MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 101–106

LA $\triangle$-MÉTRIQUE, INSTRUMENT D'APPROXIMATION DANS UN CLAN (I)

par

ANDREI NEY

(Cluj-Napoca)

Préliminaires. On considère un ensemble de références non-vide, **X**, dont les éléments seront nommés ,,éléments constituants'' On considère des clans (des tribes) de parties de l'ensemble **X**, en réservant l'expression d',,élément'' pour un ensemble qui est un élément d'un clan.

La différence symmétrique est une application

$$\Delta : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C} \ (\mathcal{C} \text{ étant un clan})$$

telle que $A \triangle B \supseteq \emptyset$ $(A,\ B \in \mathcal{C})$ et qui satisfait formellement aux axiomes de la métrique :

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B \\ 2^\circ\ A \triangle B = B \triangle A \\ 3^\circ\ A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle \mathcal{C}) \end{array}\right\} A,B,C \in \mathcal{C};$$

d'ici *l'idée de définir une topologie sur $\mathcal{C}$ à l'aide de cette métrique impropre, que l'on nommera la $\triangle$-métrique.*

DÉFINITION 1. *Soit $\mathcal{C}$ un clan de parties de l'ensemble nonvide* **X**. *On entend par une sphère de centre A et d'étendue* (rayon) *B dans le clan $\mathcal{C}$ l'ensemble noté par $\mathcal{S}(A, B)$ et défini par*

(1) $$\{X | X \in \mathcal{C},\ A \triangle X \subseteq B;\ A,B \text{ fixés dans } \mathcal{C}\}$$

où X est un point de la sphère. Si $B = \emptyset$ alors $A \triangle X = \emptyset$ est réalisée seulement pour $X = A$ et la sphère est dégénérée à un seul point, son centre. Si $B \neq \emptyset$, la sphère est non-dégénérée et on la nommé simplement : sphère. Si $A \setminus B = \emptyset$, c'est-à-dire $A \subseteq B$, la sphère est de la première espèce; si $A \setminus B \neq \emptyset$, la sphère est de la seconde espèce.

Remarque 1. *Les points de la sphère $\mathcal{S}(A, B)$ sont les solutions de l'inéquation booléienne $A \triangle X \subseteq B$.* L'équation $A \triangle X = B$ a une seule solution, notamment $X = A \triangle B$ qui s'appelle *le point périphérique de la sphère*. Si la sphère est de la première espèce, alors $A \subseteq B$ et $X = \emptyset$ est visiblement une solution de l'inéquation booléienne, donc $\emptyset$ *est un point de chaque sphère de la première espèce.* Si la sphère est de la deuxième espèce, alors $A \setminus B \neq \emptyset$ et l'inéquation booléienne n'admet pas $\emptyset$ comme solution, car $A \triangle \emptyset = A \not\subseteq B$; donc $\emptyset$ *n'est pas un point d'aucune sphère de la seconde espèce.* On souligne — en particulier — que $\emptyset$ ne peut pas être ni même le centre d'une sphère de la seconde espèce, car pour la sphère $\mathcal{S}(\emptyset, B)$ on a $\emptyset \setminus B = \emptyset$, donc elle est toujours de la première espèce.

PROPOSITION 1. *Les points de la sphère $\mathcal{S}(A, B)$ du clan $\mathcal{C}$ ont la représentation*

$$X = A \triangle \beta \quad où \quad \beta \in \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{C}. \tag{2}$$

Démonstration. L'inclusion $A \triangle X \subseteq B$ est équivalente au système $A \triangle X = \beta$ ($\beta \subseteq B$, $\beta \in \mathcal{C}$), d'où en opérant avec A par $\triangle$ sur l'égalité ci-dessus on obtient $A \triangle (A \triangle X) = A \triangle \beta$, donc $(A \triangle A) \triangle X = A \triangle \beta$, d'où $X = A \triangle \beta$ et β parcourt toutes les parties de B qui sont simultanément des éléments de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 2. a) *Indifféremment de l'espèce de la sphère dans $\mathcal{C}$, son centre est toujours un point de la sphère.* b) *Pour qu'une sphère contienne son étendue il est nécessaire et suffisant qu'elle soit de la première espèce.*

Démonstration. a) On a toujours $A \triangle A = \emptyset \subseteq B$ ($\emptyset \in \mathcal{C}$). b) *L'inclusion* $A \triangle B \subseteq B$ ($A, B \in \mathcal{C}$) peut être écrite comme $A \triangle B = \beta$ ($\beta \subseteq B$, $\beta \in \mathcal{C}$), d'où $A = B \triangle \beta$. Or, $B \triangle \beta \subseteq B$ donc $A \subseteq B$, ce qui signifie que la sphère est de la première espèce. Inversement, la sphère étant de la première espèce, $A \subseteq B$, donc $A \triangle B = B \setminus A \subseteq B$.

PROPOSITION 3. *L'intersection de deux sphères concentriques, $\mathcal{S}_1(A, B_1)$ et $\mathcal{S}_2(A, B_2)$ du clan $\mathcal{C}$ est la sphère $\mathcal{S}(A, B_1 \cap B_2)$. Si l'une au moins des deux sphères est de la deuxième espèce alors leurs étendues peuvent être disjointes et dans ce cas l'intersection est une sphère dégénérée à son centre. Pour deux sphères de la première espèce, concentriques, le cas de la dégénération de leurs intersection n'a pas lieu.*

Démonstration. Conformément à (2) voici les représentations des points des deux sphères :

$$(\mathcal{S}_1) \qquad X_1 = A \triangle \beta_1, \qquad \beta_1 \in \mathcal{P}(B_1) \cap \mathcal{C},$$

$$(\mathcal{S}_2) \qquad X_2 = A \triangle \beta_2, \qquad \beta_2 \in \mathcal{P}(B_2) \cap \mathcal{C}.$$

On cherche les points communs des deux sphères : $X = X_1 = X_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A \triangle \beta_1 = A \triangle \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta$, où $\beta \in \mathcal{P}(B_1 \cap B_2) \cap \mathcal{C}$, donc $X =$ $= A \triangle \beta$ avec $\beta \in \mathcal{P}(B_1 \cap B_2) \cap \mathcal{C}$. Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ alors $\beta = \emptyset$, donc $X = A$. Si $A \subseteq B_1$ et $A \subseteq B_2$, même si $B_1 \cap B_2 = A$, l'intersection sera la sphère $S(A, A)$. (Voir plus loin la proposition 4.)

CONSÉQUENCE 1. Deux sphères d'un clan étant concentriques, l'une d'elles n'inclut pas nécessairement l'autre ; l'inclusion a lieu si et seulement si leurs étendues sont dans la relation $B_1 \subseteq B_2$.

PROPOSITION 4. *Soit $\mathbf{X}$ l'ensemble de référence non-vide, $\mathcal{C}$ un clan de parties de $\mathbf{X}$ et $A \in \mathcal{C}$, $A \neq \emptyset$. Dans ces conditions l'ensemble $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{C}$ peut être organisé comme une sphère, notamment $\mathcal{S}(A, A)$.*

Démonstration. Conformément à (2) les points de la sphère $S(A, A)$ ont la représentation $X = A \triangle \beta$, $\beta \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{C}$; or $A \triangle \beta = (\complement_A \beta) \cap \mathcal{C}$ et si β parcourt toutes les parties de A qui sont aussi des éléments du clan $\mathcal{C}$, alors X parcourt aussi justement les mêmes éléments du clan, donc $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{C}$, ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 1. *Soit $\mathbf{X} \neq \emptyset$, B une partie non-vide de $\mathbf{X}$ et $A \subseteq B$. Alors $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \oplus \mathcal{P}(B \setminus A)$, où $\oplus$ est le signe de la somme directe basée sur l'opération de la réunion.*

Démonstration. Puisque $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ et $B = A \cup (B \setminus A)$, chaque partie β de B est de la forme $\beta = \beta_A \cup \beta_{B \setminus A}$, où $\beta_A \subseteq A$ et $\beta_{B \setminus A} \subseteq B \setminus A$, ce qui justifie le lemme.

LEMME 2. *Soit $\mathbf{X} \neq \emptyset$ et $B \subseteq \mathbf{X}$, $B \neq \emptyset$.* a) *L'ensemble des points de la sphère de la première espèce $\mathcal{S}(A, B)$ dans le tribe $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ peut être écrit $\mathcal{P}(A) \oplus \mathcal{P}(B \setminus A)$.* b) *Si A et B sont des éléments d'un clan $\mathcal{C}$ de parties de $\mathbf{X}$, alors l'ensemble des points de la sphère $\mathcal{S}(A, B)$ du clan $\mathcal{C}$ s'écrit sous la forme*

$$[\mathcal{P}(A) \oplus \mathcal{P}(B \setminus A)] \cap \mathcal{C}.$$

Démonstration. a) Puisque $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ et $B = A \cup (B \setminus A)$, chaque point de la sphère $\mathcal{S}(A, B)$ a dans $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ la représentation $X = A \triangle \beta$ où $\beta = \beta_A \cup \beta_{B \setminus A}$ ($\beta_A \subseteq A$, $\beta_{B \setminus A} \subseteq B \setminus A$)-ce qui s'écrit encore : $X =$ $= \beta_A \triangle \beta_{B \setminus A}$. En conséquence

$$X = A \triangle (\beta_A \triangle \beta_{B \setminus A}) = (A \triangle \beta_A) \triangle \beta_{B \setminus A} = (A \triangle \beta_A) \cup \beta_{B \setminus A}.$$

D'autre part, β_A parcourt—comme élément— l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ donc $A \triangle \beta_A$ parcourt aussi $\mathcal{P}(A)$, de même $\beta_{B \setminus A}$ parcourt l'ensemble $\mathcal{P}(B \setminus A)$, ce qui signifie que l'ensemble des points de la sphère considérée est $\mathcal{P}(A) \oplus$ $\oplus \mathcal{P}(B \setminus A)$. b) Regardant la sphère de la la première espèce $\mathcal{S}(A, B)$ dans le clan $\mathcal{C}$, le résultat contenu dans l'énoncé du lemme s'obtient par relativisation au clan $\mathcal{C}$ du résultat précédent.

CONSÉQUENCE 2. *Soit $\mathbf{X} \neq \emptyset$ et $B \subseteq \mathbf{X}$, $B \neq \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{P}(B)$ peut être organisé dans $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ comme une sphère de la première espèce ayant A comme centre et B comme étendue, A étant l'ensemble vide on une partie non-vide et arbitraire de B.* Cette propriété se transpose dans un clan $\mathcal{C}$

dont A et B sont des éléments, par simple relativisation, comme il suit : $[P(A) \oplus \mathcal{P}(B \setminus A)] \cap \mathcal{C}$. Pour s'en convaincre, il suffit d'envisager les lemmes 1 et 2.

Remarque 2. *Si* $A \subseteq B$, $B \neq \emptyset$ *et* $A, B \in \mathcal{C}$, *alors le point périphérique de la sphère* $\mathcal{S}(A, B)$ *est* $B \setminus A$. *La sphère ayant comme centre* $B \setminus A$ *et comme étendue* B, *aura* — visiblement — *comme point périphérique l'ensemble* A. Conformément à la conséquence 2, les sphères $\mathcal{S}(A, B)$ et $\mathcal{S}(B \setminus A, B)$ sont formés des mêmes points ; elles seront nommées *sphères conjuguées*.

PROPOSITION 5. *Dans le clan* $\mathcal{C}$: a) *on peut inclure dans une sphère de la première espèce* $\mathcal{S}(A, B)$, *ayant* $A \neq \emptyset$ *comme centre, une sphère de la seconde espèce ayant le même centre; si l'étendue* B *de la sphère est formée d'un seul élément constituant, alors la sphère de la seconde espèce incluse, sera dégénérée.* b) *Dans une sphère de la seconde espèce on ne peut pas inclure une sphère de la première espèce.*

Démonstration. a) Si $A \subset B$, alors la sphère $\mathcal{S}^\circ(A, B \setminus A)$ est de la seconde espèce et elle est incluse dans $\mathcal{S}(A, B)$, parce qu'un point quelconque $\xi^\circ = A \triangle \beta^\circ$ ($\beta^\circ \in \mathcal{P}(B \setminus A) \cap \mathcal{C}$) appartenant à $\mathcal{S}^\circ$ appartient aussi à $\mathcal{S}$, car $\mathcal{P}(B \setminus A) \subset \mathcal{P}(B)$. Si $A = B$, on peut prendre $B^\circ \subset B$, $B^\circ \in \mathcal{C}$, et la sphère $\mathcal{S}^\circ(A, B^\circ)$ résout le problème ; si B° ne peut être que $\emptyset$ (c'est le cas où B est formée d'un seul élément constituant de l'ensemble de référence $\mathbf{X}$) alors $S^\circ(A, \emptyset)$ est une sphère de la seconde espèce dégénérée, car $A \setminus B^\circ \neq \emptyset$. b) Puisque l'ensemble $\emptyset$ est un point de chaque sphère de la première espèce tandis que $\emptyset$ n'est pas le point d'aucune sphère de la seconde espèce (voir remarque 1) — la proposition est démontrée.

PROPOSITION 6. *Soit* $\mathcal{C}$ *un clan de parties de l'ensemble non-vide* $\mathbf{X}$. *Si* $\mathcal{S}(A, B)$ *est une sphère (non-dégénérée) de la première ou de la seconde espèce dans* $\mathcal{C}$ *et* X° *un point arbitraire de la sphère, alors il existe toujours une sphère (non-dégénérée) ayant* X° *pour centre et incluse dans* $\mathcal{S}$. *Si* $\mathcal{S}$ *est de la première espece on peut toujours construire* $\mathcal{S}^\circ$ *de telle façon qu'elle soit aussi de la première espece.*

Démonstration. Soit arbitrairement $X^\circ \in \mathcal{S}(A, B)$, donc $X^\circ = A \triangle \beta^\circ$, $\beta^\circ \in \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{C}$. Si $\beta^\circ = \emptyset$, alors $X^\circ = A$ et on prend — d'une facon trivielle — $\mathcal{S}^\circ = \mathcal{S}(A, B)$. Si $\beta^\circ \neq \emptyset$, alors la sphère $\mathcal{S}^\circ(X^\circ, \beta^\circ)$ satisfait aux conditions demandées dans l'écononcé de la proposition 6. En effet, un point de $\mathcal{S}^\circ$ aura la représentation $\xi^\circ = (A \triangle \beta^\circ) \triangle \beta'$ où $\beta' \in \mathcal{P}(\beta^\circ) \cap \mathcal{C}$; ξ° s'écrit encore comme $\xi^\circ = A \triangle (\beta^\circ \triangle \beta')$ et β' parcourt $\mathcal{P}(\beta^\circ) \cap \mathcal{C}$, donc $\beta = \beta^\circ \triangle \beta'$ parcourt le même ensemble, par conséquence $\xi^\circ = A \triangle \beta$ avec $\beta \in \mathcal{P}(\beta^\circ) \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{C}$ — c'est-à-dire $\xi^\circ \in \mathcal{S}(A, B)$. Si $\mathcal{S}(A, B)$ est de la première espece, alors — conformément à la conséquence 2 — l'ensemble de tous ses points est $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{C}$. Quelques soit $X^\circ \in \mathcal{S}(A, B)$, il est suffisant de prendre B° tel qu'on ait $X^\circ \subseteq B^\circ \subseteq B$ ($B^\circ \in \mathcal{C}$) et alors $\mathcal{S}^\circ(X^\circ, B^\circ)$ a comme ensemble de ses points l'ensemble $\mathcal{P}(B^\circ) \cap \mathcal{C}$ contenu dans $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{C}$.

CONSÉQUENCE 3. Vu les propriétés mises en évidence par les propositions 3 et 6, *les sphères de la première espèce d'un clan de parties de* $\mathbf{X} \neq \emptyset$, *peuvent être considérées comme des ensembles ouverts.*

DÉFINITION 2. *Un sous-ensemble* G *du clan* $\mathcal{C}$ *de parties de* $\mathbf{X} \neq \emptyset$ *est un ouvert, si et seulement si quelque soit* $A \in G$, *il existe une sphère de la première espèce (non-dégénérée!) incluse dans* G *et ayant comme centre* A.

THÉORÈME 1. *L'ensemble des sphèes de la première espèce du clan* $\mathcal{C}$ *est une base pour les ouverts de* $\mathcal{C}$.

Démonstration. Soit G un ouvert de $\mathcal{C}$. Si $A \in G$, alors existe — conformément à la définition 2 — $B \in G$, $B \neq \emptyset$, tel que $A \subseteq B$ et $\mathcal{S}(A, B) \subseteq G$. Chaque élément de G peut être couvert, ainsi, par une certaine sphère de la première espèce ; la réunion de ces sphères contient G. Puisque G contient en même temps chacune des sphères utilisées pour le recouvrement, G contiendra leurs réunion aussi, donc G est une réunion de sphères de la première espèce, dans $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 2. *L'ensemble de tous les ouverts d'un clan* $\mathcal{C}$ (conformément à la définition 2) *constitue une topologie sur* $\mathcal{C}$, *qu'on nomme : la topologie engendrée par les* $\triangle$*-sphères de la première espèce.*

Démonstration. 1°. $\emptyset$ sera par définition un ouvert (formellement $\emptyset$ peut être organisé comme une sphère de la première espèce, dégénérée, $\mathcal{S}(\emptyset, \emptyset)$). $\mathcal{C}$ lui-même est organisé comme une sphère de la première espèce, par exemple, si on note l'ensemble de tous les éléments constituants qui entre dans la construction des éléments (enbembles) de $\mathcal{C}$, par $\mathbf{X}_{\mathcal{C}}$, alors $S(\mathbf{X}_{\mathcal{C}}, \mathbf{X}_{\mathcal{C}})$ est une sphère de la première espèce formée par tous les éléments du clan $\mathcal{C}$ (notés aussi par $\mathcal{P}(\mathbf{X}_{\mathcal{C}}) \cap \mathcal{C}$). 2° Soit $G_i (i \in I)$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathcal{C}$. La réunion $\bigcup\limits_{i \in I} G_i$ est de même un ouvert, car si $X^\circ \in \bigcup\limits_{i \in I} G_i$, alors il existe un indice $i_{X^\circ} \in I$ tel que $X^\circ \in G_{i_{X^\circ}}$ et il existe dans $\mathcal{C}$ une sphère $\mathcal{S}^0$ de la première espèce, telle qu'on ait $\mathcal{S}^\circ(X^\circ, B^\circ) \subseteq G_{i_{X^\circ}} \subseteq \bigcup\limits_{i=I} G_i$. 3°. Soit G_i $(i = 1, \ldots, n)$ une famille finie d'ouverts de $\mathcal{C}$. Si l'intersection $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ est vide, alors, conformément au point 1° de notre démonstration, elle sera un ouvert de $\mathcal{C}$. Si l'intersection est $G \neq \emptyset$, alors celle-ci étant la partie commune de tous les ensembles G_i $(i = 1, \ldots, n)$, on aura pour un élément A quelconque de G (évidemment $A \in \mathcal{C}$) n sphères de la première espèce, telles que $\mathcal{S}(A, B_i) \subseteq G_i$ et $A \subseteq B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. D'après la proposition 3 (facilement généralisable pour n) l'intersection de ces sphères est la sphère de la première espèce $\mathcal{S}(A, B)$ avec $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$, et cette sphère est incluse dans $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, ce qui démontre le théorème.

R e m a r q u e 3. On a vu dans ce travail *l'utilisation des sphères de la première espèce pour engendrer une topologie sur un clan.* On a pu réaliser ce fait à l'aide seule des concepts de la théorie des ensembles, sans faire appel à des éléments numériques — par exemple à une mesure — tel qu'on procède dans [1]. *Dans* [2] *nous utilisons dans le même but des sphères de la seconde espèce.* En effect, l'inclusion $X \triangle X_n \subseteq B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ qui définit dans un clan la limite analytique X de la séquence (X_n) (sachant que $B_n \downarrow \emptyset$) met en jeu une séquence $\{\mathcal{S}_n(X, B_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ de sphères de la seconde espèce, descendante à $\emptyset$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B o g d a n, V. M., O b e r l e, R. A., *Topological rings of sets and the theory of vector measures.* Dissertationes Mathematicae CLIV, Warszawa 1978.

[2] N e y, A., *Notions de convergence dans un clan et topologies définies par elles.* Mathematica — Revue d'analyse num. et de la théorie de l'approximation, Tome 6, No. 1, pp. 57–80 (1977).

Reçu le 11. XII. 1979