MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 8, Nº 2, 1979, pp. 193—202

SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES D'UN ENSEMBLE INTERPOLATOIRE

par
ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

1. Dans les recherches concernant la convexité par rapport à un ensemble interpolatoire F on est conduit souvent à considérer des sous-ensembles de l'ensemble F. Ainsi, par exemple, si F et G sont des ensembles interpolatoires d'ordre n respectivement $n+1$, sur l'intervalle $[a, b]$ et $F \subset \subset G$, alors la proprieté d'une fonction $f:[a, b] \to \mathbf{R}$, d'être F — convexe sur $[a, b]$ est en même temps une généralisation du comportement des éléments de l'ensemble G par rapport à l'ensemble F. On est aussi conduit à la construction de tels sous-ensembles dans l'étude de certains problèmes particuliers de la meilleure approximation. Dans la théorie comparative [3] des ensembles interpolatoires les sous-ensembles interpolatoires d'un ensemble lui même interpolatoire, interviennent aussi. En ceux qui suivent, nous esayons de présenter des exemples concernant la construction des sous-ensembles dont nous avons parlé plus haut. Les fonctions qui interviendront seront des fonctions réelles et d'une variable réelle.

2. Soit F un ensemble interpolatoire d'ordre n, sur un interval $[a, b]$: L'ordre $n \geqq 2$ est fixé. Pour la définition de la propriété d'un ensemble F de fonctions d'être interpolatoire d'un certain ordre sur un ensemble donné de points, voir [1] ou bien la monographie [3]. La fonction réelle f étant définie sur l'intervalle $[a, b]$, pour chaque système

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_k$$

de points de l'intervalle $[a, b]$, où $1 \leqq k \leqq n-1$, on peut considérer le sous-ensemble

$$(2) \qquad \{h | h \in F,\ h(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

de l'ensemble F. Nous avons considéré, pour la première fois, l'ensemble

(2), dans [2] et nous l'avons appellé épi de fonctions de l'ensemble F. Nous avons utilisé pour l'ensemble (2) la notation

$$S\left(F\,;\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_k \\ f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\end{matrix}\right). \tag{3}$$

S'il n'est pas nécessaire de mêttre en évidence la fonction f, alors on peut prendre, simplement, au lieu de $f(x_i)$, des nombres quelconque y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ et. dans ce cas, on utilise la notation

$$S\left(F\,;\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_k \\ y_1, y_2, \ldots, y_k\end{matrix}\right). \tag{4}$$

Une première remarque qu'on peut faire est que l'ensemble (4) est interpolatoire d'ordre $n-k$ sur chaque ensemble $X \subset [a, b]$ d'au moins $n-k$ points distincts et tel que $x_i \notin X$, $i = 1, 2, \ldots, k$. La présence de cette propriété d'interpolation permet l'étude du comportement, par rapport à l'épi (4), d'une fonction définie sur $[a, b]$ ou sur un ensemble X qui satisfait les conditions imposées plus haut. À cause de la propriété d'interpolation d'ordre $n-k$, qu'il possède, l'épi (4) s'appelle encore épi interpolatoire d'ordre $n-k$. Supposons, maintenant, qu'on a fixé un ensemble $X \subset [a, b]$, qui a été choisi de la manière indiquée plus haut. Soit

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-k} \tag{5}$$

un système de points distincts de l'ensemble X.

Pour simplifier la notaion, nous désignons l'épi (3) par le symbole $S(F, p_k, f)$ où p_k est une notation pour le système (1) de points. Pour (4) nous utilisons la notation $S(F, p_k, y)$. On peut donc construire pour la fonction $f : X \to \mathbf{R}$, l'élément

$$L(S(F, p_k, y)\,;\, u_1, u_2, \ldots u_{n-k}\,;\, f) \tag{6}$$

de l'épi (4), qui prend les valeurs de la fonction f sur les points (5) et qui est uniquement déterminé. Dans le cas particulier dans lequel y_i sont les valeurs $f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ de la fonction f, alors, au lieu de (6) on utilise la notation

$$L(S(F, p_k, f)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f). \tag{7}$$

La plupart des propriétés qu'on rancontre dans l'étude des fonctions (6) respectivement (7) , dépendent de la position des points (5) par rapport aux points (1). Comme les points (5) sont, par hypothèse, différents des points (1), la fonction (7) de l'épi (3) est égale avec la fonction

$$L(F\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f) \tag{8}$$

de l'ensemble F, qui prend les valeurs de la fonction f sur les points

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}. \tag{9}$$

La notation (8) est bien connue dans la théorie de l'interpolation [3].

Quand on construit la fonction (7) les données qui interviennent sont les suivantes. On a d'abord la fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ et puis la réstriction g de cette fonction aux points (9). La fonction (7) est un prolongement de g à l'intervalle $[a, b]$. Il sera, donc, interessant de comparer les valeurs de ce prolongement, sur des points de $[a, b]$ qui sont differents des points (9), avec les valeurs correspondentes de la fonction f. C'est la voie naturelle qui nous peut conduire à l'étude du comportement de la fonction f par rapport à l'épi (3). Supposons donc que les points (9) satisfont les inégalités

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k < u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0 \leqq b. \tag{10}$$

Dans ce cas, on peut considérer la différence

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, y)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f)(u_0) \tag{11}$$

et dans le cas particulier, quand $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, on a, au lieu de (11), la différence

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, f)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f)(u_0). \tag{12}$$

Le signe de la différence (11), respectivement celui de la différence (12), nous donne une information concernant le comportement de la fonction f sur les points $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$, par rapport à l'épi (4) respectivement (3). Pour la différence (11) il est possible d'avoir une des situations

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, y)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f)(u_0) > 0, \; = 0, \; < 0. \tag{13}$$

Pour la différence (12) on peut avoir une des trois situations

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, f)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f)(u_0) > 0 \; = 0, \; < 0. \tag{14}$$

DÉFINITION 1. *La fonction f s'appelle convexe (polynomialle respectivement concave) par rapport à l'epi* (4), *sur les points* $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$, *si dans* (13) *on a* $f(u_0) - L(S(F, p_k, y)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\,;\, f)(u_0) > 0$ ($= 0$ *respectivement* < 0).

Si l'on suppose maintenant que $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, alors la définition 1 a la suivante forme particulière.

DÉFINITION 2. *La fonction f s'appelle convexe (polynomialle respectivement concave) par rapport à l'épi* (3), *sur les points* $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$, *si dans* (14) *on a* $f(u_0) - L(S(F, p_k, f)\,;\, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}\, f)(u_0) > 0$ ($= 0$ *respectivement* < 0).

Si on considère maintenonit le signe de la différence (11) respectivement celui de la différence (12), sur chaque système $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$ de points de l'ensemble X, les réstrictions (10) restant encore valables, alors on peut formuler les deux définitions qui suivent.

DÉFINITION 3. *La fonction f s'appelle convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) à droitte, par rapport à l'épi* (4), *sur l'ensemble X, si l'inégalité*

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, y); u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}; f)(u_0) > 0 \ (\geq 0, = 0, \leq 0 \text{ respectivement } < 0) \tag{15}$$

a lieu pour chaque système $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$ *de points de l'ensemble X, satisfaisant les restrictions* (10).

DÉFINITION 4. *La fonction f s'appelle convexe (nonconcave, polynomialle, nonoconvexe respectivement concave) à droitte, par rapport à l'épi* (3), *sur l'ensemble X, si l'inégalité*

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, f); u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}; f)(u_0) > 0 \ (\geq 0, = 0, \leq 0 \text{ respectivement } < 0) \tag{16}$$

a lieu pour chaque système $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$ *de points de l'ensemble X, satisfaisant les restrictions* (10).

Si les points (5) satisfont les inégalités

$$a \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leq b \tag{17}$$

et ils restent dans l'ensemble X, alors le signe de la différence (11) respectivement celui de la différence (12) nous donne des informations concernant le comportement de la fonction f, par rapport à l'épi (4) respectivement par rapport à l'épi (4) mais à gauche des points (1). On peut, donc, remarquer qu'en considérant le comportement de la fonction f par rapport à l'épi (3) ou bien par rapport à l'épi (3), on a la possibilité d'analyser une classe plus large de fonctions comme celle des fonctions qui sont simplement F — convexes (F — nonconcaves, F — polynomialles, F — nonconvexes, respectivement F—concaves) sur un ensemble $X \subseteq [a, b]$, que nous avons définies dans un ancien travail [1]. Le comportement par rapport à l'épi (3)ou (4) nous conduit à des nouvelles classes de fonctions. Il sera donc interessant de faire une comparaison entre les nouvels et les anciens comportements — disons allures — qui interviennent ici.

DÉFINITION 5. *La fonction f s'appelle convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) à gauche, par rapport à l'épi* (4), *sur l'ensemble X, si l'inégalité*

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, y); u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}; f)(u_0) > 0 \ (\geq 0, = 0, \leq 0 \text{ respectivement } < 0) \tag{18}$$

a lieu pour chaque système $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$ *de points de l'ensemble X, satisfaisant les inégalités* (17).

DÉFINITION 6. *La fonction f s'appelle convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) à gauche, par rapport à l'épi* (3), *sur l'ensemble X, si l'inégalité*

$$f(u_0) - L(S(F, p_k, f); u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}; f)(u_0) > 0 (\geq 0, = 0, \leq 0 \text{ respectivement } < 0) \tag{19}$$

a lieu, pour chaque système $u_1 < u_2 <, \ldots, < u_{n-k} < u_0$ *de points de l'ensemble X, satisfaisant les inégalités* (17).

On remarque que dans les définitions 5 et 6, le point u_0 étant à gauche du point x_1, les informations qu'on obtient regardent le comportement de la fonction f seulement à gauche de x_1. Si on suppose que le point u_0 est place à droitte de x_k, les u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-k$ restant à gauche de x_1, les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ ont ils même une contribution à l'analyse du comportement de la fonction f. Considérons donc le cas

$$a \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < x_1 < x_2 < \ldots < x_r < u_0 \leq b, \tag{20}$$

les points u_i, $i = 0, 1, \ldots, n-k$ restant dans l'ensemble X.

DÉFINITION 7. *La fonction f s'appelle completement convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) par rapport à l'épi* (4), *sur l'ensemble X, si les inégalités* (18) *ont respectivement lieu pour chaque système* $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$ *de points de l'ensemble X, satisfaisant les inégalités* (20).

DÉFINITION 8. *La fonction f s'appelle completement convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe, respectivement concave) par rapport à l'épi* (3), *sur l'ensemble X, si les inégalités* (19) *ont respectivement lieu pour chaque système* $u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-k} < u_0$ *de points de l'ensemble X, satisfaisant les inégalités* (20).

Il nous reste encore à considérer le cas dans lequel les points $u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}$ de l'ensemble X peuvent avoir des positions arbitraires par rapport aux points (1) mais le point u_0 reste toujours à droitte du x_k et toujours à la droitte des points u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-k$. Ce cas est le plus semblable avec la situation qui se présent quand on considère la F—convexité (F — nonconcavité, F — polynomialité, F — nonconvexité respectivement la F — concavité) habituelle. Nous convennons de dire, dans ce cas que les points sont normalement placés par rapport aux points (1).

DÉFINITION 9. *La fonction f s'appelle totalement convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe, respectivement concave) par rapport à l'épi* (4), *sur l'ensemble X, si les inégalités* (18) *ont respectivement lieu pour chaque système* u_i, $i = 0, 1, 2, \ldots n-k$ *de points de l'ensemble X, normalement placés par rapport aux points* (1).

DÉFINITION 10. *La fonction f s'appelle totalement convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe, respectivement concave) par rapport à l'épi* (3), *sur l'ensemble X, si les inégalités* (19) *ont respectivement lieu pour chaque* *système* u_i, $i = 0, 1, \ldots, n-k$ *de points de l'ensemble X, normalements placés par rapport aux points* (1).

Les définitions que nous venons de donner nous permettent de faire une comparaison des fonctions introduittes par elles et les fonctions que nous avons définies dans [1].

Comme les points u_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-k$ ont été supposés différents des points (1), la différence (12) peut être exprimée dans le cas ponticulier $F = \mathfrak{P}_{n-1}$ de la manière suivante

$$f(u_0) - L(S(\mathfrak{P}_{n-1}, p_k, f);\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-k};\ f)(u_0) =$$

$$(21) \qquad = (u_0 - x_1)(u_0 - x_2) \ldots (u_0 - x_k)(u_0 - u_1) \ldots (u_0 - u_k)$$

$$[x_1, x_2, \ldots x_k,\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-k},\ u_0;\ f].$$

Avec $\mathfrak{P}_m$, nous désignons l'ensemble des polynomes de degré m. Dans la formule (21), on a désigné par

$$(22) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_k,\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-k},\ u_0;\ f]$$

la différence divisée de la fonction f, sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}, u_0$. Si le point u_0 satisfait les inégalités

$$(23) \qquad u_i < u_0,\ i = 1, 2, \ldots, n-k;\ x_i < u_0, i = 1, 2, \ldots, k$$

alors la différence divisée (22) a toujours le signe de la différence qui intervient dans le premier membre de la formule (21). Cette propriété nous conduit à une nouvelle interpretation des définitions que nous avons formulées, si l'on suppose que les conditions (23) sont satisfaites.

Il faut remarquer que dans les différences divisées (22) qui interviendront les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ restent toujours fixés. Ca signifie qu'il est necessaire de faire un étude special pour des différences divisées supposées à une telle condition. En particulier les théorèmes de la moyenne pour les différence divisées faut être precisés.

Dans le cas particulier $F = \mathfrak{P}_{n-1}$, $n \geqq 2$, en utilisant la représentation (21) de la différence (12), on peut remplacer les inégalités qui interviennent dans les définitions que nous avons données plus haut, avec des inégalités qui s'expriment avec des différences divisées. Il sera donc util de developper un calcul des différences divisées dans lesquelles certains points restent fixés.

3. Les propriétés qui interviennent dans les définitions sont liées à l'ensemble X. Si l'on suppose, en particulier, que $X = [a, b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, alors on peut faire le convention de dire que les propriétés qu'on a difinies ont lieu sur l'intervalle $[a, b]$ et relativement à l'épi (3) respectivement à l'épi (4). Les points $u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}, u_0$ peuvent, dans ce cas, être dans $[a, b]$, mais toujours différents des points (1) et satisfaisant chaque fois les inégalités imposées par les définitions considérées.

Nous nous arrêtons maintenant sur quelque propriétés concernant les fonction que nous avons définies.

Si le nombre $n-k$ des points (5) se reduit à 1, c'est à dire $k = n-1$, les inégalités (10) étant satisfaites, alors la définition 3 nous conduit au

LEMME 1. *Si la fonction f est convexe à droitte relativement à l'épi* (3), *sur l'intervalle* $[a, b]$ *et* $x_{n-1} < x < u_1$, *alors*

$$(23) \qquad f(x) < L(S(F, p_{n-1}, f);\ u_1;\ f)(x).$$

En effet, si, au lieu de (23), on suppose

$$f(x^*) > LF, p_{n-1}, f);\ u_1;\ f)\ (x^*)$$

pour un point x^*, $x_{n-1} < x^* < u_1$, alors

$$(24) \qquad L(S(F, p_{n-1}, f);\ x^*;\ f)(z) >$$

$$> L(S(F, p_{n-1}, f);\ u_1;\ f)(z)$$

quelque soit $z > x^*$. En ponticulier, l'inégalité (24) a lieu pour $z = u_1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur la fonction f dans l'énoncé du lemme 1, compte tennant du fait que

$$L(S(F, p_{n-1}, f);\ u_1;\ f)(u_1) = f(u_1).$$

Si au lieu de (23) on suppose

$$f(x^*) = L(S(F, p_{n-1}, f);\ u_1, f)(x^*),$$

pour un point x^*, $x_{n-1} < x^* < u_1$, alors, pour $z > x^*$ on a

$$f(z) > L(S(F, p_{n-1}, f);\ x^*;\ f)(z)$$

Mais pour $z = u_1$ on obtient

$$L(S(F, p_{n-1}, f);\ x^*;\ f)(u_1) = f(u_1),$$

ce qui est aussi en contradiction avec l'hypothèse faite dans l'énoncé du lemme.

Une interpretation très simple nous montre que dans le cas $k=n-1$ pour une fonction convexe à droitte, par rapport à l'épi (3), sur l'intervalle $[a, b]$, chaque point $(x_0, f(x_0))$ où $x_{n-1} < x_0 \leqq b$, est accessible par un élément de l'épi (3), dont le graphe, pour $x_{n-1} < x < x_0$ este entièrement dans l'épigraphe de la fonction f. Si, en particulier $F = \mathfrak{P}_{n-1}$, cette propriété est une conséquance de l'inégalité

$$(25) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ u_1, x_0;\ f] > 0$$

qui est satisfaite dans l'hypothèse du lemme 1. On remarque donc que la propriété de convexité à droitte, par rapport à l'épi (3), sur l'intervalle $[a, b]$, dans le cas $k = n-1$, est rapprochée à la propriété de stéllarité, mais une stéllarité d'ordre suppérieur, qui pour le nombre k quelconque, $1 \leqq k \leqq n-1$, a un analogue encore plus général.

Considérons un autre cas ponticulier. Soit $n = 2$, $k = 1$ et $S(F, p_1, f)$ l'épi (3) correspondant. Si pour $x_1 < x_1' < b$, on considère aussi l'épi

$$S\left(F;\ \begin{matrix} x_1' \\ f(x_1') \end{matrix}\right) = S(F, p_1', f) \tag{26}$$

alors on peut faire l'hypothèse que la fonction f est convexe à droitte simultanément par rapport aux épis $S(F, p_1, f)$ et $S(F, p_1', f)$ sur $[a, b]$. Une conséquence est contenue dans le

LEMMÉ 2. *Si la fonction f est convexe à droitte par rapport aux épis $S(F, p_1, f)$ et $S(F, p_1', f)$, sur l'intervalle $[a, b]$ et elle est aussi convexe à gaucher par rapport à l'épi (26), sur $[a, b]$, alors elle est continue sur le point x_1'.*

La démonstration est une conséquence du lemme 1 et de la propriété interpolatoire d'ordre 1 des épis considérés, sur l'intervalle $]x_1, b]$ respectivement sur l'ensemble $]x_1, b]\setminus\{x_1'\}$.

On remarque que le problème de trouver les points de continuité des fonctions qui ont un certain comportement par rapport à un épi (3) se pose d'une façon noturelle. En effet la simple hypothèse de convexité à droitte par rapport à l'épi $S(F, x_1, f)$, sur $[a, b]$, dans le cas $n = 1$, n'entraine pas la continuité de la fonction f sur $]x_1, b]$. Un exemple simple peut démontrer la valabilité de cette affirmation.

Soit $F = \mathfrak{P}_1$, $a = 0$, $b = 4$, $x_1 = 1$. Dans ce cas l'épi

$$S\left(\mathfrak{P}_1;\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) \tag{27}$$

se réduit a l'ensemble de polinomes $\{P \in \mathfrak{P}_1 | P(1) = 0\}$. Considérons la fonction $f\colon [0, 4] \to \mathbf{R}$ dont les valeurs sont

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2) & \text{pour } 0 \leqq x < 3; \\ 10(x-2) & \text{pour } 3 \leqq x \leqq 4. \end{cases}$$

La fonction f est convexe à droitte, par rapport à l'épi (27), sur l'intervalle $[0,4]$ mais elle n'est pas continue sur cet intervalle. Elle a un discontinuité pour $x = 3$. Cette situation est explicable par le fait que la fonction f se comporte sur l'intervalle $[0,4]$ comme une fonction monoton généralisée.

Si on suppose $n \geqq 3$ et $1 \leqq k \leqq n-2$, alors on peut obtenir des proprietés plus riches. Ainsi on peut énoncer le

THEOREME 1. *Si $n \geqq 3$, $1 \leqq k \leqq n-2$ et f est convexe a droite par rapport à l'épi (3), sur $[a, b]$, alors la fonction f est continue sur l'intervalle $]x_k, b[$.*

La démonstration est semblable à celle que nous avons donnée dans [1], pour les fonctions F-convexes (F-nonconcaves, F-polynomialles, F-nonconvexes respectivement F-concave) sur l'intervalle férme, F étant interpolatoire d'ordre $n \geqq 2$ sur l'intervalle considéré.

Un théorème analogue est valable pour la convexité à gauche.

THÉOREME 2. *Si $n \geqq 3$, $1 \leqq k \leqq n-2$ et f est convexe à gauche par rapport à l'épi (3), sur $[a, b]$, alors la fonction f est continue sur l'intervalle $]a, x_1[$.*

On peut démontrer la valabilité des théorèmes analogues pour les fonctions concaves (nonconcaves, polynonialles respectivement nonconvexes à droitte par rapport à l'épi (3) et pour les fonctions concaves (nonconcaves, polynomialles, respectivement nonconvexes) à gauche par rapport à l'épi (3), sur $[a, b]$.

Il est intéressante à remarquer l'existance d'une propriétè de continuité sur $]a, b[$, pour les fonctions qui sont totalement convexes (nonconcaves, polynomialles, nonconvexes respectivement concaves) par rapport à l'épi (3), sur l'intervalle $[a, b]$.

THÉORÈME 3. *Si $n \geqq 3$, $1 \leqq k \leqq n-2$ et f est totalement convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) par rapport à l'épi (3), sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est continue sur l'intervalle $]a, b[$.*

La démonstration du théorème 3 est un peu différant de celle qui peut être donnée pour les théorèmes 1 et 2. Ici il faut démonstrer la continuité aussi sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$. On fait intervenir, pour x_i, par exemple, les deux fonction $L(F;\ u_1, u_2, \ldots, u_j, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, u_{j+1}, \ldots, u_{n-k};\ f)$ et $L(F;\ u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k, u_j, \ldots, u_{n-k};\ f)$.

La propriété de continuité contenue dans l'énoncé du théorème 3 est remarcable, les conditions imposées à la fonction f étant plus larges que celles de F-convexité (F-nonconcavité, F-polynomialité, F-nonconvexité respectivement F-concavité) sur $[a, b]$.

THÉORÈME 4. *Si la fonction f est F-convexe (F-nonconcave, F-polynomialle, F-nonconvexe respectivement F-concave) sur l'intervalle $[a, b]$, alors elle est aussi totalement convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) par rapport à l'épi (3), sur $[a, b]$.*

La démonstration est immédiate.

THÉORÈME 5. *La condition d'être totalement convexe par rapport à l'épi (3), sur $[a, b]$ n'est pas suffisante pour que la fonction f soie F-convexe sur $[a, b]$.*

On peut construire des exemples de fonctions totalement convexes par rapport à l'épi (3), sur $[a, b]$ et qui sont F-concaves sur l'intervalle $[a, x_1]$. Cette remarque est aussi une justification pour considérer des fonctions qui ont des comportements qu'on a défini dans ce travail.

4. Les comportements par rapport à l'épi (4), sans faisant aucune liaison entre les y_i et les valeurs $f(x_i)$ de la fonction f, sont plus compliqués, en comparaison avec les comportements par rapport à l'épi (3). Cette remarque reste valable même dans le cas $F = \mathfrak{P}_{n-1}$, $n \geqq 2$.

5. Dans le cas ponticulier $F = \mathfrak{L}_{n-1}$, $n \geqq 2$, l'ensemble des fonctions qui ont un des comportements précisés dans les définitions que nous avons données plus haut peut être étudie à l'aide des différences divisées en utilisant, par exemple, la linéarité des différences divisées par rapport aux fonctions f qui interviennent comme argument, les points restant fixés.

Les propriétés que nous avons définies dans ce travail ont des nombreuses applications. Beaucoups de ces applications ont à la base les diverses décompositions de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels f a des comportements différents entre eux par rapport a F.

BIBLIOGRAFIE

[1] Elena Moldovan (Popoviciu), *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate*, Studii și Cerc. St. Seria Mat. (Cluj) **VI**, 65–73 (1955).

[2] Elena Moldovan (Popoviciu), *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica (Cluj), **1(24)**, 49–80 (1959)

[3] Elena Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*. Ed. Dacia, 1972.

[4] Tiberiu Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

Reçu le 8. X. 1978.

Str. Dorobanților 40
3400 Cluj-Napoca
Roumanie