1 buc. (unicat)

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE
FILIALE DE CLUJ-NAPOCA

MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION

TOME 8

№ 2

1979

CLUJ-NAPOCA
ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE
FILIALE DE CLUJ-NAPOCA

MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION

Tome 8, № 2 1979

SOMMAIRE

MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
**L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
TOME 8, Nº 2, 1979, pp. 117–125**

UNE EXTENSION DE LA „SECTION D'OR" AUX CONFIGURATIONS SPATIALES

par

LIA ARAMĂ et OLEG ARAMĂ

(București, Cluj-Napoca)

1. Comme on le sait de la géométrie élémentaire, diviser un segment de droite AB en rapport „d'or", signifie diviser le segment respectif en „moyenne et extrême raison", c'est-à-dire, déterminer un point C, situé entre A et B, tel que $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$ (fig. 1). Ce rapport, désigné habituellement par la lettre greque φ, pour évoquer la personnalité de l'illustre sculpteur grec Phidias, qui l'a utilisé souvent, pour la réalisation de ses merveilleuses oevres d'art, a comme valeur numérique, la racine positive de l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, c'est-à-dire, la valeur $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1{,}61803398\ldots$ De même que le nombre π, qui représente le rapport de la longueur d'un cercle et son diamètre, la section „d'or" intervient comme l'expression mathématique des nombreuses lois de la nature, en lui attribuant de profondes significations dans le domaine des mathématiques, de l'astronomie, de la biologie, de la cybernétique, des arts plastiques, mêmedans le domaine de la poétique (À cet égard, voir les travaux [1] – [12]). Entre les nombreux exemples qui peuvent être mentionés dans cet ordre d'idées, nous nous bornerons à l'exemple suivant, du domaine de la géométrie élémentaire :

Fig. 1

D é f i n i t i o n 1. *Un rectangle $ABCD$* (fig. 2) *est appelé „d'or", si le rectangle „complémentaire" $BCEF$, obtenu par la suppression du carré maximal inscrit, $AFED$, est semblable au rectangle initial, c'est-à-dire si* $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CE}$.

On démontre aisément les affirmations suivantes (voir le travail [2]) :

P r o p r i é t é 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que le rectangle $ABCD$ soit „d'or", est que le rapport AB/BC $(AB > BC)$ soit*

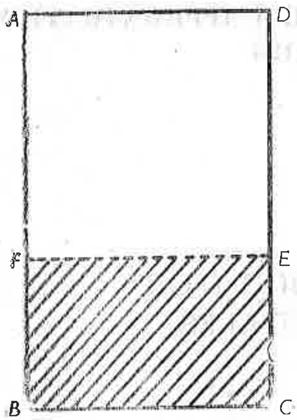

Fig. 2

égal au rapport „d'or'', φ, c'est-à-dire, à la racine positive de l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

P r o p r i é t é 2. *Si un rectangle ABCD set „d'or'', alors le rectangle complémentaire BCEF (fig. 2) est de même „d'or''. La réciproque de cette affirmation est également vraie.*

P r o p r i é t é 3. *Considérons la progression géométrique à ration* φ :

$$1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \varphi^n, \ldots$$

φ représentant le rapport „d'or''. Chaque terme de cette progression est égale à la somme des deux termes précédents voisins, c'est-à-dire : $\varphi^n = \varphi^{n-2} + \varphi^{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.*

P r o p r i é t é 4. (Réciproque de la propriété 3) *Soit* $\{u_n\}$ *une suite définie par la relation de récurrence :*

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

u_0 *et* u_1 *étant des nombres arbitraires, donnés.* (Une telle suite s'appelle „additive''). *Considérons la suite formée par les quotiens des deux termes consécutifs de la suite initiale, c'est-à-dire la suite :*

$$v_1 = \frac{u_2}{u_1},\ u_2 = \frac{u_3}{u_2},\ \ldots,\ v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n},\ \ldots$$

Si les termes initiaux, u_0 *et* u_1 *de la suite* $\{u_n\}$ *sont des nombres positifs, alors la suite correspondante des quotiens, c'est-à-dire la suite* $\{v_n\}$ *est convergente, ayant comme limite, le rapport „d'or'',* φ.

(Pour la démonstration de cette propriété, voir le travail [2]).

À l'occasion de la communication scientifique présentée par l'un des auteurs de ce travail, au symposium „Les mathématiques et l'art'', organisé par l'Institute de calcul de Cluj-Napoca, dans la ville Arad, le 13. V. 1974, l'académicien TIBERIU POPOVICIU — en présence d'un auditoire constitué de personnalités de culture et d'art, de même que de mathématiciens, parmi lesquels nous avons rencontré comme hôte, l'illustre mathématicien américain (d'origine roumaine) I. J. Schoenberg — a posé le problème suivant :

Donner un équivalent spatial du rectangle „d'or'', c'est-à-dire, préciser ce qu'on doit comprendre par le terme brique „d'or''.

Dans ce travail, nous présentons une résolution du ce problème. La définition que nous adoptons pour le terme brique „d'or'' est liée étroitement à une certaine suite additive, qui constitue, une extension de la bien connue suite de Fibonacci.

---

*) Cette relation exprime le caractère additif des termes de la progression considérée.

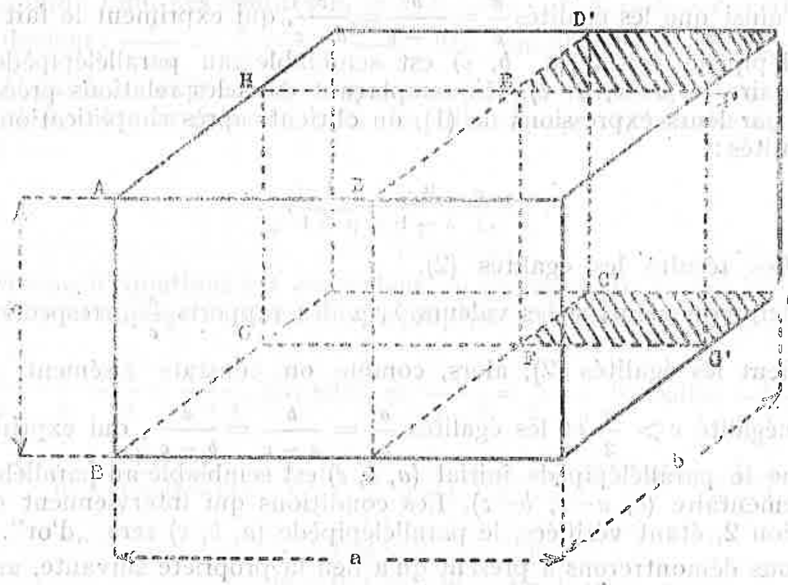

Fig. 3

2. Considérons dans l'espace 3-dimensionnel, un parallélépipède droit, arbitraire et désignons par *a, b, c,* $(a > b > c)$ les longueurs de ses arêtes (fig. 3). Considérons un cub maximal ABCDEFGH inscrit dans le parallélépipède. Les plans déterminés par les faces latérales *CDEF* et *EFGH* du cube découpent du parallélépipède initial, le parallélépipède *EFC'D'E' F'G'H'*, que nous l'appèlerons parallélépipède „complémentaire'' au cube inscrit, *ABCDEFGH*. Les longueurs des arêtes de cet parallélépipède sont : $c,\ a-c,\ b-c$.

D é f i n i t i o n 2. *Un parallélépipède droit* (a, b, c), *avec* $a > b > c$ *sera appelé „d'or'', si* $c > \frac{2}{a}$ *et si le parallélépipède complémentaire* $(c,\ a - c,\ b-c)$ *est semblable au parallélépipède initial,* (a, b, c).

THÉORÈME 1. *Pour qu'un parallélépipède droit* (a, b, c), *avec* $a > b > c$ *soit „d'or'', il est nécessaire et suffisant q'on ait les égalités :*

$$(1) \qquad \frac{a}{c} = \lambda, \qquad \frac{b}{c} = \mu,$$

dans lesquelles λ et μ représentent respectivement les racines réelles des équations :

$$(2) \qquad \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \qquad \mu^3 - 2\mu^2 + 2\mu - 2 = 0.$$

Démonstration. Dans l'hypothèse que le parallélépipède (a, b, c) est „d'or'', auront lieu, conformément à la définition adoptée, l'inégalité

$c > \frac{a}{2}$, ainsi que les égalités $\frac{a}{c} = \frac{b}{a-c} = \frac{c}{b-c}$, qui expriment le fait que le parallélépipède initial $(a,\ b,\ c)$ est semblable au parallélépipède complémentaire $(c,\ a-c,\ b-c)$. En remplaçant dans les relations précédanes, a et b par leurs expressions de (1), on obtient, après simplification par c, les égalités :

$$\lambda = \frac{\mu}{\lambda - 1} = \frac{1}{\mu - 1}, \tag{3}$$

desquelles résulte les égalités (2).

Réciproquement, si les valeurs λ, μ des rapports $\frac{a}{c}$, respectivement $\frac{b}{c}$ vérifient les égalités (2), alors, comme on constate aisément, auront lieu l'inégalité $c > \frac{a}{2}$ et les égalités $\frac{a}{c} = \frac{b}{a-c} = \frac{c}{b-c}$, qui expriment le fait que le parallélépipède initial (a, b, c) est semblable au parallélépipède complémentaire $(c,\ a-c,\ b-c)$. Les conditions qui interviennent dans la définition 2, étant vérifiées, le parallélépipède (a, b, c) sera „d'or".

Nous démontrerons à présent qu'a lieu la propriété suivante, analogue à la propriété 2 (§ 1) :

THÉORÈME 2. *Le parallélépipède* $(a_1,\ b_1,\ c_1)$, *complémentaire à un parallélépipède „d'or"* $(a,\ b,\ c)$ *est de même „d'or".*

Démonstration. Des inégalités $a > b > c$ et $c > \frac{a}{2}$, il résulte $c > a - c > b - c$. Les termes qui interviennent dans ces inégalités représentent les longueurs $a_1,\ b_1,\ c_1$ des arêtes du parallélépipède complémentaire. Pour que la condition $a_1 > b_1 > c_1$ soit vérifiée, on doit supposer $a_1 = c,\ b_1 = a - c,\ c_1 = b - c$.

1°. Démontrons d'abord que pour le parallélépipède complémentaire $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ est vérifiée la première condition qui intervient dans la définition 2, c'est-à-dire l'inégalité $c_1 > a_1/2$.

Compte tenu des égalités $c_1 = b - c,\ a_1 = c$, cette condition devient $2b > 3c$, c'est-à-dire, $\frac{b}{c} > \frac{3}{2}$. Comme le parallélépipède $(a,\ b,\ c)$ est „d'or", il résulte que $\frac{b}{c} = \mu$, μ étant la racine positive de la deuxième équation de (2). On montre aisément que cette racine est supérieure à $\frac{3}{2}$ et en conséquence, $\frac{b}{c} > \frac{3}{2}$.

2°. Démontrons maintenant que pour le parallélépipède complémentaire $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ est vérifiée également la deuxième condition qui intervient dans la définition 2, c'est-à-dire, la condition $\frac{a_1}{c_1} = \frac{b_1}{a_1 - c_1} = \frac{c_1}{b_1 - c_1}$.

Compte tenu des égalités $a_1 = c,\ b_1 = a - c,\ c_1 = b - c$, cette condition devient : $\frac{c}{b-c} = \frac{a-c}{2c-b} = \frac{b-c}{a-b}$. En remplaçant dans ces égalités, a et b, par leurs expréssions en fonction de c, c'est-à-dire, $a = \lambda c$, respectivement $b = \mu c$, on obtient, après simplification par c, la suite de rapports égaux :

$$\frac{1}{\mu - 1} = \frac{\lambda - 1}{2 - \mu} = \frac{\mu - 1}{\lambda - \mu}.$$

Ce système d'équations est équivalent au système (3), ce qu' on constate aisément, en appliquant deux fois la propriété suivante des rapports égaux :

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$. En effet, de $\frac{1}{\mu - 1} = \frac{\lambda - 1}{2 - \mu}$ il résulte $\frac{1}{\mu - 1} = \frac{1 + (\lambda - 1)}{(\mu + 1) + (2 - \mu)} = \lambda$, et de $\frac{1}{\mu - 1} = \frac{\mu - 1}{\lambda - \mu}$ il résulte $\frac{1}{\mu - 1} = \frac{1 + (\mu - 1)}{(\mu - 1) + (\lambda - \mu)} = \frac{\mu}{\lambda - 1}$.

3. De l'étude de la variation des fonctions

$$f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \text{et} \quad g(\mu) = \mu^3 - 2\mu^2 + 2\mu - 2,$$

qui interviennent dans les membres gauches des équations (2), on constate que chacune de ces équations a une seule racine réelle, située dans l'intervalle $\frac{3}{2} < \lambda < 2$, respectivement, $\frac{3}{2} < \mu < 2$. Les valeurs (approximatives) de ces racines s'obtiennent par l'application successive de la méthode de Newton (méthode de la tangente) :

$$\lambda = 1{,}839\,286\,755\,215 \ldots, \qquad \mu = 1{,}543\,689\,012\,695 \ldots$$

En conclusion, les longueurs des arêtes d'un parallélépipède „d'or", exprimées par rapport à l'arête minimale (considérée comme unité de mesure) sont :

$$a = 1{,}839 \ldots;\ b = 1{,}544 \ldots;\ c = 1.$$

Pour achever ce §, nous déterminerons la valeur du rapport $\theta = \frac{a}{b}$, dans le cas d'un parallélépipède „d'or" $(a,\ b,\ c)$, $a > b > c$. Des formules (1) il résulte que $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$ et de l'équation $\lambda = \frac{\mu}{\lambda - 1}$ du système (3) il résulte que $\theta = \frac{1}{\lambda - 1}$, donc $\lambda = \frac{\theta + 1}{\theta}$. En remplaçant dans la première équation de (2), λ par sa valeur $\frac{\theta + 1}{\theta}$, on obtient l'équation

$$2\theta^3 - 2\theta - 1 = 0, \tag{4}$$

qui admet une seule racine réelle : $\theta = 1{,}191487883955 \ldots$

4. Comme nous avons mentionné dans le premier § de ce travail, la notion de parallélépipède „d'or" se trouve en liaison étroite avec une certaine suite additive, qui rappelle la bien connue suite de Fibonacci. En effet, de l'équation (2), qui définit la valeur du rapport $\lambda = \frac{a}{c}$, il résulte les relations :

$$\lambda^3 = 1 + \lambda + \lambda^2, \quad \lambda^4 = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3, \quad \lambda^5 = \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4, \ldots,$$

qui expriment la propriété d'additivité suivante :

Un terme quelconque de la progression géométrique $\{\lambda^n\}$, à partir de rang $n = 3$, est égal à la somme des trois termes précédents, voisins.

Compte tenu de cette règle de formation des termes de la progression géométrique $\{\lambda^n\}$, considérons la suite plus générale $\{u_n\}$, définie par la relation de récurrence

$$u_{n+3} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

les premiers 3 termes, u_1, u_2, u_3 étant des nombres positifs quelconques, donnés.

À l'aide des termes de la suite $\{u_n\}$ ainsi définie, construisons la suite des quotiens :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

On constate aisément que cette suite est bornée, ses termes se situant dans l'intervalle (1, 3). Nous démontrerons qu'a lieu la propriété suivante, analogue à la propriété 4 (§ 1) :

THÉORÈME 3. *Si les termes initiaux u_1, u_2, u_3 de la suite $\{u_n\}$ définie par la relation de récurrence* (5) *sont positifs, alors la suite $\{v_n\}$, définie par la formule* (6) *converge vers la limite λ, cette limite représentant le rapport des arêtes a et c $\left(\lambda = \frac{a}{c}\right)$ d'un parallélépipède „d'or" (a, b, c), $a > b > c$.*

Démonstration. La convergence de la suite $\{v_n\}$ peut être démontrée en établissant au préalable une formule de représentation analytique du terme général de la suite $\{u_n\}$, à l'aide des racines de l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence (5). On observe que l'équation caractéristique en question coïncide avec la première équation de (2), c'est-à-dire, avec l'équation qui définit la valeur du rapport $\frac{a}{c}$, relativement à un parallélépipède „d'or", (a, b, c) $(a > b > c)$. En utilisant la formule de représentation mentionnée, on obtient pour v_n, une expression analytique, en fonction de λ et n, à l'aide de laquelle on peut étudier la convergence de la suite $\{v_n\}$.

Remarque. En supposant démontrée la convergence de la suite $\{v_n\}$, on peut déterminer sa limite, par le procédé élémentaire suivant :

En divisant les deux membres de la relation (5) par le terme u_{n+2}, on obtient la relation

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_n}} + \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}} + 1$$

de la quelle il résulte que si la suite $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ est convergente, alors la suite $\left\{\frac{u_{n+2}}{u_n}\right\}$ est également convergente. Soient

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\,; \quad w = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}.$$

En passant à la limite dans la relation précédente, on obtient la relation

$$v = \frac{1}{w} + \frac{1}{v} + 1.$$

D'autre part, en divisant les deux membres de la relation (5) par u_{n+1} on obtient la relation

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n}} + 1 + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},$$

de laquelle il résulte, par passage à la limite :

$$w = \frac{1}{v} + 1 + v.$$

Enfin, en éliminant l'inconnue w des deux équations précédentes en v et w, on obtient pour l'inconnue v, l'équation

$$v^4 - 2v^2 - 2v - 1 = 0,$$

de laquelle il résulte par simplification par le facteur $v + 1$ $(\neq 0)$, l'équation

$$v^3 - v^2 - v - 1 = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

5. Les résultats présentés dans les § 2—4 admettent des généralisations dans l'espace euclidien n-dimensionnel. Pour ne pas compliquer inutilement l'exposé, considérons un hyperparallélépipède droit dans un espace 4-dimensionnel. Soient a, b, c, d, les longueurs des arêtes du hyperparallélépipède considéré, écrites en ordre décroissant de leurs valeurs numériques ($a > b > c > d$).

D é f i n i t i o n 2*. *Un hyperparallélépipède droit* (a, b, c, d) *sera appélé „d'or", si* $d > \frac{a}{2}$ *et si le hyperparallélépipède complémentaire* $(d, a-d, b-d, c-d)$ *est semblable au hyperparallélépipède initial* (a, b, c, d).

A lieu le théorème suivant:

THÉORÈME 1*. *Pour q'un hyperparallélépipèd droit* (a, b, c, d) *soit „d'or", il est nécessaire et suffisant q'on ait les égalités :*

$$(1^*) \qquad \frac{a}{d} = \lambda, \qquad \frac{b}{d} = \mu, \qquad \frac{c}{d} = \nu,$$

dans lesquelles, λ *représente la racine positive de l'équation* (7), ν — *la racine positive de l'équation* (9) *et* μ — *la racine positive maximale de l'équation* (8) :

$$(7) \qquad f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad (\lambda = 1{,}9276\ldots),$$

$$(8) \qquad g(\mu) = \mu^4 - 2\mu^3 - \mu + 3 = 0 \begin{pmatrix} \mu_1 = 1{,}376\ldots \text{ racine étrangere} \\ \mu_2 = 1{,}788\ldots \text{ racine adéquate} \end{pmatrix},$$

$$(9) \qquad h(\nu) = \nu^4 - 3\nu^3 + 4\nu^2 - 2\nu - 1 = 0 \qquad (\nu = 1{,}519\ldots).$$

THÉORÈME 2*. *Le hyperparallélépipède* $(d, a-d, b-d, c-d)$, *complémentaire à un hyperparallélépipède „d'or"* (a, b, c, d) *est de même „d'or".*

Les *démonstrations* de ces théorèmes sont analogues aux démonstrations des théorèmes 1 et 2, relatives au cas 3-dimensionnel.

Remarque. De l'étude de la variation des fonctions $f(\lambda)$, $g(\mu)$, $h(\nu)$, qui interviennent dans les membres gauches des équations (7), (8), (9), on constate que chaque de ces équations a deux racines réelles et deux racines complexes. Les racines réelles des équations (7) et(9) sont de signes contraires, tandis que les racines réelles de l'équation (8) sont toutes les deux positives. La plus petite d'entre elles doit être considérée comme étrangère, parceque pour la racine respective ne sont pas satisfaites les inégalités $\lambda > \mu > \nu > 1$, qui doivent avoir lieu en vertu de l'hypothèse $a > b > c > d$.

* * *

En revenant au cas général d'un hyperparallélépipède ‚d'or" dans un espace euclidien n-dimensionnel ($n \geqslant 2$) et désignant par λ le rapport d'entre la longueur de son arête maximale et la longueur de son arête minimale, on constate aisément que l'équation qui définit la valeur de ce rapport est

$$(10) \qquad \lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} - \ldots - \lambda - 1 = 0 \qquad (\lambda > 1).$$

Par amplification par le facteur (différent de zéro) $\lambda - 1$, on obtient l'équation équivalente

$$(11) \qquad \varphi(\lambda) = \lambda^{n+1} - 2\lambda^n + 1 = 0$$

De l'étude de la variation de la fonction φ, on constate que l'équation (11) possède dans l'intervalle $(1, \infty)$ une seule racine réelle, cette racine pouvant être localisée (sur la base de la suite de Rolle) dans l'intervalle $\left(\frac{2n}{n+1}, 2\right)$. D'ici il résulte immédiatement l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda = 2$, qui exprime la propriété suivante :

THÉORÈME 4. *Le rapport entre la longueur de l'arête maximale et de l'arête minimale d'un hyperparallélépipède „d'or" d'un espace euclidien* n-dimensionnel tend vers la limite 2, quant la dimension n de l'espace tend vers infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A n d o n i e, G. S t., *Varia mathematica,* Ed. II. „Albatros", București, 1977, pp. 51—59.
[2] A r a m ă, L., *Despre șirul lui Fibonacci și despre metoda lui Newton de extragere a rădăcinii pătrate.* Gazeta matematică, Seria A, vol. LXXIX, nr. *3,* pp. 82—91 (1974).
[3] Б а х в а л о в, Н. С., *Численные методы,* I, гл. VII, §3. Изд. „Наука", Москва, 1973, стр. 416—420.
[4] C â m p a n, F. T., *Probleme celebre,* Ed. II. „Albatros", București, 1972, pp. 158—203.
[5] C o x e t e r, H. S. M., *Introduction to Geometry.* John Wiley and Sons, Inc., New York, London, 1961, Chap. 11.
[6] G a r d n e r, M., *First and Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.* Simon and Schuster, Inc., New York, Chap. 8.
[7] G h y k a, M a t i l a, C. *Secțiunea de aur și proporțiile corpului uman* (Trad. din l. franceză a articolului cu același titlu, din vol. „Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts", Gallimard, Paris, 1927). „Secolul 20" (București), nr. *11—12,* 1973, pp. 129—140.
[8] К у з и н, Л. Т., *Основы кидернетики,* I, гл. VX: *Прямые методы отыскания экстремума функции.* § 15—3: Последовательный поиск; б) Метод Фйбоначчи; в) Метод золотого сечения. Изд. „Энергия", Москва, 1973, стр. 366—370.
[9] * * * *Le nombre d'or,* vol. 1: *Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale.* NRF, Gallimard, Paris, 1931.
[10] M o n t e l, P., *La mathématique du nombre d'or.* Revue d'esthétique, **14,** *3—4* (1961).
[11] P o p o v i c i u, T., *Asupra aplicării algoritmului lui Euclid pentru aflarea c.m.M.d.c. a două numere.* Studii și cercet. științ. ale Acad. R.P. Române, Filiala Cluj, IV, *1—2,* pp. 59—63 (1953).
[12] V o r o b i e v, N., *Numerele lui Fibonacci* (Trad. din l. rusă). Biblioteca Gazetei Matematice, Ed. Tehnică, București, 1961.

Reçu le 17. II .1979