MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 107—112

SUR UN THÉORÈME DE LA MOYENNE

par

ELENA POPOVICIU

(Cluj-Napoca)

1. Dans plusieurs travaux nous avons donné des résultats concernant les propriétés de la moyenne qu'on rencontre dans la théorie de l'interpolation. Dans notre livre [3] on trouve ces propriétés présentées en liaison avec la théorie des fonctions convexes généralisées. F étant un ensemble interpolatoire d'un ordre $n \geqq 1$, sur un intervalle $[a, b]$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ des points situés dans l'intervalle $[a, b]$ et $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ des nombres réels, on considère l'ensemble

$$\mathcal{J}\left(F;\begin{matrix}x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n+1}\\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_{n+1}\end{matrix}\right) \tag{1}$$

des fonctions $L(F;\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\ y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})$ où les points $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqq n$, sont choisis de toutes les manière possibles, ce qui signifie que l'ensembles (1) contient $n+1$ fonctions distincts de F ou bien il se réduit a une seule fonction de F. Dans ce dernier cas la fonction $L(F;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n)$ prend la valeur y_{n+1} sur le point x_{n+1}. Les notations sont celles que nous avons utilisées dans les travaux cités ici.

Les points $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$, $1 \leqq k \leqq n-1$ étant donné, dans $[a, b]$, n étant soumis à la condition $n \geqq 2$ et les nombres $v_1, v_2, \ldots, v_k$ étant aussi donnés, on peut considérer l'ensemble

$$S\left(F;\begin{matrix}u_1, & u_2, & \ldots, & u_k\\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_k\end{matrix}\right) \tag{2}$$

des fonctions de F qui sur les points u_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ ont les valeurs respectives v_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. C'est donc l'ensemble

(3) $$\{\varphi \in F \mid \varphi(u_i) = v_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Pour l'ensemble (2) nous avons introduit la dénomination d'épi interpolatoire de l'ensemble F, relatif aux points u_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ et aux nombres v_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. On peut donc, si $n \geqq 2$, considérer pour chaque sous-ensemble $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-1}}$ de points de l'ensemble des points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ l'épi

(4) $$S\begin{pmatrix} F\,; & x_{j_1}, & x_{j_2}, & \ldots, & x_{j_{n-1}} \\ & y_{j_1}, & y_{j_2}, & \ldots, & y_{j_{n-1}} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-1} \leqq n + 1$. Chaque épi de la forme (4) a une intersection non vide avec l'ensemble (1). Cette intersection se réduit chaque fois à deux éléments, dont la différence change son signe sur chacun des points $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-1}}$. Ce changement de signe a comme conséquence un comportement bien déterminé des fonctions de l'ensemble (1) à la droite du point x_{n+1}, quand on suppose $x_{n+1} < b$. Dans [4] nous avons donné un théorème de la moyenne qui contient une description du comportement en question.

En supposant $x_{n+1} < b$ et $x_{n+1} < x_0 \leqq b$, on a la proposition

(5) $$\min_{i=1,2} L(F\,;\ x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\,;\ y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n-1})(x_0) <$$
$$< L(F\,;\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\,;\ y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})(x_0) <$$
$$< \max_{i=1,2} L(F\,;\ x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\,;\ y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n-1})(x_0).$$

La propriété de la moyenne contenue dans les inégalités (5) a une interpretation qu'on peut formuler de la manière suivante : la valeur sur x_0 d'une fonction

(6) $$L(F\,;\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\,;\ y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})$$

de l'ensemble (1) est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur, sur x_0 des fonctions

(7) $$L(F\,;\ x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\,;\ y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n-1})$$

de l'ensemble (1) et qui sont construites avec des points consécutifs $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}$, choisis parmi les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

Comme nous l'avons montré dans [1], la propriété exprimée par les inégalités (5) a une importante application à l'étude des fonctions F-convexes respectivement F-concaves, que nous avons introduites dans [1].

En ceux qui suivent nous donnerons un résultat analogue au cel que nous avons donné dans le travail [1], mais pour un nouveau type d'allure. Pour la comodité des notations nous supposons que les nombres y_i,

$i = 1, 2, \ldots, n+1$, qui sont intervenus plus haut sont les valeurs d'une fonction f sur les points respectifs x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, f étant définie sur $[a, b]$ ou bien sur un ensemble qui contient tous les points qui interviennent dans nos considérations. La fonction de l'ensemble F qui prend les valeurs de f fur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sera notée, comme d'habitude, par $L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)$. En supposant

(8) $$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$$

et $x_{n+1} < x_0 \leqslant b$, nous considérons le sous-ensemble de F qui a comme éléments seulement les fonctions dont la valeur sur x_1 reste fixée et, pour le cas particulier qui nous interesse maintenant, soit $f(x_1)$ cette valeur. Il s'agit de l'épi

(9) $$S\begin{pmatrix} F\,; & x_1 \\ & f(x_1) \end{pmatrix}$$

qui est un ensemble interpolatoire d'ordre $n - 1$ sur chaque sous-intervalle de l'intervalle $[a, b]$ qui ne contient pas le point x_1. On peut donc considérer l'ensemble

(10) $$\mathcal{J}\begin{pmatrix} S\begin{pmatrix} F\,; & x_1 \\ & f(x_1) \end{pmatrix}; & x_2, & x_3, & \ldots, & x_{n+1} \\ & f(x_2), & f(x_3), & \ldots, & f(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

au lieu de l'ensemble (1). Quand il ne se réduit pas à un seul élément, l'ensemble (10) contient n fonctions distinctes, la fonction $L(F\,;\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)$ n'étant pas parmi eux.

LEMME 1. *Si* $L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)(x_{n+1}) > f(x_{n+1})$, *alors* $L(F\,;\ x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)(x_0) < L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)(x_0)$ *et le mombre* $L(F\,;\ x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}\,;\ f)(x_0)$ *satisfait l'inégalité*

(11) $$L(F\,;\ x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)(x_0) < L(F\,;\ x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}\,;\ f)(x_0) \leqq L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)(x_0),$$

quelsque soient $2 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \leqq n + 1$.

LEMME 2. *Si* $L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)(x_{n+1}) < f(x_{n+1})$, *alors*

$$L(F\,;\ x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)(x_0) > L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)(x_0)$$

et

12) $$L(F\,;\ x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)(x_0) > L(F\,;\ x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}\,;\ f)(x_0) > L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)(x_0),$$

quelsque soient $2 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \leqq n + 1$.

Pour la démonstration des lemmes 1 et 2, on remarque que la différence des fonctions $L(F\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\ f)$ et $L(F\,;\ x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)$ change son signe sur les points $x_3, x_4, \ldots, x_n$. Les lemmes en résultent.

Étant donnés maintenant les points

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_m, \quad m \geqq n, \tag{13}$$

où l'on suppose $u_m < b$ et $a < u_1$, soit x^* un point fixé et $a \leqq x^* < u_1$ et soit aussi $u_m < x_0 < b$. Pour chaque système de points

$$u_{i_1},\ u_{i_2},\ \ldots,\ u_{i_{n-1}} \tag{14}$$

où $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \leqq m$, on peut considérer la fonction

$$L(F\,;\, x^*, u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{n-1}}\,;\, f) \tag{15}$$

appartenant à l'épi

$$S\left(F\,;\, \begin{matrix} x^* \\ f(x^*) \end{matrix}\right) \tag{16}$$

THÉORÈME 1. *La valeur sur* x_0 *de la fonction* (15) *satisfait les inégalités*

$$\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, m-n} L(F\,;\, x^*, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+n-2}\,;\, f)(x_0) \leqq \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\leqq L(F\,;\, x^*, u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{n-1}}\,;\, f)(x_0) \leqq \\ &\leqq \max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, m-n} L(F\,;\, x^*, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+n-2}\,;\, f)(x_0). \end{aligned}\right.$$

On obtient la démonstration du théorème 1 à l'aide du procédé contenu dans [1] et en utilisant les lemmes 1 et 2.

Au lieu de l'épi (16) on peut considérer un épi quelconque

$$S\left(F\,;\, \begin{matrix} x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^* \\ f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_k^*) \end{matrix}\right) \tag{18}$$

où $1 \leqq k \leqq n-2$, l'ordre d'interpolation n satisfaisant l'inégalité $n \geqq 3$. Si l'on suppose

$$a \leqq x_1^* < x_2^* < \ldots < x_k^* < u_1$$

et $m \geqq n + 1 - k$ on obtient le

THÉORÈME 2.

$$\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, m-n} L(F\,;\, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+n-k-1}\,;\, f)(x_0) \leqq \tag{19}$$

$$\leqq L(F\,;\, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{n-k}}\,;\, f)(x_0) \leqq$$

$$\leqq \max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, m-n} L(F\,;\, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+n-k-1}\,;\, f)(x_0).$$

Si $F = \mathfrak{P}_{n-1}$, où $\mathfrak{P}_{n-1}$ est l'ensemble des polynomes de degrè au plus égal à $n-1$, alors les inégalités (19) s'expriment avec les valeurs sur le point x_0 des polynomes de Lagrange qui correspondent aux fonctions

de l'ensemble F qui sont intervenues dans le théorème 2. Mais, compte tennant de nos résultats contenus dans [4], à cause d'une certaine propriété de monotonie des différences divisées, les inégalités (19) ont comme conséquence les inégalités

$$\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, m-n} [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+n-k-1}\,;\, f] \leqq \tag{20}$$

$$\leqq [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{n-k}}\,;\, f] \leqq$$

$$\leqq \min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, m-n} [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+n-k-1}\,;\, f],$$

où les points $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_k^*$ restent fixés. Sans fixer ces points on obtient un théorème connu [6].

2. Nous allons donner, maintenant, une application du théorème (19) respectivement des inégalités (20). Dans notre travail [5] nous avons introduit une nouvelle allure des fonctions, nottement une allure qui provient d'un comportement par rapport à l'épi (18). Dans [5], une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ pour la quelle la différence

$$f(x_0) - L(F\,;\, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}\,;\, f)(x_0) \tag{21}$$

est toujours > 0 ($\geqq 0$, $= 0$, $\leqq 0$ respectinement toujours < 0) quelsque soient les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-k}$ de l'intervalle $[a, b]$ et ainsi que

$$x_k^* < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-k} < x_0 \leqq b,$$

s'appelle convexe (nonconcave, polynomialee, nonconvexe respectivement concave) à droitte, par rapport à l'épi (18), les points $x_1^* < x_1^* < \ldots < x_k^*$ étant fixés et ainsi que

$$a \leqq x_1^* < x_2^* < \ldots < x_k^* < b. \tag{22}$$

Comme nous l'avons remarqué cette nouvelle alure est en même temps une généralisation de la stélarité.

Étant donnés les points

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_m, \tag{23}$$

$m \geqq n + 1 - k$ et ainsi que l'ona

$$x_k^* < u_1, \quad u_m \leqq b,$$

les points (22) étant fixés, le théorème 2 a comme conséquence le

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* f *soit convexe (nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) à droitte, par rapport à l'epi* (18), *sur les points* (23) *est qu'elle soit convexe nonconcave, polynomialle, nonconvexe respectivement concave) à droitte, par rapport à l'épi* (18) *sur chaque système*

$$u_j,\ u_{j+1},\ \ldots,\ u_{j+n-k} \tag{24}$$

de points consécutifs choisis parmi les points (23).

Quand on considère le cas $F = \mathfrak{L}_{n-1}$, alors les inégalités (20) nous offrent comme conséquence une proposition analogue à celle contennue dans l'énoncé du théorème 3.

On remarque que le théorème 3 présente un grand interêt. En effet, pour constater la présence d'une des 5 propriétés qui interviennent dans l'enoncé du théorème, sur les points (23) il suffit de verifier sa présence seulement sur chaque système (24) de points consécutifs, de l'ensemble (23) des points. Sur les systèmes $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{n-k+1}}$ de points qui ne sont pas consécutifs cette verification ne doit pas être faitte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Elena Moldovan (Popoviciu), *Asupra unei generalizari a noțiunii de convexitate*, Studii și Cerc. St., Seria Mat. (Cluj), VI, 3–4, 65–73 (1955).

[2] — — *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica (Cluj), 1(24), 49–80 (1959).

[3] Elena Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematica si legatura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, 1972.

[4] — — — *Sur une propriété de monotonie des diférences divisées*, Mathematical Structures, Computational Mathematics, Mathematical Modeling, Sofia, 399–403 (1975).

[5] — , *Sous-ensembles remarquables d'un ensemble, interpolatoire*, Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, 8, 2, (1979).

[6] Tiberiu Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

Reçu le 2. II. 1979.

Str. Dorobanților 40
3400 Cluj-Napoca