t) \\ \beta_1 \dfrac{\partial \Psi}{\partial X} + \beta_2 \dfrac{\partial \Psi}{\partial Y}\Big|_{L_0} = f_0(X, Y) \\ \lim\limits_{Z \to 1 + \frac{1}{q}} \Psi = 0 \end{cases}$$

où $f_1(X, Y, t) = l_1(h(X, Y), t)$, $f_0(X, Y) = l_0(h(X, Y))\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{\alpha_1^2 + \alpha_5^2}}$ pendant que les fonctions β_1 et β_2 sont données par :

$$\beta_1 = \frac{-a\alpha_1 - b\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(a^2 + b^2)}} \text{ et } \beta_2 = \frac{-b\alpha_1 + a\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(a^2 + b^2)}},$$

satisfaisant la condition $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$.

Le problème (3') pourrait être étudié, en utilisant pour la fonction
cherchée Ψ une représentation intégrale, à densité inconnue, de type
VEKUA [6], qui conduirait, une fois vérifiées les conditions aux limites, à
un système d'équations intégrales de type Fredholm. Suivant cette méthode
avec SCHERMANN [7] (ses hypothèses suplimentaires demandées sur les
coefficients β_i et sur le domaine D étant staisfaites) on peut affirmer que
la résolubilité du problème (3')[16], dans l'hypothèse que le problème homo-
gène admet seulement la solution banale, a lieu, si et seulement si,
$\arg(\beta_1 - i\beta_2)_{L_0} = -2\pi$.
Comme nous avons déjà démontré l'existence de la solution du pro-
blème, pendant que l'unicité de la solution triviale pour l'écuation homo-
gène est en plein accord avec le sens physique du problème, on peut donc

[15] Une telle représentation existe le module de la couronne $1/q^2$ étant uniquement déter-
miné, et elle est réalisable par une fonction régulière et univalente dans la couronne circulaire.
[16] Mais pas son unicité.

affirmer que la fonction de représentation conforme $z = z(Z)$ (sa dérivée) satisfasse nécessairement à la condition Arctang $\left(\frac{a\alpha_2 - b\alpha_1}{a\alpha_1 + b\alpha_2}\right)_{L_0} = 2\pi$.

D'autre part le problème Riemann-Hilbert attaché au même modèle mécanique donc[17]

$$(3'')\qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ -v + uk_1'(x) = l_{1e}'(x, t) \text{ sur } C_e \\ -v + uk_1'(x) = l_{1\,in}'(x, t) \text{ sur } C_i \\ -\alpha_1 v + \alpha_2 u = l_0(x) \text{ sur } \Gamma \\ \begin{matrix} u \to 0 \\ v \to 0 \end{matrix} \qquad \text{pour } |z| \to \infty \end{cases}$$

admet une solution si, considerant la même représentation conforme $z = z(Z)$ sur l'intérieur de la même couronne circulaire, le problème correspondant aux limites, a l'index $n \geqq 1$ [8]. Mais cet index étant $n = n_0 + n_1$ et $n_0 = -\frac{1}{2\pi}\left[\text{Arctang } \frac{\beta_2}{\beta_1}\right]_{L_0} = 1$ (voir ci-dessus), on déduit que la résolubilité du problème Riemann-Hilbert revient à la non négativité de $n_1 = -\frac{1}{2\pi}\left[\text{Arctang} \frac{a + bK_i'}{-b + aK_i'}\right]$ où $K_i' \stackrel{\text{def}}{=} k_i(h(X, Y))$.

Enfin ce problème Riemann-Hilbert, consideré comme un cas particulier d'un problème gènèralisè de Vekua (appelé aussi problème Riemann-Hilbert-Poincaré) conduit à une équation intégrale singulière, dont la résolubilité dépend, à son tour, de „défaut" du noyau respectif [9]. Comme nous avons déjà prouvé l'existence et même l'unicité de la solution du problème proposé, on obtient donc des appréciations similaires sur cet équation intégrale singulière et sur le „défaut" de son noyau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ciavaldini, J. F., Pogu, M., Tournemine, G., *Modèle d'écoulements autour de profils en présence de parois perméables; approximation par uue méthode d'éléments finis.* Journal de Mécanique, (15)2, 265–286 (1976)

[2] Lions, J. L., *Equations différentielles opérationnelles.* Springer Verlag, vol. 3 (1961).

[3] Petrila, T., *Sur le mouvement général d'un profil dans un fluide idéal en présence d'une paroi infinie.* C. R. Acad. Sci. Paris, (270), 1048–1050 (1970).

[4] Petrila, T., *Sur la méthode du couple des profils pour l'étude d'un mouvement général d'un obstacole dans un fluide idéal en présence d'une paroi rectiligne.* C. R. Acad. Sci. Paris, (272), 818–821 (1971).

[17] A ce problème on arrive si, au lieu du potentiel complexe $f(z)$, nous serions déterminés la vitesse complexe $\frac{df}{dz} = u - iv$ de l'écoulement, fonction holomorphe et continue dans le domaine entier Ω, y compris le point à l'infini. On a désigné par $l_{1e}(x, t)$ et $l_{1in}(x,t)$ les restriction de la fonction $l_1(x, t)$ sur le extrados C_e respectivement sur l'intrados C_{in} du profil C.

[5] Petrila, T., *Une nouvelle méthode pour l'étude de l'influence des parois sur l'écoulement fluide plan.* Riv. Mat. Univ. Parma, (3), 2, 47–53 (1973).

[6] Vekua, I. N., *Sur une nouvelle représentation intégrale des fonctions analytiques et ses applications* (en russe). Soobtch. A. N. Gruz SSR, (11), 6,, 477–484 (1941).

[7] Scherman, D. I., *Sur le probleme général de la théorie du potentiel* (en russe). Izv. A. N. SSSR, ser. matem., (10), 2, 121–134 (1946).

[8] Vekua, I. N., *Systemes différentiels d'équations de type elliptique de premier ordre et ...* (en russe). Mathem. Sb., (31), 2, 217–314 (1952).

[9] Vekua, I. N., *Sur un probleme linéaire aux limites de type Riemann* (en russe). Tr. Tbilis. Matem. Inst. A. N. Gruz SSR., (XI), 109–139 (1942).

[10] Jacob. C., *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Bucarest, Ed. Acad. R.P.R. – Paris Gauthier-Villars (1959).

Reçu le 16. XII. 1978.

Facultatea de Matematicǎ
a Universitǎţii Babeş-Bolyai
Str. Kogǎlniceanu Nr. 1
Cluj-Napoca