MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 8, N° 2, 1979, pp. 155–167

ÜBER EINE KONSTRUKTION VON H. SCHMIDT

von

ERNEST DANI

(Cluj-Napoca)

1. Vorbereitende Bemerkungen. H. SCHMIDT in 2 Arbeiten, — die eine 1948 [18], die andere 1966 [19] —, und L. BERNSTEIN in einer Arbeit, — die 1964 [1] erschienen ist —, haben sich mit der Konstruktion der ganzen reellen quadratischen Zahlen beschäftigt, deren regelmässiger Kettenbruch eine vorgeschriebene Form hat. So wie H. SCHMIDT in der Arbeit [19] feststellt, der erste, beziehungsweise der zweite Satz von L. Bernstein, in dem 8. Satz der Arbeit [18] erhalten ist, beziehungsweise ergibt sich durch eine analoge Konstruktion derer, durch die der Satz 8 auf Grund des Satzes 6 erhalten wurde. Die Konstruktion von H. Schmidt ist im Vergleich zu der von L. Bernstein sehr einfach. Die Bedeutung dieser Konstruktion kann aber noch besser hervorgehoben werden. Die Art, die für die Erhaltung dieses Ziels verwendet wird, ist die matrixsche Schreibweise der Kettenbrüche. In dieser Sprache erscheint die ganze Konstruktion von H. Schmidt, — eingeschlossen die Sätze, auf die sie sich stützt —, in einer Form, welche in einer ganz natürlichen Weise den Inhalt ausdrückt.

Der Teilnenner q wird durch die Matrix

$$(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}$$

ausgedrückt und folglich stellt die Matrix

$$X = (q_1) \ldots (q_n) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

den Kettenbruch dar, der als Teilnenner die ganzen Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ hat.

Der Kettenbruch X wird in den gemeinen Bruch $f(X) = x_{22} : x_{12}$ abgebildet. Wenn $q_2, \ldots, q_n$ positive Zahlen sind, dann stellt X einen regelmässigen Kettenbruch dar, in welchem sich die rationale Zahl $f(X)$ entwickelt. In diesem Fall finden die Ungleichheiten $0 \leqslant x_{11} \leqslant x_{12}$, $X = (q)$ für $x_{11} = 0$ und $x_{21} < x_{22}$ für $x_{11} = x_{12} = 1$ statt.

Gemäss den Vorigen ist das unendliche Produkt $X_1 \ldots X_n \ldots$ das Symbol eines unendlichen Kettenbruches. Man nimmt ohne Beweis den folgenden Satz an: wenn X_1 ein regelmässiger Kettenbruch ist und X_n, $n \geqslant 2$, Kettenbrüche mit dem ersten Teilnenner positiver Zahlen sind, natürliche Kettenbrüche genannt, dann existiert

$$\lim_{n \to \infty} f(X_1 \ldots X_n)$$

und ist gleich mit einer irrationalen Zahl ξ.

Im einzelnen, wenn $X_n = X_1$ für alle Indizen n, dann ist das unendliche Produkt $X \ldots X \ldots$ eine unendliche Potenz, welche abgekürzt durch das Symbol X^∞ bezeichnet wird. Gemäss dieser Bezeichnung stellt der Ausdruck

$$AB^\infty, \tag{2}$$

wo A ein regelmässiger Kettenbruch und B ein natürlicher Kettenbruch ist, einen periodischen unendlichen regelmässigen Kettenbruch mit der Vorperiode A und der Periode B dar (A kann auch das leere Symbol sein; A und B werden im allgemeinen nicht mit minimaler Länge angenommen).

Die Menge der ganzen Kettenbrüche bildet eine Gruppe Γ, welche identisch mit der Faktorgruppe der Gruppe der Matrizen zweiten Grades mit ganzen Zahlen als Elementen und mit der Norm $N(X) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ gleich -1 oder 1 im Bezug zum Zentrum ist; die Menge der natürlichen Kettenbrüche bildet eine Halbgruppe Δ, mit eindeutiger kanonischer Zerlegung in ein Produkt von Primfaktoren [5]. Die Menge der endlichen und unendlichen Kettenbrüche von vorher bildet ein Halbgrupoid in welchem das Produkt XY nur dann definiert ist, wenn X ein endlicher Kettenbruch ist.

Die vorgeführte matrixsche Bezeichnung, zum Teil auch in den Arbeiten [3] — [5] angewendet, unterscheidet sich nur der Form nach, nicht auch dem Inhalt nach, von der gewöhnlichen in der Literatur verwendeten. In dieser Richtung kann man z.B. einige Stellen aus der Arbeit [18] von H. SCHMIDT (S. 174 und 180) und das Buch [12] von H. HASSE angeben. Aus den Sprachen, — der Erscheinung nach nichtmatrixsche, welche man aber leicht in die matrixsche übersetzen kann —, ist es wichtig, die von B. DERASIMOVIĆ in einer Reihe von Arbeiten [6] — [10] u. a. verwendete, zu erwähnen. Der Verfasser führt eine neue Symbolik ein [6] die aus „geordneten Komplexen" gebildet ist und die man in Matrizen übersetzt und den Operator „|" [7] welcher in den Ausdruck „.I." übersetzt wird wo „." der Operator der Multiplikation der Matrizen und

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

die partikuläre Matrix ist, deren Rolle in der Theorie der unimodularen Matrizen hervorgehoben ist [13, S.18]. Die Problematik der Verbindung zwischen dem Aspekt des Ausdruckes X und der Funktion $f(X)$ der Kettenbrüche ist von C. P. POPOVICI in der Arbeit [16] untersucht worden.

2. Die Erhebung zur Potenz der Matrizen zweiten Grades. Die Ausrechnung der Potenzen B^n der Periode B (2) ist nur eine der Anwendungen der Erhebung zur Potenz der Matrizen in der Theorie der Kettenbrüche. Die Formel für die Potenzen der Matrizen beliebigen Grades wurde von O. PERRON [14], V. LEHRER [17] und C. REISCHER-HAIMOVICI — V. TAMAŞ [17] abgeleitet. Im Falle der Matrizen zweiten Grades wenigstens, — und in der vorliegenden Arbeit interessieren uns nur diese und auch von diesen nur die mit Norm -1 oder 1 —, kann man eine Formel auf einem viel einfacheren Weg ableiten als die allgemeinen, der bisher angeführten Autoren.

Die Matrix (1) mit der Spur $S(X) = x_{11} + x_{22}$ kann man in der Form

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u - bv & av \\ cv & \frac{1}{2}(u + bv) \end{bmatrix} \tag{3}$$

schreiben, wo $u = S(X)$ und v irgend ein gemeinsamer Teiler der Zahlen $x_{22} - x_{11}$, x_{12} und x_{21} ist (man kann $v > 0$ voraussetzen). Man hat die Form (3) der Matrix (1) gewählt, weil sie zugänglicher in der Theorie der arithmetischen quadratischen Formen und in der Theorie der Kettenbrüche ist (siehe z.B. die Arbeiten [11, S.151], [13, S.80], [9] und [5]). Weiter bezieht sich die Diskussion auf den Fall, wenn die Zahl $D = b^2 + 4ac$, genannt die Diskriminante der Matrix X, verschieden von einem Quadrat ist. Der Matrix (3) kann man die Einheit

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{D})$$

der quadratischen Ordnung der Diskriminante D assoziieren. Es finden die Gleichheiten $S(\varepsilon) = S(X)$ und $N(\varepsilon) = N(X)$ statt. Mehr noch als soviel. Man prüft durch Rechnen folgenden, im Grunde zu Lagrange gehörend, und ganz von Legendre behandelten Satz ([15, S.103], [13, S.85] und [12, S.331—333]):

2.1. Die zyklische Gruppe der Matrizen X^n, n ganz, ist izomorph mit dem der Einheiten ε^n.

Die gestattete Eigenschaft erlaubt eine beliebige Potenz

$$X^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_n - bv_n) & av_n \\ cv_n & \frac{1}{2}(u_n + bv_n) \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 1, \tag{4}$$

der Matrix X, — die Ausdrücke

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{[n:2]} C_n^{2i} u^{n-2i} v^{2i} D^i,$$

$$v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{[(n-1):2]} C^{2i+1} u^{n-2i-1} v^{2i+1} D^i,$$

anwendend, die man durch die Erhebung zur Potenz

$$\varepsilon^n = \frac{1}{2}\,(u_n + v_n\sqrt{D})$$

der Einheit ε erhalten hat, zu schreiben.

Gemäss der Rekurrenzrelation $\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n \varepsilon$ erhält man die einfacheren Ausdrücke

$$\begin{aligned} u_n &= F_{n+1}(u, v, D) + tF_{n-1}(u, v, D), \\ v_n &= F_n(u, v, D), \end{aligned} \tag{5}$$

wo $t = -N(X)$ ist und

$$F_n(u, v, D) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{[n:2]} C^{2i+1} u^{n-2i-1} v^{2i} D^i, \quad n \geqslant 1, \tag{5'}$$

oder, wie man in [17] zeigt, noch $F_n(u, v, D) = F(u, t)$,

$$F_n(u, t) = \sum_{i=0}^{[(n-1):2]} C_{n-i}^{i} u^{n-2i-1} t^i, \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

welche die Rekurrenzrelation

$$\begin{aligned} &F_0(u, t) = 0, \ F_1(u, t) = 1, \\ &F(u, t) = uF_{n-1}(u, t) + tF_{n-2}(u, t), \quad n \geqslant 2, \end{aligned} \tag{6'}$$

erledigt.

Von dem bisher Festgelegten folgt, dass für die Potenz X^n, neben den Formeln (4), (5) und (5'), noch die Formel

$$X^n = \begin{bmatrix} x_{11}F_n(u, t) + tF_{n-1}(u, t) & x_{12}F_n(u, t) \\ x_{21}F_n(u, t) & x_{22}F_n(u, t) + tF_{n-1}(u, t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

stattfindet, wo $F_n(u, t)$ die Formel (6) von Schwatt [17] benützend ausgerechnet wird.

In Verbindung mit der Erhebung zur Potenz der Matrizen zweiten Grades mit $N(X) = -1$ oder 1 kann man einige Bemerkungen machen. Jeder Matrix X kann man irgend eine natürliche Zahl, gerade für $N(X) = 1$ und ungerade für $N(X) = -1$, sowie eine Matrix (q) assoziieren, wo q eine algebraische Zahl ist, bestimmt durch die Relation $S((q)^m) = S(X)$. So kann die Funktion $F_n(u, t)$ mit Hilfe der Funktion $F_{nm}(q, -1)$ ausgedrückt werden. Diese Möglichkeit war von H. SCHMIDT [19] und L. BERNSTEIN [1] für den Fall der Matrix $X = (a)(b)$ angewendet worden (die Bedeutung der Buchstaben a und b ist aus den angeführten Arbeiten ersichtlich), also $u = ab + 2$, wenn $q = \sqrt{ab}$. Ebenfalls, jeder Matrix X mit $N(X) = 1$ kann man eine beliebige Zahl m und eine Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q \end{bmatrix}$$

assoziieren, wo q auf Grund der Relation $S(Q^m) = S(X)$ bestimmt wird. So kann die Funktion $F_n(u, -1)$ durch die Funktion $F_{nm}(q, -1)$ ausgedrückt werden, m beliebig. Die beiden Verbindungsrelationen für $m = 1$ ergeben uns die einfachsten Matrizen, deren Potenzen die Funktion $F_n(u, t)$ enthalten. Sie sind jedoch für $m \geqslant 2$ nicht mehr einfach, weil q im allgemeinen nicht mehr eine ganze Zahl ist.

3. Die Entwicklung in regelmässigen Kettenbruch der reellen quadratischen Zahlen. Die Verbindung der Matrizen (3) mit den arithmetischen quadratischen Formen und den regelmässigen Kettenbrüchen (2), in die sich die reellen quadratischen Zahlen ξ entwickeln, ist bekannt. In dieser Hinsicht kan man z.B. die entsprechenden Stellen in den Büchern von DIRICHLET [11, S.189], SCHOLZ [20, S.105], HASSE [12, S.331—333] und NEISS [13, S.95—102] erwähnen. Diese Verbindung wurde aber erst von B. DERASIMOVIC (siehe vor allem [9] den Auszug) gänzlich geklärt. Der Satz von B. Derasimovic, in einer äquivalenten Formulierung, kann man in folgender Weise aussprechen:

3.1. *Zwischen der Menge der Matrizen der Form $X \sim ABA^{-1}$(3) und der Menge der reellen quadratischen Zahlen*

$$\xi = \frac{b + \alpha\sqrt{D}}{2a} \tag{8}$$

$\alpha = \operatorname{sgn} u$, *gibt es eine eineindeutige Korrespondenz und der entsprechende regelmässige Kettenbruch kann in der Form* (2) *geschrieben werden.*

Der Satz ist äquivalent mit einem der folgenden Sätze: der von LAGRANGE [16, S.73—74] in Bezug auf die Periodizität der regelmässigen Kettenbrüche, in denen sich die reellen quadratischen Zahlen entwickeln; der von GAUSS [11, S. 178, S. 190] über die Endlichkeit der Klassen der arithmetischen quadratischen Formen positiver Diskriminante; der von DIRICHLET ([20, S. 111] und [2, S. 152]) über die Existenz der der von 1 und —1 verschiedenen Einheiten ε in den reellen quadratischen Körpern, wenn man gleichzeitig auch den Satz der Existenz der Zerlegung der Form $X \sim ABA^{-1}$ der Matrix X verwendet, so dass A ein regelmässiger Ket-tenbruch und B ein natürlicher Kettenbruch sei (unabhängige Beweise von der Theorie der arithmetischen quadratischen Formen und der (unendlichen) Kettenbrüche wurden in den Arbeiten [13], [4] und [5] gegeben). Der Beweis des Satzes, den B. Derasimovic gegeben hat, stützt sich auf den Satz von Lagrange. An dieser Stelle wird ein Beweis gegeben, der die Existenz der Einheit ε und die Zerlegung $X \sim ABA^{-1}$ verwendet. Die Nützlichkeit eines solchen Beweises ist nicht nur eine theoretische, sonder auch eine praktische, der die Aussprache folgenden Ergebnisses erlaubt:

3.2. *Die reellen quadratischen Zahlen können in einen regelmässigen Kettenbruch mit Hilfe der Tafel der Einheiten* [2, S. 553] *und der Reduktionstafel der Matrizen X* [5] *(siehe auch* [4]) *entwickelt werden.*

Jede Matrix X (3) mit der Diskriminante $D > 0$, D verschieden von einem Quadrat, kann in der Form $X \sim ABA^{-1}$ geschrieben werden. So ist die eineindeutige Korrespondenz zwischen den reellen quadratischen Zahlen (8) und den Matrizen X (3) gezeigt. Erhebt man X zur n-ten Potenz, erhält man die Matrix X^n (4). Gleichzeitig ist $X^n = AB^nA^{-1}$. Wenn man berücksichtigt, dass sich aus $u_n^2 - Dv_n^2 = 4N(X^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \alpha\sqrt{D}$$

ergibt, kann man die Reihe der Gleichheiten

$$\xi = \lim_{n\to\infty} f(AB^n) = \lim_{n\to\infty} f(AB^nA^{-1}) = \frac{b + \alpha\sqrt{D}}{2a}$$

schreiben, welche durch nachrechnen überprüfbar ist, und, folglich ξ entwickelt sich in einen regelmässigen Kettenbruch (2), assoziiert sich die Matrix X (3) zu und hat die Form (8).

4. Die Entwicklung in einen regelmässigen Kettenbruch der ganzen reellen quadratischen Zahlen. Die ganzen reellen quadratischen Zahlen charakterisieren sich durch eine charakteristische Form des entsprechenden regelmässigen Kettenbruches. Unter den Sätzen, die sich mit dem stu-dierten Problem verbinden kann man in erster Reihe den von GALOIS [16, S. 83] erwähnen, im Bezug auf die Verbindung des regelmässigen Kettenbruches der konjugierten reellen quadratischen Zahl $\bar{\xi}$ mit dem regelmässigen Kettenbruch von ξ. Ebenfalls muss der Satz von LEGENDRE [16, S. 87] erwähnt werden, in Bezug auf die Form des regelmässigen Kettenbruches der Zahl $\sqrt{D}$, D ganz. Der Satz von Galois wurde von SERRET [16, S. 85] und von B. DERASIMOVIĆ [10] verallgemeinert. Der Satz von Legendre wurde von H. SCHMIDT [18] für die ganzen quadratischen Zahlen (8) mit $\alpha = 1$ verallgemeinert. Die beiden Sätze zusammen erlauben, die Form der ganzen reellen quadratischen Zahlen (8) mit

$\alpha = -1$, festzulegen. Das Model für die matrixsche Lösung des Problems der Bestimmung der Form des regelmässigen Kettenbruches, in welchen sich die ganzen reellen quadratischen Zahlen ξ entwickeln, auf Grund des Satzes 3.1., bildet der von B. Derasimović gegebene Aufbau, der die reellen quadratischen Zahlen ξ, welche die Gleichung $s\xi^2 - r = 0$, beziehungsweise $4s\xi^2 - 4s\xi + (s - r) = 0$, erledigen, [9, S. 277–279], angenommen hat. Man unterscheidet zwei Schritte der Entwicklung: die kanonische Zerlegung [5] der Matrix XI, die der reellen quadratischen Zahl ξ assoziiert ist durch die Einheit ε, und die Reduktion der Matrix XI. Bei dem zweiten Schritt kann man die Reduktionstafel [5] (siehe auch [4]) verwenden. In dieser Stelle, weil eine ganze Kategorie von Kettenbrüchen gegeben ist, ist es einfacher, die beiden Schritte nicht zu trennen, sondern sie kombiniert anzuwenden.

Es soll am Anfang $u > 0$. Für $b \equiv 0 \bmod 2$ bestimmt man direkt für die Matrix X (3), wo jetzt $a = 1$ annimmt, eine Zerlegung der Form

$$X \sim \left(\frac{b}{2}\right)(0)S^*\left(\frac{b}{2}\right)^{-1},$$

wo

$$S^* = \begin{bmatrix} v & \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u & \frac{Dv}{4} \end{bmatrix}$$

ein natürlicher Kettenbruch ist, welcher der Halbgruppe Δ[5] angehört, jedwelcher der Wert von $D \equiv 0 \bmod 4$ wäre. Weil $v \neq 0$, folgt, dass S^* wenigstens zwei Primfaktoren hat, also $S^* = (q^*)S(q^*)$, wo S auch das leere Symbol sein kann, und, folglich

$$X \sim \left(\frac{b}{2} + q^*\right)S(2q^*)\left(\frac{b}{2} + q^*\right)^{-1}.$$

Für $b \equiv 1 \bmod 2$ findet die Gleichheit

$$X \sim \left(\frac{b+1}{2}\right)(0)\,S^*(0)(1)\left(\frac{b+1}{2}\right)^{-1}$$

statt, wo

$$S^* = \begin{bmatrix} v & \frac{u-v}{2} \\ \frac{u-v}{2} & \frac{Dv - 2u + v}{4} \end{bmatrix}$$

mit Ausnahme des Falles $D = 5$, wenn $S^* = E$, eine der Halbgruppe Δ angehörende Matrix ist, für jede $D \equiv 1 \bmod 4$. So, wie vorher, erhält man

$$X \sim \left(\frac{b+1}{2} + q^*\right) S(2q^* + 1) \left(\frac{b+1}{2} + q^*\right)^{-1}, \quad q^* \geqslant 0.$$

Als Schlussfolgerung ergibt sich der Satz von Legendre, welchen, in der Verallgemeinerung von H. SCHMIDT [18, S. 176], man folgendermassen formulieren kann:

4.1. *Für jede ganze reelle quadratische Zahl*

$$\xi = \frac{1}{2}(b + \sqrt{D})$$

der regelmässige Kettenbruch hat die Vorperiode (nicht unbedingt die Kürzeste) aus einem einzigen Teilnenner (b_0) *gebildet, wo*

$$b_0 = \frac{1}{2}(b + q),$$

$b \equiv q \bmod 2$, *und die Periode ist von der Form*

$$\mathrm{B} = S(q),$$

wo S *ein symmetrischer Kettenbruch oder das leere Symbol ist.*

Die Symmetrie bedeutet $S = S^{\tau}$, wo τ das Symbol der Transposition der Matrizen ist.

Es sei jetzt $u < 0$. Man kann

$$X(u < 0) \sim X^{-1}(u > 0) \sim (b_0)I(q)S[(b_0)I]^{-1}$$

schreiben.

Die Äquivalenz $(q')I(q'')(q''') \sim (q' - q'' - 1)(1)(q''' - 1)$ benützend, und mit ρ die zyklische Permutation der Faktoren [5] bezeichnend, kann man folgenden Satz formulieren, welcher in dem von B. DERASIMOVIĆ [10] verallgemeinerten Satz von Galois enthalten ist:

4.2. *Für jede ganze reelle quadratische Zahl*

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2}(b - \sqrt{D})$$

der entsprechende regelmässige Kettenbruch hat die Vorperiode aus zwei, $(\bar{b}_0)(\bar{b}_1)$, *beziehungsweise drei,* $(b_0)(1)(b_2)$, *Faktoren gebildet, wo*

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{2}(b - q - 2),$$

$$\bar{b}_1 = \begin{cases} q + 1 \text{ für } B = (1) \text{ oder } B = (1)(q), \\ q_2 + 1 \text{ für } B = S(q),\ S = (1)(q_2)\ldots, \end{cases}$$

$$\bar{b}_2 = \begin{cases} q - 1 \text{ für } B = (q),\ q \geqslant 2, \\ q_1 - 1 \text{ für } B = S(q),\ S = (q_1)\ldots,\ q_1 \geqslant 2, \end{cases}$$

und die Periode ist der Form B^{ρ^2}, *beziehungsweise* B^{ρ}.

5. Die Bestimmung aller ganzen reellen quadratischen Zahlen mit positiver Differente, $\xi > \bar{\xi}$, für den der symmetrische Teil S des regelmässigen Kettenbruches gemeinsam ist. Man schreibt

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s \\ s & s_2 \end{bmatrix},$$

und für die Matrix $X \sim (b_0)S(q)(b_0)^{-1}$ erhält man die Ausdrücke

$$S(q) = \begin{bmatrix} s & s_1 + sq \\ s_2 & s + s_2 q \end{bmatrix},$$

$$X \sim \begin{bmatrix} -b_0 s_2 + s + s_2 q & s_2 \\ -b_0^2 s_2 + b_0 s_2 q + sq & s + b_0 s_2 \end{bmatrix},$$

von wo, in Betracht ziehend, dass die Verbindung $x_{22} - x_{11} = bs_2$ erledigt ist, die Kongruenz

$$-b_0^2 s_2 + b_0 s_2 q + s_1 + sq \equiv s_1 + sq \equiv 0 \bmod s_2$$

zu überprüfen bleibt.

Man multipliziert die letzte Kongruenz mit $sN(S)$, welches eine zu s_2 relative Primzahl ist, und, in betracht ziehend, dass $s^2 \equiv N(S) \bmod s_2$, folgt

$$s_1 s N(S) - q \equiv 0 \bmod s_2.$$

Die Diskriminante D wird aus dem Produkt $S(q)$ bestimmt:

$$s_2^2 D = (2s + s_2 q)^2 + 4s_2(s_1 + sq).$$

Folglich ergibt sich die Eigenschaft, gekannt schon von Euler, wiederentdeckt von MUIR und K. E. HOFFMANN [16, p. 98], welche, in der Verallgemeinerung von H. SCHMIDT [18] folgendermassen formuliert werden kann:

5.1. *Jede ganze reelle quadratische Zahl* ξ *mit positiver Differente,* $\xi > \bar{\xi}$, *deren regelmässiger Kettenbruch durch den Satz 4.1. bestimmt ist, für* S *fix, ist durch folgende Werte charakterisiert:*

(9) $$q = N(S)ss_1 + ms_2,$$

wo m *so gewählt wird, dass die Ungleichheit* $q \geqslant 1$ *erfüllt wird, und*

(10) $$D = q^2 + 4N(S)ss_1 + ms_2.$$

6. Die Bedeutung der Konstruktion von H. Schmidt. Die Buchstaben a und b werden in den Folgenden gemäss der Arbeiten [19] und [1] benützt. Am Anfang werden in der matrixschen Sprache die beiden Sätze von H. Schmidt und L. Bernstein wiedergegeben.

Im Falle

$$S = (a)^n,$$

gemäss der Formel (7), wenn man die Relation (6') in Betracht zieht, erhält man

$$S = \begin{bmatrix} F_{n-1}(a, 1) & F_n(a, 1) \\ F_n(a, 1) & F_{n+1}(a, 1) \end{bmatrix}$$

und folglich kann man in den Formeln (9) und (10) die Elemente s_1, s und s_2 durch die entsprechende Ausdrücke

$$s_1 = F_{n-1}(a, 1), \quad s = F(a, 1), \quad s_2 = F_{n+1}(a, 1)$$

ersetzen, und es ergibt sich der Satz 8 von H. SCHMIDT [18, S. 184). Dieser Satz wurde von L. BERNSTEIN, auf eine andere Weise, nochmals bewiesen [1].

Für

$$S = S_1^n(a), \; S_1 = (a)(b),$$

erhält man in gleicher Weise

$$S_1^n(a) = \begin{bmatrix} bF_n(ab + 2, -1) & F_{n+1}(ab + 2, -1) - F_n(ab + 2, -1) \\ F_{n+1}(ab + 2, -1) - F_n(ab + 2, -1) & aF_{n+1}(ab + 2, -1) \end{bmatrix}$$

also

$$s_1 = bF_n(ab + 2, -1),$$
$$s = F_{n+1}(ab + 2, -1) - F_n(ab + 2, -1)$$
$$s_2 = aF_{n+1}(ab + 2, -1).$$

In Betracht ziehend, dass für $T = (\sqrt{ab})$ man

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & ab + 1 \end{bmatrix}$$

erhält, folglich

$$T^{2n} = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(\sqrt{ab}, 1) & F_{2n}(\sqrt{ab}, 1) \\ F_{2n}(\sqrt{ab}, 1) & F_{2n+1}(\sqrt{ab}, 1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F_n(ab + 2, -1) - F_{n-1}(ab + 2, -1) & \sqrt{ab}F_n(ab + 2, -1) \\ \sqrt{ab}F_n(ab + 2, -1) & F_{n+1}(ab + 2, -1) - F_n(ab + 2, -1) \end{bmatrix},$$

also

$$F_{2n}(\sqrt{ab}, 1) = \sqrt{ab}F_n(ab + 2, -1),$$
$$F_{2n-1}(\sqrt{ab}, 1) = F_n(ab + 2, -1) - F_{n-1}(ab + 2, -1).$$

So können die Elemente s_1, s und s_2 auch in der Form

$$s_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}\, F_{2n}(\sqrt{ab}, 1),$$
$$s = F_{2n+1}(\sqrt{ab}, 1),$$
$$s_2 = \sqrt{\frac{a}{b}}\, F_{2n+2}(\sqrt{ab}, 1),$$

geschrieben werden, und, mit den Formeln (9) und (10) ersetzt, ergibt sich der zweite Satz von L. BERNSTEIN [1].

H. SCHMIDT, den Satz von L. Bernstein nochmals beweisend, hat gezeigt, dass die Bedingung, b dividiert a, nicht wesentlich ist [19]. Gleichzeitig hat er die Tatsache unterstrichen, dass man beide Sätze in gleicher Weise erhalten kann, auf Grund des Satzes 6 der Arbeit [18], welcher in der vorliegenden Arbeit durch die Eigenschaft 5.1. gezeigt ist.

Die matrixsche Bezeichnung der Kettenbrüche zeigt, dass die beiden Sätze nichts anderes als die Lösungen von zwei partikulären Problemen sind, durch die Konstruktion von H. Schmidt gelöst, deren eigentliche Bedeutung in der Lösung, — auf Grund der Sätze 4.1. und 5.1., durch die Formel des Erhebung zur Potenz der Matrizen (7) —, folgenden allgemeinen Problems entsteht:

6.1. *Man soll die ganzen reellen quadratischen Zahlen mit positiver Differente bestimmen, $\xi > \bar{\xi}$, für welche der symmetrische Teil der Periode des regelmässigen Kettenbruches von der Form*

$$S = \prod_{i=1}^{r} S_i^{n_i} \tag{11}$$

ist.

Aus allen Schreibweisen der Form (11) einer Matrix S sucht man die, für welche die Exponenten n die möglichst grössten sind. So in den betrachteten Fälle von H. Schmidt und L. Bernstein kann man $S_1 = (a)$, $r = 1$, beziehungsweise $S_1 = (a)(b)$, $n_1 = n$, $S_2 = (a)$, $r = 2$, nehmen.

Wir betrachten ein anderes Beispiel als das vorige.

Es sei $S_1 = (e)(f)(e)$, $r = 1$. Man kann

$$S_1 = \begin{bmatrix} f & ef + 1 \\ ef + 1 & e^2f + 2e \end{bmatrix}$$

schreiben, und

$$S = \begin{bmatrix} fF_n(u, 1) + F_{n-1}(u, 1) & (ef + 1)\, F_n(u, 1) \\ (ef + 1)\, F_n(u, 1) & F_{n+1}(u, 1) - F_n(u, 1) \end{bmatrix},$$

wo $u = e^2f + 2e + f$, also die gesuchte ganze reelle quadratische Zahl, deren regelmässiger Kettenbruch der Form $A = (b_0)$, $B = S(q)$ ist, gemäss der Konstruktion von H. Schmidt, von der Form

$$\xi = \frac{1}{2}(b + \sqrt{D}),$$

sein wird, wo

$$b = 2b_0 - q,$$

$$D = q^2 + 4N(S)(fF_n(u, 1) + F_{n-1}(u, 1))^2 + 4m(ef + 1)F_n(u, 1)$$

$$q = N(S)(ef + 1)F_n(u, 1)(fF_n(u, 1) + F_{n-1}(u, 1)) + \\ + m(F_{n+1}(u, 1) - vF_{n-1}(u, 1)).$$

Z.B. für $e = 1$, $f = 2$, $m = 2$, $b_0 = 1$, $m = 0$, kann man $u = 6$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 6$, $F_3 = 37$, $q = 234$ schreiben, und folglich $b = -232$, $D = 55432$, also

$$\xi = -116 + \sqrt{13858}.$$

Der regelmässige Kettenbruch hat die Vorperiode (1) und die Periode (1)(2)(1)(1)(2)(1)(234), was durch Rechnen überprüft wird. Gleichzeitig, gemäss dem Satz 4.2., ergibt sich, dass die konjugierte ganze reelle quadratische Zahl

$$\xi = -116 - \sqrt{13858},$$

die Vorperiode (−234)(3) und die Periode (1)(1)(2)(1)(234)(1)(2) hat.

Es ist klar, dass dieses Ergebniss mit denen, die durch die Sätze von H. Schmidt und L. Bernstein bestimmt wurden, analog ist. Weil solche Ergebnisse in unendlicher Art und Weise abgeleitet werden können, ist es nicht der Fall, dass man einen neuen Satz aufstellt. Hervorzuheben ist nur, dass die Konstruktion von H. Schmidt angewendet werden kann, welches immer die konkrete Form der Matrix (11) sei.

LITERATUR

[1] Bernstein, L., *Periodische Kettenbrüche beliebiger Periodenlänge*. Math. Zeitschr. **86**, 128–135 (1964).

[2] Borevič, Z. I. – Safarevič, I. R., *Teorija čisel*. Izd. Nauka, Moskva, (1964).

[3] Dani, E., *Konečnye nepreryvnye drobi* (I). *Jadro nepreryvnoi drobi*. Studia Univ. Babeş–Bolyai, Ser. Math. – Phys., fasc. 2, 7–13 (1966).

[4] — *Konečnye nepreryvnye drobi* (II). *Celye nepreryvnye drobi*. Studia Univ. Babeş–Bolyai, Ser. Math. – Phys., fasc. 2, 7–16 (1967).

[5] — *Über zweireihlige ganzzaheige Matrizen (Reduktionstafel)*, Mathematica, **14(37)**, *1*, pp. 33–48 (1972).

[6] Derasimović, B., *Beitrag zur Theorie der regelmässigen Kettenbrüche*. Math. Zeitschr., **62**, 320–329 (1955).

[7] — *Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen*. Math. Zeitschr. **66**, 228–239 (1956).

[8] — *Über die binären quadratischen Formen*. Math. Zeitschr. **66**, 328–340 (1957).

[9] — *O verižnim reprezentacijama realnih i nekih kompleksnih kvadratnih irrationalnih brojeva*. Matematički Vesnik, **1(16)**, 267–283 (1964).

[10] — *Proširenje teoreme Galois o periodičnim verižnim razlomcima*. Matematicki Vesnik, **3(18)**, 119–122 (1966).

[11] Dirichlet, L., *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig, (1894).

[12] Hasse, H., *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Berlin, (1950) (russische Übersetzung).

[13] Neiss, F., *Einführung in die Zahlentheorie*. S. Hirzel, Leipzig, (1952).

[14] Perron, O., Zur Theorie der Matrizen. Math. Ann. 64 (1907).

[15] — *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, (1913).

[16] Popovici, C. P., *Aspectul de expresii şi de funcţii al fracţiilor continue*. An. Univ. Bucureşti, Ser. Ştiin. natur. Mat. – Mec., **14**, n *1*, 29–38 (1965).

[17] Reischer–Haimovici, C. – Tamaş, V., *Asupra şirurilor recurente*. An. şt. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, Mat. t. X., fasc. *1* (1964).

[18] Schmidt, H., *Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen*. Math. Zeitschr., **52**, 168–191 (1949).

[19] — *Zur Ermittlung reeller quadratischer Zahlen aus dem symmetrischen Anteil der Kettenbruchperiode*. Math. Zeitschr., **96**, 58–61 (1967).

[20] Scholz, A., *Einführung in die Zahlentheorie*. 87–113, Sammlung Göschen Band **1131**, W. de Gruyter u.G., Berlin und Leipzig (1939).

Received 3. III. 1977