MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 75—80

SUR L'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS MULTIVOQUES

par
OCTAVIAN LIPOVAN
(Timişoara)

0. Introduction. Le but de ce travail est la construction d'une théorie particuliere de l'intégration des fonctions multivoques, en utilisant systématiquement des familles de sous-mesures et des anneaux topologiques associés à celles-ci.

En considérant les fonctions multivoques comme des fonctions univoques qui prennent leur valeur dans $\mathfrak{P}(Y)$, l'ensemble des parties de Y, munie à une structure d'anneau topologique $(\mathfrak{P}(Y), \Delta, \bigcap, \tau_{\Omega})$ à l'aide d'une famille dénombrable de sous-mesures $\Omega = \{\gamma'_n\}_{n \in N}$ sur $\mathfrak{P}(Y)$, le point de vue adopté pour definir l'intégrale et l'ensemble des fonctions multivoques integrables, ressemblant à celui de Bartle, Dunfors et Schwartz.

Ces notions sont définies en termes de suites généralisées de fonctions étagées, ce qui permet de faire de l'ensemble des fonctions integrables un espace uniforme de maniement commode.

1. Hypotheses générales. On supposera partout que X est un ensemble non vide et $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$, une sous-algebre de $\mathfrak{P}(X)$, l'ensemble des parties de X. Soit $\Gamma = \{\gamma_i : \mathcal{B} \to \overline{\mathbf{R}}_+\}_{i \in I}$, unde famille non vide de sous-mesures sur $\mathcal{B}$. Il existe alors [3] une topologie unique τ_{Γ} sur $\mathfrak{P}(X)$, telle que $\mathfrak{P}(X)(\Gamma) = \mathfrak{P}(X), \Delta, \bigcap, \tau_{\Gamma})$ est un anneau topologique et $\mathcal{B}(\Gamma) =$ $= (\mathcal{B}, \Delta, \bigcap, \tau_{\Gamma})$.

Soient Y un ensemble non vide, et $\Omega = \{\gamma'_n : \mathfrak{P}(Y) \to \overline{\mathbf{R}}_+\}_{n \in N}$ une famille dénombrable de sous-mesures telle que :

$Z_{\Omega} = \{\emptyset\}$, $Z_{\Omega} = \{A \, ; \, A \subseteq Y, \ \gamma'_n(A) = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}\}$. Il est clair [3] que $\mathfrak{P}(Y)(\Omega) = (\mathfrak{P}(Y), \Delta, \bigcap, \tau_{\Omega})$ est un anneau topologique uniforme séparé et pseudométrisable.

DÉFINITION 1. *Soient X et Y deux ensembles. Nous appellerons fonction multivoque de X dans Y toute application de X dans l'ensemble $\mathfrak{X}(Y)$ des parties de Y.*

DÉFINITION 2. *On dit qu'une fonction multivoque $f: X \to \mathfrak{X}(Y)$ est $\mathcal{B}$-étagée s'il existent les ensembles :*

$$A_i \in \mathfrak{X}(Y),\ E_i \in \mathcal{B},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ A_i \neq A_j,\ i \neq j,\ E_i \cap E_j = \varnothing,$$

$$i \neq j,\ X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

telle que : $\forall x \in E_i$ impliquent que $f(x) \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

On dira qu'un ensemble $E \in \mathcal{B}$ est Γ-fini/resp. Γ-négligeable/ si pour tout $i \in I$, $\gamma_i(E) < \infty$ /resp. $\gamma_i(E) = 0$/.

DÉFINITION 3. *On dit qu'une fonction multivoque d'ensembles $\mu : \mathcal{B} \to \mathfrak{X}(Y)$ est une mesure multivoque si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $E, F \in \mathcal{B}$, $E \cap F = \varnothing$ entrainent

$$\mu(F \cup F) = \mu(E)\, \Delta \mu(F)$$

(ii) $\mu(\varnothing) = \varnothing$.

Conformément a la terminologie habituelle, on dit qu'une mesure multivoque μ est σ-additive si pour toute suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $\mathcal{B}$, telle que $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$ on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Delta}} \mu(E_n) \quad \text{où} \quad \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Delta}} \mu(E_n) = \mu(E_1)\, \Delta \mu(E_2)\, \Delta \ldots$$

désigne la somme de la serie convergente dans τ_Ω.

On fait enfin l'hypothese qu'a μ est associée une famille non vide de sous-mesures $\Gamma_\mu = \{\gamma_i : \mathcal{B} \to \overline{\mathbf{R}}_+\}_{i \in I}$ satisfaisant les axiomes de compatibilité suivantes :

(A_1) Pour tout $F \in \mathcal{B}, \Gamma_\mu$-fini, pour tout $\mathcal{W}$ entrourage dans $\mathfrak{X}(Y)$, il existe $\mathcal{U}$ entourage dans $\mathfrak{X}(X)$ ayant la proprieté suivante: pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{n}$ est dans $\mathcal{U}$ et si $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ est une suite d'ensembles disjoints deux a deux dans $\mathcal{B}$, alors :

$$\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} [A_i \cap \mu(E_i \cap F)],\ \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} [B_i \cap \mu(E_i \cap F)]\right) \in \mathcal{W}.$$

(A_2) Pour tout $A \in \mathfrak{X}(Y)$, $\lim\limits_{\substack{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \varnothing \\ E \in \mathcal{B}}} [A \cap \mu(E)] = \varnothing$, où $E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \varnothing$, désigne la convergence dans $\mathfrak{X}(X)(\Gamma_\mu)$.

2. L'intégrabilité des fonctions multivoques étagées

DÉFINITION 3. *On dit qu'une fonction multivoque $\mathcal{B}$-étagée $f: X \to \mathfrak{X}(Y)$ est $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrable si :*

(i) f prend un nombre fini de valeurs distinctes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivement sur des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{B}$.

(ii) pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_i \neq \varnothing$ entraine que E_i est Γ_μ-fini.

Pour $E \in \mathcal{B}$, la $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrale de f sur E est alors par définition :

$$\int_E f\, d\mu = \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} [A_i \cap \mu(E_i \cap E)].$$

On note $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{X}(Y))$ l'ensemble des fonctions étagées $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrables.

THÉOREME 1

(i) Relativement à l'opération : $(f \Delta g)(x) = f(x) \Delta g(x)$ l'ensemble $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{X}(Y))$ est un sous-groupe de $[\mathfrak{X}(Y)]^X$.

(ii) Pour $E \in \mathcal{B}$, l'application $f \to \int_E f d\mu$ de $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{X}(Y))$ dans $\mathfrak{X}(Y)$ est additive :

$$\int_E f \Delta g\, d\mu = \left(\int_E f d\mu\right) \Delta \left(\int_E g d\mu\right);\ f, g \in \mathcal{E}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{X}(Y)).$$

(iii) Pour $f \in \mathcal{E}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{X}(Y))$, l'application $E \to \nu(E)$, $\nu(E) = \int_E f d\mu$, est une mesure multivoque sur $\mathcal{B}$:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} \nu(E_i),\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j;\ \nu(\varnothing) = \varnothing.$$

En supposant que μ est σ-additive, on aura la σ-additivité de ν sur $\mathcal{B}$.

(iv) Pour $f \in \mathcal{E}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{X}(Y))$, $\lim\limits_{\substack{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \varnothing \\ E \in \mathcal{B}}} \nu(E) = \lim\limits_{\substack{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \varnothing \\ E \in \mathcal{B}}} \int_E f\, d\mu = \varnothing$.

Démonstration. Le résultat découle de la définition 3.

3. L'intégrabilité des fonctions multivoques

Soit $\mathfrak{X}(Y)(\Omega) = (\mathfrak{X}(Y), \mathbf{U}_\Omega)$ l'espace uniforme $\mathfrak{X}(Y)$, avec la structure uniforme $\mathbf{U}_\Omega$ définie par Ω.

À K fini, $K \subseteq I$, $\varepsilon > 0$ et $U \in \mathbf{U}_\Omega$ associent l'ensemble : $W_k(U, \varepsilon) = \{(f, g) \in [\mathfrak{L}(Y)]^X \times [\mathfrak{L}(Y)]^X ; \gamma_i^* \{x \in X ; (f(x), g(x)) \notin U\} < \varepsilon, i \in K\}$ où γ_i^* désigne la sous-mesure $\gamma_i^* : \mathfrak{L}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ qui pour $A \subseteq X$; $\gamma_i^*(A) = \inf\{\gamma_i(E) ; A \subseteq E \in \mathcal{B}\}$

La famille des $W_k(U, \varepsilon)$ forme alors un systeme fondamental d'entourages pour une structure uniforme $\mathbf{U}_{\Omega - \Gamma_\mu}$ sur $[\mathfrak{L}(Y)]^X$. Posons $[\mathfrak{L}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma_\mu)} = ([\mathfrak{L}(Y)]^X, \mathbf{U}_{\Omega-\Gamma_\mu})$.

Si $\{f_\alpha\}$ est une suite généralisée dans $[\mathfrak{L}(Y)]^X$, $f \in [\mathfrak{L}(Y)]^X$ et si f_α tend vers f dans $[\mathfrak{L}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma_\mu)}$, on dira que *$\{f_\alpha\}$ tend vers f en $\Omega - \Gamma_\mu$-sous-mesures*, ce que l'on écrira $f_\alpha \xrightarrow{\Omega-\Gamma_\mu} f$.

Le prolongement de l'intégrale a la fonction multivoqué sera fondé sur le prochain résultat. (Le théoreme suivant sera crucial dans le développement de la théorie, en ce qu'il va permettre de prolonger la $\Omega - \Gamma_\mu$-integrale a des fonctions plus générales).

THÉOREME 2. *Soient $\{f_\alpha\}$ et $\{g_\beta\}$ deux suites généralisées dans $\mathcal{S}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$, convergeant dans $[\mathfrak{L}(X)]^X_{(\Omega-\Gamma_\mu)}$ vers une même fonction $f \in [\mathfrak{L}(Y)]^X$. Si $\left\{\int_E f_\alpha \,\mathrm{d}\mu\right\}$ et $\left\{\int_E g_\beta \,\mathrm{d}\mu\right\}$ soient des suites généralisées de Cauchy dans $\mathfrak{L}(Y)$ uniformément en $E \in \mathcal{B}$, alors, quel que soit l'entourage W de $\mathfrak{L}(Y)$, il existe α_0 et β_0, tels que :*

$$\left(\int_E f_\alpha \,\mathrm{d}\mu, \int_E g_\beta \,d\mu\right) \in W$$

uniformement en $E \in \mathcal{B}$ lorsque $\alpha \geq \alpha_0$ et $\beta \geq \beta_0$.

Démonstration. Etant donné un entourage symétrique W_1, pour $\mathfrak{L}(Y)$ tel que $W_1^2 \mathring{\Delta} W_1^2 \Delta W_1^2 \subseteq W$, se donne un entourage U pour $\mathfrak{L}(Y)$, correspondant à W_1, conformement à l'axiome (A_1). On pose alors $F_{\alpha\beta} = \{x \in X, (f_\alpha(x), g_\beta(x)) \notin U\}$. Soit α_0 et β_0 tel que $\left(\int_E f_\alpha \mathrm{d}\mu, \int_E f_{\alpha_0} \,\mathrm{d}\mu\right) \in W_1$, $\left(\int_E g_\beta \mathrm{d}\mu, \int_E g_{\beta_0} d\mu\right) \in W_1$ pour tout $E \in \mathcal{B}$ lorsque $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$.

D'apres théoreme 1 /iv/, il existe un voisinage η de $\emptyset$ dans $\mathcal{B}(\Gamma_\mu)$ tel que $\int_E f_{\alpha_0} \,\mathrm{d}\mu \in W_1(\emptyset)$, $\int_E g_{\beta_0} \,\mathrm{d}\mu \in W_1(\emptyset)$, lorsque $E \in \eta$. Soit $F = \{x \in X, f_{\alpha_0}(x) \neq \emptyset\} \cup \{x \in X ; g_{\beta_0}(x) \neq \emptyset\}$. On a $F \in \mathcal{B}$, Γ_μ-fini et $\int_E f_{\alpha_0} \,\mathrm{d}\mu = \emptyset$, $\int_E g_{\beta_0} \mathrm{d}\mu = \emptyset$ quel que soit $E \in \mathcal{B}$, $E \subseteq X \setminus F$.

On peut trouver alors α_0, β_0 ainsi que F, Γ_μ-fini dans $\mathcal{B}$ et η voisinage de $\emptyset$ dans $\mathcal{B}(\Gamma_\mu)$, tels que $\int_E f_\alpha \,d\mu \in W_1(\emptyset)$ et $\int_E g_\beta d\mu \in W_1(\emptyset)$ lorsque $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$, $E \in \eta$ ou $E \subseteq X \setminus F$, $E \in \mathcal{B}$.

Comme $\{f_\alpha\}$, $\{g_\beta\}$ soient des suites généralisées de Cauchy dans $[\mathfrak{L}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma_\mu)}$, il existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ et $\beta_1 \geq \beta_0$, tels que $F_{\alpha\beta} \in \eta$ pour $\alpha \geq \alpha_1$ et $\beta \geq \beta_1$. Pour tout $E \in \mathcal{B}$ on peut donc écrire dans le groupe $\mathfrak{L}(Y) \times \mathfrak{L}(Y)$:

$$\left(\int_E f_\alpha \,\mathrm{d}\mu, \int_E g_\beta \,\mathrm{d}\mu\right) = \left(\int_{E \cap F_{\alpha\beta}} f_\alpha \,\mathrm{d}\mu, \int_{E \cap F_{\alpha\beta}} g_\beta \,\mathrm{d}\mu\right) \Delta \left(\int_{E \setminus (F_{\alpha\beta} \cup F)} f_\alpha \,\mathrm{d}\mu, \int_{E \setminus (F_{\alpha\beta} \cup F)} g_\beta \,\mathrm{d}\mu\right) \Delta$$

$$\Delta \left(\int_{(E \setminus F_{\alpha\beta}) \cap F} f_\alpha \,\mathrm{d}\mu, \int_{(E \setminus F_{\alpha\beta}) \cap F} g_\beta \,\mathrm{d}\mu\right) \in W_1(\emptyset) \times W_1(\emptyset) \mathring{\Delta} W_1(\emptyset) \times W_1(\emptyset) \mathring{\Delta} W_1 \subseteq$$

$$\subseteq W_1^2 \mathring{\Delta} W_1^2 \Delta W_1^2 \subseteq W \text{ lorsque } \alpha \geqslant \alpha_1, \ \beta \geqslant \beta_1.$$

DÉFINITION 4. *On dit qu'une fonction multivoque $f : X \to Y$ est $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrable s'il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathcal{S}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$, tel que $f_\alpha \xrightarrow{\Omega-\Gamma_\mu} f$ et $\left\{\int_E f_\alpha \,\mathrm{d}\mu\right\}$ est une suite généralisée de Cauchy dans $\mathfrak{L}(Y)$ uniformément en $E \in \mathcal{B}$. La $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrale de f sur $E \in \mathcal{B}$ est l'élément du complète $\widehat{\mathfrak{L}}(Y)$ de $\mathfrak{L}(Y)$ défini par*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_\alpha \int_E f_\alpha \,\mathrm{d}\mu$$

En vertu du théoreme 2 la $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrale ci-dessus est bien définie. Désignons par $\mathcal{L}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$ l'ensemble des fonctions multivoques $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrables appartenant a $[\mathfrak{L}(Y)]^X$. Il est clair que $\mathcal{S}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y)) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$ et que la $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrale restreinte à $\mathcal{S}(\Gamma_\alpha, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$ coincide avec la $\Omega - \Gamma_\mu$-intégrale de la définition 3.

THÉOREME 3. (i) *Relativement a l'opération „Δ" l'ensemble $\mathcal{L}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$ est un sous-groupe de $[\mathfrak{L}(Y)]^X$.*

(ii) *Pour $E \in \mathcal{B}$, l'application $f \mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ de $\mathcal{L}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$ dans $\widehat{\mathfrak{L}(Y)}$ est additive :*

$$\int_E f \Delta g \,\mathrm{d}\mu = \left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) \Delta \left(\int_E g \,\mathrm{d}\mu\right); \ f, g \in \mathcal{L}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y)).$$

(iii) *Pour* $f \in \mathfrak{L}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$, *l'application* $E \mapsto \nu(E)$, $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$, *est une mesure multivoque sur* $\mathfrak{B}$.

En supposant que μ *est* σ*-additive, on aura la* σ*-additivité de* ν *sur* $\mathfrak{B}$.

(iv) *Pour* $f \in \mathfrak{S}(\Gamma_\mu, \Omega, \mathfrak{L}(Y))$; $\lim\limits_{\substack{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \varnothing \\ E \in \mathfrak{B}}} \nu(E) = \varnothing$

Demonstration. Le résultat découle sans difficulté du théoreme 1 et de la définition de la $\Omega - \Gamma_\mu$ -intégrale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bartle, R. G., *A general bilinear vector integral*, Studia Math. 15, 337–352 (1956).
[2] Berge Claude, *Espaces topologiques, Fonctions multivoques*, Dunod, Paris (1959).
[3] Drewnowski L., *Topological Rings of Sets, Continuous Set Functions, Integration I, II*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. math. astr. et phys. 20, no. 4, 269–286.
[4] Dunford N. and Schwartz J., *Linear Operators, Part I*, Interscience New York, 1957.
[5] Masse J. C., *„Integration dans les semi-groupes"*. Collection mathématique No. 23, Département de mathématiques. Université Laval Québec, 1974

Reçu 17. XI. 79

Institutul politehnic „Traian Vuia"
Catedra de matematici
1900 Timişoara, Piaţa Horaţiu 1