MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 8, N° 2, 1979, pp. 169—175

# „BONNES" ET „MAUVAISES" FONCTIONS-POIDS

par
P. GOETGHELUCK
(Paris)

## 1. Notations

Soit $I$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et $w$ une fonction-poids sur $I$, c'est à dire une fonction mesurable, réelle, bornée et presque partout strictement positive sur $I$.

On pose $L_w^2(I) = \{f \mid f \cdot w \in L^2(I)\}$ muni de la structure hilbertienne évidente.

On désigne par $H_n$ l'espace des polynômes de degré au plus $n$. Pour $f \in L_w^2(I)$ on note $d_{L_w^2(I)}(f, H_n) = \operatorname*{Inf}_{P \in H_n} \|f - P\|_{L_w^2(I)}$.

On désigne par $S$ l'espace des suites $(a_n)$ qui vérifient : pour tout entier $p$ la suite $(n^p a_n)$ tend vers 0.

On dira que $w$ est une bonne (Resp. mauvaise) fonction-poids sur $I$ si la propriété suivante est vraie (Resp. fausse) :

Pour $f \in L_w^2(I)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est égale presque partout à une fonction de $C^\infty(\bar{I})$.

(ii) $(d_{L_w^2(I)}(f, H_n))_{n \in \mathbf{N}} \in S$.

## 2. Conditions suffisantes pour que $w$ soit une bonne fonction-poids

LEMME 1. *S'il existe trois constantes $N$, $C$, $\alpha$, telles que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $P \in H_n$, on ait :*

$$\|P\|_{L^\infty(I)} \leq C\, n^\alpha \|P\|_{L_w^2(I)},$$

*alors $w$ est une bonne fonction-poids sur $I$.*

*Démonstration.* (i) $\Rightarrow$ (ii). L'hypothèse (i) entraîne d'après [1] qu'il existe une suite de polynômes $(R_n)$, telle que $R_n \in H_n$ et que

$$(\|f - R_n\|_{L^2(I)})_{n \in \mathbf{N}} \in S.$$

On a alors

$$d_{L^2_w(I)}(f,\ H_n) \leqslant \|(f - R_n)w\|_{L^2(I)} \leqslant C_1\|f - R_n\|_{L^2(I)},$$

ce qui implique la condition (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Réciproquement, soit $f$ vérifiant la condition (ii). Soit $\{P_n\}$ la famille des polynômes orthonormaux de $L^2_w(I)$. Nous pouvons écrire:

$$f = \sum_0^\infty (f,\ P_n)\ P_n = \sum_0^\infty a_n P_n \qquad (\text{dans } L^2_w(I))$$

et

$$(d_{L^2_w(I)}(f,\ H_n))_{n \in \mathbf{N}} = \left(\left(\sum_{n+1}^{\infty} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{n \in \mathbf{N}} \in S,$$

ce qui est équivalent à dire que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S$.

L'hypothèse du lemme et l'inégalité de Markov montrent donc que les séries $\sum\limits_0^\infty a_n P_n^{(k)}$ sont normalement convergentes sur $I$ pour tout entier $k$.

La série $\sum\limits_0^\infty a_n P_n$ converge donc uniformément sur $\bar{I}$ vers une fonction $g \in C^\infty(I)$ et il est clair que $f = g$ presque partout.

LEMME 2. *Pour que $w$ soit une bonne fonction-poids sur $I$, il suffit qu'il existe un polynome $P \not\equiv 0$ tel que pour presque tout $x$ dans $I$ on ait $|P(x)| \leqslant w(x)$.*

*Démonstration.* D'après [2] l'hypothèse de ce lemme implique l'inégalité du lemme 1.

Nous allons maintenant considérer deux fonctions-poids particulières qui ne vérifient pas la condition suffisante du lemme 2:

$$w_1(x) = |\sin\ (x^{-1})| \qquad \text{sur } [0,\ \pi^{-1}],$$

$$w_2(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) \qquad \text{sur } [-1,\ +1].$$

Le but de cet article est de démontrer que $w_1$ est une bonne fonction-poids et que $w_2$ est une mauvaise fonction-poids, ce qui montrera en particulier que la condition suffisante du lemme 2 n'est pas nécessaire.



## 3. Résultats préliminaires

LEMME 3. ([5] page 182). *Soit $I$ un intervalle borné de longueur $l$. Pour tout $P \in H_n$ on a:*

$$\|P\|_{L^\infty(I)} \leqslant l^{-\frac{1}{2}}(n + 1)\ \|P\|_{L^2(I)}.$$

LEMME 4. (Conséquence immédiate de l'inégalité de Markov) ([4] p. 141). *Soit $I$ un intervalle borné de longueur $l$. Pour tout $P \in H_n$ on a*

$$\|P'\|_{L^\infty(I)} \leqslant 2l^{-1}n^2\ \|P\|_{L^\infty(I)}.$$

LEMME 5. *Soit $I$ un intervalle borné de longueur $l$ et $a \in \bar{I}$. Pour tout $P \in H_n$ on a:*

$$\|P\|_{L^\infty(I)} \leqslant 2l^{-1}(n + 1)^2\ \|(x - a)\ P\|_{L^\infty(I)}.$$

*Démonstration.* Posons $Q(x) = (x - a)\ P(x)$. Pour tout $x \in \bar{I}$, il existe $c \in I$ tel que $Q(x) = Q(a) + (x - a)\ Q'(c)$, c'est à dire $P(x) = Q'(c)$, donc $\|P\|_{L^\infty(I)} \leqslant \|Q'\|_{L^\infty(I)}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 4.

LEMME 6. ([3] p. 43). *Soit $I$ un intervalle borné, $h > 1$, et $I(h)$ l'intervalle obtenu à partir de $I$ par une homothétie de centre le milieu de $I$ et de rapport $h$. Pour tout $P \in H_n$ on a:*

$$\|P\|_{L^\infty(I(h))} \leqslant \left(h + (h^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^n \|P\|_{L^\infty(I)}.$$

## 4. Etude de $w_1$

PROPOSITION 1. *$w_1$ est une bonne fonction-poids sur $I = [0,\ 1/\pi]$.*

*Démonstration.* Nous allons démontrer que la condition suffisante du lemme 1 est réalisée.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ posons $I_k = [1/(k + 1)\pi,\ 1/k\pi]$.

Si $x \in [k\pi,\ (k + 1)\pi]$ nous avons:

$$16\pi^{-4}\ (x - k\pi)^2\,(x - (k + 1)\pi)^2 \leqslant \sin^2 x,$$

donc pour $x \in I_k$:

$$16\pi^{-4}\ (x^{-1} - k\pi)^2\,(x^{-1} - (k + 1)\pi)^2 \leqslant \sin^2(1/x) = (w_1(x))^2,$$

donc $\qquad 16(\pi x)^{-4}(1 - k\pi x)^2\,(1 - (k + 1)\pi x)^2 \leqslant (w_1(x))^2$

et come $x \geqslant 1/(k + 1)\pi$,

$$(1 - k\pi x)^2 \, (1 - (k+1)\pi x)^2 \, 16(k+1)^4 \leqslant (w_1(x))^2.$$

Posons $Q_k(x) = 4\pi^2 k\,(k+1)^3\,(x - (1/k\pi))\,(x - (1/(k+1)\pi))$.

Si $P \in H_n$ $(n \geqslant 3)$ :

$$\|PQ_k\|_{L^2(I_k)} \leqslant \|P\|_{L^2_{w_1}(I_k)} \leqslant \|P\|_{L^2_{w_1}(I)}.$$

La longueur de $I_k$ est $(k(k+1)\pi)^{-1}$ donc, d'après le lemme 3

$$\|PQ_k\|_{L^\infty(I_k)} \leqslant (n+3)\,(k(k+1)\pi)^{\frac{1}{2}}\,\|PQ_k\|_{L^2(I_k)}.$$

Il vient alors en utilisant le lemme 5

$$\|P\|_{L^\infty(I_k)} \leqslant (n+3)^5 \, k^{3/2}\pi^{1/2}(k+1)^{-1/2}\|P\|_{L^2_{w_1}(I)},$$

en supposant $k \leqslant n^2$, on en déduit :

$$\|P\|_{L^\infty(I_k)} \leqslant C_2 n^7 \, \|P\|_{L^2_{w_1}(I)}$$

et

$$\|P\|_{L^\infty(1/n^2\pi,\, 1/\pi)} \leqslant C_2 \, n^7 \|P\|_{L^2_{w_1}(I)}.$$

En utilisant le lemme 6 avec $h = (n^2+1)/(n^2-1)$ et en remarquant que pour $n \geqslant 3$, $(h + (h^2-1)^{1/2})^n \leqslant e^2$, on obtient :

$$\|P\|_{L^\infty(0,\, 1/\pi)} \leqslant C_3 \, n^7 \, \|P\|_{L^2_{w_1}(I)},$$

c'est à dire l'inégalité du lemme 1. $w_1$ est donc une bonne fonction-poids sur $[0,\ 1/\pi]$.

## 5. Étude de $w_2$

PROPOSITION 2. *$w_2$ est une mauvaise fonction-poids sur $I = [-1,\ +1]$.*

*Démonstration.* Considérons l'intégrale

$$U = \int_0^1 (1 - x^2)^{2n} x^{-4} \exp\,(-x^{-2})dx.$$

On peut écrire $U = U_1 + U_2$ avec $U_1 = \int_0^{n^{-1/4}}$, $U_2 = \int_{n^{-1/4}}^1$.



Sur $[0,\ 1]$ le maximum de $x^{-4}\exp\,(-x^{-2})$ est atteint pour $x = 1/\sqrt{2}$ et vaut $4\ e^{-2}$. Un calcul facile montre alors que :

$$U_1 \leqslant n^{3/4} \exp\,(-n^{1/2}) \leqslant 2\ \exp\left(-\frac{1}{2}\,n^{1/2}\right),$$

$$U_2 \leqslant (1 - n^{-1/2})^{2n} \leqslant \exp\,(-2\ n^{1/2})$$

et donc $U \leqslant 3\ \exp\left(-\frac{1}{2}\,n^{1/2}\right)$.

Par ailleurs, nous avons :

$$2U = \int_{-1}^{+1} |x^{-2} - P_{2n-1}(x)|^2 \exp\,(-x^{-2})dx,$$

où $P_{2n-2}$ est un polynôme de degré $2n - 2$.

Donc $d_{L^2_{w_2}(I)}(x^{-2},\ H_{2n-2}) \leqslant 6^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{4}\,n^{1/2}\right)$.

et $$d_{L^2_{w_2}(I)}(x^{-2},\ H_n) \leqslant 6^{1/2}\ \exp\ (-n^{1/2}/4\sqrt{2}).$$

Cette dernière expression est le terme général d'une suite de $S$ et cependant la fonction $x \to x^{-2}$ n'est pas continue. $w^2$ n'est donc pas un bon poids sur $[-1,\ +1]$.

$H_n$ est un espace de dimension finie. Donc, pour tout $n$, il existe une constante $K(n)$ telle que pour tout $P \in H_n$ on ait

$$\|P\|_{L^\infty(I)} \leqslant K(n)\ \|P\|_{L^2_{w_2}(I)}.$$

Nous allons donner quelques précisions sur $K(n)$ :

PROPOSITION 3. *Il existe deux constantes positives $C_4$ et $C_5$ telles que pour $n > 1$ :*

$$C_4\ \exp\,((n-1)^{1/2}\ /\ 2\sqrt{2}) < K(n) < C_5\ n\ \exp\left(\frac{1}{2}\,n^4\right).$$

*Démonstration. Majoration de $K(n)$.*

Nous avons en posant $I_n = [-1,\ -n^{-2}] \cup [n^{-2},\ 1]$

$$\|P\|_{L^2_{w_2}(I_n)} \leqslant \|P\|_{L^2_{w_2}(I)}$$

et en minorant $w_2$ sur $I_n$ :

$$\|P\|_{L^2(I_n)} \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\, n^4\right) \|P\|_{L^2_{w_2}(I)}.$$

Le lemme 6 montre alors que pour $P \in H_n$

$$\|P\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_6 \|P\|_{L^\infty(I_n)}.$$

Or d'après le lemme 3

$$\|P\|_{L^\infty(I_n)} \leqslant (n+1)(1-n^{-2})^{-\frac{1}{2}} \|P\|_{L^2(I_n)} \qquad (n > 1)$$

au total :

$$\|P\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_5\, n\, e^{\frac{1}{2} n^4} \|P\|_{L^2_{w_2}(I)}.$$

*Minoration de* $K(n)$.

Un calcul analogue à celui de la proposition 2 montre que pour $n > 1$, on a :

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{2n} e^{-x^{-2}}\, dx < 4 \exp\,(-n^{1/2})$$

et $\qquad \|(1-x^2)^n\|_{L^\infty(I)} = 1$, donc $K(2n) > \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}\, n^{1/2}\right)$,

par suite $K(n) < C_4 \exp\,((n-1)^{1/2}/2\sqrt{2})$.

### 6. Résultats sur les polynomes orthonormaux de $L^2_{w_2}(I)$

D'après les calculs ci-dessus, il existe une constante $C_{2n}$ telle que le polynôme $P_{2n}(x) = C_{2n}(1-x^2)^n$ vérifie

$$\|P_{2n}\|_{L^2_{w_2}(I)} = 1 \quad \text{et} \quad C_{2n} = P_{2n}(0) \geqslant \frac{1}{2} \exp\,(n^{1/2}).$$

Désignons par $\{Q_i\}$ la base orthonormale de polynômes de $L^2_{w_2}(I)$.

Nous avons ([5] p. 181) :

$$(1/4)\ \exp\,(2n^{1/2}) \leqslant |P_{2n}(0)|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{2n} |Q_i(0)|^2,$$

donc pour des raisons de parité :

$$(1/4)\ \exp\,(2n^{1/2}) \leqslant \sum_{i=0}^{n} |Q_{2i}(0)|^2.$$



Parmi les polynômes orthonormaux d'indice pair entre 0 et $2n$, il y en a donc au moins un, dont la norme uniforme est supérieure à $(1/2) \exp\,(n^{1/2})\,(n+1)^{-1/2}$.

Par ailleurs, d'après [5] page 43, en tenant compte de la parité

$$(1/4)\ \exp\,(2n^{1/2}) \leqslant \sum_{i=0}^{2n} |Q_i(0)|^2 = (A_{2n+1})^{-1} Q'_{2n+1}(0)\ Q_{2n}(0),$$

où la constante $A_{2n+1}$ vérifie $A_{2n+1} > 1$. Par suite :

$$A_{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} |Q_i(0)|^2 < \frac{1}{2} \left(|Q'_{2n+1}(0)|^2 + |Q_{2n}(0)|^2\right).$$

Il en résulte en utilisant l'inégalité de Markov Bernstein que :

$$A_{2n+1} \sum_{i=0}^{2n-2} |Q_i(0)|^2 \leqslant \frac{1}{2} |Q'_{2n+1}(0)|^2 \leqslant (1/2)\,(2n+1)^2 \|Q_{2n+1}\|^2_{L^\infty(I)},$$

donc $\qquad \|Q_{2n+1}\|_{L^\infty(I)} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}}(2n+1)^{-1} \exp\left((n-1)^{\frac{1}{2}}\right).$

Avec les notations précédentes, un calcul explicite sur ordinateur donne les résultats suivants :

| | | |
|---|---|---|
| $\|Q_0\|_{L^\infty(I)} = 2{,}37$ | $\|Q_1\|_{L^\infty(I)} = 2{,}81$ | $\|Q_2\|_{L^\infty(I)} = 8{,}64$ |
| $\|Q_3\|_{L^\infty(I)} = 4{,}16$ | $\|Q_4\|_{L^\infty(I)} = 23{,}8$ | $\|Q_5\|_{L^\infty(I)} = 8{,}74$ |
| $\|Q_6\|_{L^\infty(I)} = 57{,}7$ | $\|Q_7\|_{L^\infty(I)} = 17{,}9$ | $\|Q_8\|_{L^\infty(I)} = 129$ |
| $\|Q_9\|_{L^\infty(I)} = 35{,}4$ | $\|Q_{10}\|_{L^\infty(I)} = 276$ | $\|Q_{11}\|_{L^\infty(I)} = 67$ |
| $\|Q_{12}\|_{L^\infty(I)} = 696$ | $\|Q_{13}\|_{L^\infty(I)} = 111.$ | |

On rappelle à titre de comparaison que les polynômes de Legendre normalisés vérifient pour $i \geqslant 0$ : $\|L_i\|_{L^\infty(-1,\,+1)} = \left(i + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.


BIBLIOGRAPHIE

[1] Baouendi, M. S., et Goulaouic, C., *Approximation polynômiale des fonctions C∞ et analytiques*. Ann. Inst. Fourier **21**, 149–174 (1971).

[2] Goetgheluck, P., *Majorations pour les polynômes dans certains espaces de Banach. Application à l'approximation*. J. Approximation Theory, **18**, 316–328 (1976).

[3] Lorentz, G. G., *Approximation of functions*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1946.

[4] Natanson, I. P., *Constructive function theory*, Vol. I. Ungar, New York, 1964.

[5] Szegő, G., *Orthogonal polynomials*. A.M.S. Coll. Pub. Vol. XXIII, Providence, 1939.



*Université de Paris-sud, centre d'Orsay*
*Département de mathématiques*, Bt 425.
91405 ORSAY Cedex, FRANCE


Reçu le 1. VII, 1978