MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, Nº 1, 1980, pp. 113—123

LE THÉORÈME DES CONTRACTIONS DANS DES ESPACES SYNTOPOGÈNES

par

RADU PRECUP

(Cluj-Napoca)

1. Le théorème des contractions de Banach pour des espaces métriques a été généralisé pour des espaces localement convexes par G. MARINESCU [7] et ensuite, par. I. COLOJOARA [4] et N. GHEORGHIU [6], pour des espaces uniformes.

Dans ce travail on démontre un théorème de point fixe de même type que celui de Banach pour des espaces encore plus généraux, les espaces syntopogènes ; une extension de ce théorème pour le cas des applications multivoques est aussi donnée.

2. Dans cette section nous rappelons quelques notions de la théorie des espaces syntopogènes développée par A. CSÁSZÁR [5].

Un ensemble X muni d'une famille $\mathcal{S}$ de relations, $<$, définies sur l'ensemble des parties de X, $\mathfrak{P}(X)$, s'appelle espace syntopogène si pour toutes relations $<, <' \in \mathcal{S}$ les conditions suivantes sont vérifiées :

(S1) $\emptyset < \emptyset$ et $X < X$

(S2) $A < B$ entraîne $A \subset B$

(S3) $A' \subset A < B \subset B'$ entraîne $A' < B'$

(S4) $A_i < B_i$, $i = 1, 2$ entraînent $A_1 \cup A_2 < B_1 \cup B_2$ et $A_1 \cap A_2 < < B_1 \cap B_2$

(S5) il existe une relation $<'' \in \mathcal{S}$ telle que $< \cup <' \subset <''$

(S6) il existe une relation $<''' \in \mathcal{S}$ telle que $< \subset <'''^2$

Un espace syntopogène $(X, \mathcal{S})$ s'appelle

— simple, si card $\mathcal{S} = 1$,

— symétrique, si pour toute relation $< \in \mathcal{S}$,

$$A < B \text{ entraîne } X \setminus B < X \setminus A,$$

— parfait, si quellequesoit la relation $< \in \mathcal{S}$ et l'ensemble d'indices I les relations $A_i < B_i$, $i \in I$ entrainent $\bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i$,

— biparfait, s'il est parfait et si de plus $A_i < B_i$, $i \in I$ entraînent $\bigcap_{i \in I} A_i < \bigcap_{i \in I} B_i$.

Un espace syntopogène $(X, \mathcal{S})$ s'appelle

— topologique, s'il est simple et parfait,

— de proximité, s'il est simple et symétrique,

— uniforme, s'il est symétrique et biparfait.

Soit $\mathcal{S} = \{<\}$ et $\mathcal{S}' = \{<'\}$ deux structures syntopogènes sur X ; on dit que $\mathcal{S}'$ et plus fine que $\mathcal{S}$ et on écrit $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ si pour toute $< \in \mathcal{S}$ il existe $<' \in \mathcal{S}'$ tel que $< \subset <'$.

$(X, \mathcal{S})$ et $(X', \mathcal{S}')$ étant deux espaces syntopogènes et $\Gamma : X \to X'$ une fonction, nous disons que Γ est $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-continue si pour toute $<' \in \mathcal{S}'$ il existe $< \in \mathcal{S}$ tel que

$$\text{si } A' <' B' \text{ alors } \Gamma^{-1}(A') < \Gamma^{-1}(B').$$

Une famille $\mathcal{R}$ de sous-ensembles de X s'appelle grille dans X si

(G1) $\mathcal{R} \neq \emptyset$ et $R \neq \emptyset$ quelque soit $R \in \mathcal{R}$

(G2) pour tous $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ il existe $R \in \mathcal{R}$ tel que $R \subset R_1 \cap R_2$.

Une grille $\mathcal{R}$ dans $(X, \mathcal{S})$ s'appelle grille de Cauchy si pour toute relation $< \in \mathcal{S}$ il existe un ensemble $R \in \mathcal{R}$ tel que si $A < B$, les relations $A \cap R \neq \emptyset \neq (X \setminus B) \cap R$ ne sont pas simultanément vraies ; dans un espace syntopogène $(X, \mathcal{S})$, pour tout $x \in X$ on définit la grille des voisinages de x par

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X : \text{il existe } < \in \mathcal{S} \text{ tel que } x < V\}$$

nous disons qu'une grille $\mathcal{R}$ dans $(X, \mathcal{S})$ converge vers le point $x \in X (\mathcal{R} \to x)$ si quelquesoit $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $R \in \mathcal{R}$ tel que $R \subset V$; l'espace $(X, \mathcal{S})$ este complet si toute grille de Cauchy est convergente ; nous disons qu'un espace syntopogène $(X, \mathcal{S})$ est séparé Hausdorff si pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$ il existe $< \in \mathcal{S}$ et $A \subset X$ tels que $x < A$ et $y < X \setminus A$; dans un tel espace toute grille convergente a une seule limite.

Un exemple remarquable de structure syntopogène sur $\mathbf{R}$ est fourni par $\mathcal{S} = \{<_\varepsilon ; \varepsilon > 0\}$ où

$$A <_\varepsilon B \text{ si et seulement si } \sup A + \varepsilon \leq \inf (\mathbf{R} \setminus B).$$

Soit X un ensemble ; une famille φ de fonctions réelles bornées, définies sur X s'appelle famille ordonnatrice sur X si pour tous $f, g \in \varphi$ et $c \in \mathbf{R}$ on a

(01) la fonction constante $c \in \varphi$

(02) $f + c \in \varphi$

(03) $\min(f, g)$, $\max(f, g) \in \varphi$

Nous appellons structure ordonnatrice sur X tout système non vide Φ de familles ordonnatrices sur X ; on a le suivant théorème fondamental dû à J. CZIPSZER [5] : pour tout espace syntopogène $(X, \mathcal{S})$ il existe une structure ordonnatrice Φ sur X telle que la structure syntopogène associée

$$\mathcal{S}_\Phi = \{<_{\varphi,\varepsilon} ; \varphi \in \Phi, \varepsilon > 0\}, \text{ où}$$

$A <_{\varphi,\varepsilon} B$ si et seulement si il existe $f \in \varphi$ tel que

$$f(A) <_\varepsilon \mathbf{R} \setminus f(X \setminus B),$$

soit équivalente à $\mathcal{S}$, c'est-à-dire $\mathcal{S}_\Phi \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\Phi$.

Dans ce qui suit les structures syntopogènes seront identifiées à leurs structures ordonnatrices correspondantes et on écrira (X, Φ) au lieu de $(X, \mathcal{S})$ si $\mathcal{S}_\Phi$ est équivalente à $\mathcal{S}$; à remarquer que la structure ordonnatrice Φ pour laquelle $\mathcal{S}_\Phi$ est équivalente à $\mathcal{S}$ n'est pas univoque déterminée par $\mathcal{S}$.

3. Soit (X, Φ) un espace syntopogène et $\Gamma : X \to X$ une fonction $(\mathcal{S}_\Phi, \mathcal{S}_\Phi)$-continue dont la continuité est définie par les fonctions $\alpha : \Phi \to (0, +\infty)$ et $\beta : \Phi \to \Phi$ de la facon suivante

$$A <_{\varphi,\varepsilon} B \text{ entraîne } \Gamma^{-1}(A) <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} \Gamma^{-1}(B), \ \varphi \in \Phi, \ \varepsilon > 0 ; \tag{1}$$

nous disons dans ce cas que la fonction Γ est $\alpha - \beta - \Phi$-continue.

Nous disons qu'une famille de suites $\{(a_n^{(i)}) ; i \in I\}$ converge uniformément vers la famille $\{a^{(i)} ; i \in I\}$ si

(2) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N(\varepsilon)$ (indépendant de i) tel que

$$|a_n^{(i)} - a^{(i)}| < \varepsilon, \ n \geq N(\varepsilon), \ i \in I.$$

Une famille de séries sera nommée uniformément convergente si la famille de suites des sommes partielles converge uniformément.

Soit (X, Φ) un espace syntopogène, Hausdorff, complet relativement aux suites et $\Gamma : X \to X$ une fonction $\alpha - \beta - \Phi$-continue ; nous pouvons énnoncer

THÉORÈME 1. (i) *S'il existe* $x_0 \in X$ *tel que pour tout* $\varphi \in \Phi$ *la famille de séries*

(3) $$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\varphi)\alpha\circ\beta(\varphi)\cdot\ldots\cdot\alpha\circ\beta^n(\varphi)|f_n(x_0)-f_n(\Gamma(x_0))|\,;\right.$$

$$\left. f_n \in \beta^{n+1}(\varphi),\ n=0,\ 1,\ \ldots\right\}$$

soit uniformément convergente alors, $F_\Gamma \neq \emptyset$ *(F_Γ étant l'ensemble des points fixes de* Γ*) et la suite des itérations de* Γ *calculées sur* x_0 *converge vers un point fixe de* Γ.

(ii) *si en plus, pour tout* $\varphi \in \Phi$ *et pout tous,* $x,\ y \in X$ *la famille de suites*

(4) $$\{(\alpha(\varphi)\alpha\circ\beta(\varphi)\cdot\ldots\cdot\alpha\circ\beta^n(\varphi)|f_n(x)-f_n(y)|)\,;$$

$$f_n \in \beta^{n+1}(\varphi),\ n=0,1,\ldots\}$$

converge uniformément vers 0 *alors on a en plus* card $F_\Gamma = 1$.

iii) *Si pour tout* $\varphi \in \Phi$ *et pour tous* $x,\ y \in X$ *la famille de séries*

(5) $$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\varphi)\alpha\circ\beta(\varphi)\cdot\ldots\cdot\alpha\circ\beta^n(\varphi)|f_n(x)-f_n(y)|\,;\right.$$

$$\left. f_n \in \beta^{n+1}(\varphi),\ n=0,\ 1,\ \ldots\right\}$$

est uniformément convergente alors card $F_\Gamma = 1$ *et la suite des itérations de* Γ *calculées sur un point arbitraire de* X *converge vers le seul point fixe de* Γ.

Démonstration. Considérons la grille-suite $\mathcal{R} = \{R_n\,;\ n \in \mathbf{N}\}$

$$R_n = \{\Gamma^n(x_0),\ \ldots,\ \Gamma^{n+p}(x_0),\ \ldots\},\ n=1,2,\ \ldots$$

$\mathcal{R}$ est une grille de Cauchy, c'est-à-dire pour toute $\varphi \in \Phi$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_{\varphi,\varepsilon} \in \mathbf{N}$ tel que $A <_{\varphi,\varepsilon} B$ implique que $A \cap R_{n_{\varphi,\varepsilon}} \neq \emptyset \neq (X\setminus B)\cap R_{n_{\varphi,\varepsilon}}$ ne sont pas simultanément vraies ; supposons le contraire ; c'est-à-dire qu'il existe $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il existe A_n, B_n avec

(6) $$A_n <_{\varphi,\varepsilon} B_n \text{ et } A_n \cap R_n \neq \emptyset \neq (X\setminus B_n)\cap R_n.$$

La formule $A_n <_{\varphi,\varepsilon} B_n$ implique

(7) il existe $f_n \in \varphi$ tel que $f_n(A_n) <_\varepsilon \mathbf{R}\setminus f_n(X\setminus B_n)$.

D'autre part (6) implique (pour tout n fixé) l'existence de $p,\ q \in \mathbf{N}$, $p,\ q \geq n$ tels que $\Gamma^q(x_0) \in A_n$ et $\Gamma^q(x_0) \in X\setminus B_n$ d'où, à cause de (*S*3) et (7) on a

(8) $$f_n(\Gamma^p(x_0)) + \varepsilon \leq f_n(\Gamma^q(x_0)).$$

Donc pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il existe $f_n \in \varphi$ et $p,\ q \in \mathbf{N}$, $p,\ q \geq n$ tels que

(9) $$f_n(\Gamma^q(x_0)) - f_n(\Gamma^p(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Dans la suite, soit $f \in \varphi$, $n \in \mathbf{N}$ et $\theta = |f(\Gamma^{n+2}(x_0)) - f(\Gamma^{n+1}(x_0))|$; on a

$$\theta = f(\Gamma^{n+2}(x_0)) - f(\Gamma^{n+1}(x_0)) \text{ ou } \theta = f(\Gamma^{n+1}(x_0)) - f(\Gamma^{n+2}(x_0))\,;$$

dans le premier cas on a

(10) $$\Gamma^{n+1}(x_0) <_{\varphi,\theta} X\setminus\Gamma^{n+2}(x_0)$$

et dans le dernier cas

(11) $$\Gamma^{n+2}(x_0) <_{\varphi,\theta} X\setminus\Gamma^{n+1}(x_0)$$

(θ étant supposé positif).

Supposons (10) ; Γ étant $\alpha - \beta - \Phi$-continue on a

$$\Gamma^{-1}(\Gamma^{n+1}(x_0)) <_{\beta(\varphi),\frac{\theta}{\alpha(\varphi)}} \Gamma^{-1}(X\setminus\Gamma^{n+2}(x_0))$$

d'où, suivant (*S*3),

$$\Gamma^n(x_0) <_{\beta(\varphi),\frac{\theta}{\alpha(\varphi)}} X\setminus\Gamma^{n+1}(x_0),$$

ce qui implique qu'il existe $f_n \in \beta(\varphi)$ tel que

$$f_n(\Gamma^{n+1}(x_0)) - f_n(\Gamma^n(x_0)) \geq \frac{\theta}{\alpha(\varphi)}$$

ou

(12) $$0 < f(\Gamma^{n+2}(x_0)) - f(\Gamma^{n+1}(x_0)) \leq \alpha(\varphi)(f_n(\Gamma^{n+1}(x_0)) - f_n(\Gamma^n(x_0))).$$

De façon analogue sous l'hypothèse (11) on déduit

(13) $$0 < f(\Gamma^{n+1}(x_0)) - f(\Gamma^{n+2}(x_0)) \leq \alpha(\varphi)(f_n(\Gamma^n(x_0)) - f_n(\Gamma^{n+1}(x_0))),$$

et par conséquent on a (pour $\theta = 0$ inclusivement) pour tous $f \in \varphi$ et $n \in \mathbf{N}$ il existe $f_n \in \beta(\varphi)$ tel que

(14) $$|f(\Gamma^{n+2}(x_0)) - f(\Gamma^{n+1}(x_0))| \leq \alpha(\varphi)|f_n(\Gamma^{n+1}(x_0)) - f_n(\Gamma^n(x_0))|$$

d'où, pour toute $f \in \varphi$ et pour tous $q,\ r \in \mathbf{N}$,

(15) $$\sum_{i=q-1}^{q+r-2} \alpha(\varphi)\alpha\circ\beta(\varphi)\cdot\ldots\cdot\alpha\circ\beta^i(\varphi)|f_i(\Gamma(x_0)) - f_i(x_0)| \geq$$

$$\geq |f(\Gamma^{q+r}(x_0)) - f(\Gamma^q(x_0))| \text{ où } f_i \in \beta^{i+1}(\varphi),\ i = q-1,\ \ldots,\ q+r-2,$$

d'où, à cause de l'hypothèse sur la famille de séries (3), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $q_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour chaques $r \in \mathbf{N}$ et $q \geq q_\varepsilon$ on a

(16) $$|f(\Gamma^{q+r}(x_0)) - f(\Gamma^q(x_0))| < \varepsilon.$$

Posons dans (9) $n = q_\varepsilon$ déterminé par (16) ; nous obtenons

il existe $f_{q_\varepsilon} \in \varphi$, p_0, $q_0 \in \mathbb{N}$, p_0, $q_0 \geqslant q_\varepsilon$ tels que

$$f_{q_\varepsilon}(\Gamma^{q_0}(x_0)) - f_{q_\varepsilon}(\Gamma^{p_0}(x_0)) \geqslant \varepsilon. \tag{17}$$

Ainsi (16) et (17) sont en contradiction ce qui démontre que $\mathfrak{R}$ est une grille-suite de Cauchy ; (X, Φ) complet relativement aux suites implique qu'il existe $x^* \in X$ tel que $\mathfrak{R} \to x^*$; Γ étant continue on a $\Gamma(\mathfrak{R}) \to \Gamma(x^*)$ [5] et tenant compte du fait que $(\mathfrak{R} = \Gamma\ (\mathfrak{R}) \cup \{R_1\}$ et que (X, Φ) est Hausdorff on déduit que $\Gamma(x^*) = x^*$, ce qui demontre (i).

Pour démontrer la deuxième partie du théorème supposons $x^*, y^* \in F_\Gamma$, $x^* \neq y^*$.
Puisque (X, Φ) est Hausdorff on déduit aisément qu'il existe $\varphi \in \Phi$ et $f \in \varphi$ tels que $f(x^*) \neq f(y^*)$; soit par exemple $\varepsilon = f(y^*) - f(x^*) > 0$; on a $x^* <_{\varphi,\varepsilon} X \setminus y^*$ ce qui implique

$$x^* \setminus \in \Gamma^{-1}(x^*) <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} \Gamma^{-1}(X \setminus y^*) = X \setminus \Gamma^{-1}(y^*) \subset X \setminus y^* \tag{18}$$

$$\text{d'où } x^* <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} X \setminus y^*,$$

ou

$$\text{il existe } f_1 \in \beta(\varphi) \text{ tel que } f_1(y^*) - f_1(x^*) \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)} \tag{19}$$

En répétant le même raisonnement

$$\text{il existe } f_2 \in \beta^2(\varphi) \text{ telle que } f_2(y^*) - f_2(x^*) \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi) \alpha \circ \beta(\varphi)} \tag{20}$$

et en général, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{il existe } f_n \in \beta^n(\varphi) \text{ telle que } f_n(y^*) - f_n(x^*) \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi) \cdot \ldots \cdot \alpha \circ \beta^n(\varphi)} \tag{21}$$

ou encore

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $f_n \in \beta^n(\varphi)$ tel que

$$\alpha(\varphi) \alpha \circ \beta(\varphi) \cdot \ldots \cdot \alpha \circ \beta^n(\varphi) |f_n(y^*) - f_n(x^*)| \geqslant \varepsilon \tag{22}$$

ce qui contredit l'hypothèse sur la famille de suites (4)

La troisième partie du théorème résulte de (i) et (ii).

Particularisations du Théorème 1

Soit (X, Φ) un espace syntopogène, Hausdorff, complet relativement aux suites, $\alpha : \Phi \to (0, +\infty)$, $\beta : \Phi \to \Phi$, deux fonctions et soit encore $\Gamma : X \to X$ une fonction $\alpha - \beta - \Phi$-continue

a) si Φ satisfait à la condition :

il existe x_0, $y_0 \in X$ tels que pour toute $\varphi \in \Phi$ on a

$$\sup \{|f(x_0) - f(y_0)| \,;\, f \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \beta^j(\varphi)\} < +\infty, \tag{23}$$

où α et β satisfont à

$$\sup \{\alpha \circ \beta^j(\varphi) \,;\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} < 1 \text{ pour chaque } \varphi \in \Phi, \tag{24}$$

et Γ satisfait à

$$\Gamma(x_0) = y_0 (\Gamma(y_0) = x_0) \tag{25}$$

alors, Γ a au moins un point fixe, la limite de la suite des itérations de Γ calculées sur x_0 (respectivement y_0).

En (23) et (24) on peut prendre par exemple α, la fonction constante α, $0 < \alpha < 1$ et $\beta = 1_\Phi$.

b) si

$$\sup \{|f(x) - f(y)| \,;\, f \in \varphi\} < +\infty \text{ pour tous } x, y \in X \text{ et } \varphi \in \Phi \tag{26}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\varphi) \cdot \ldots \cdot \alpha \circ \beta^n(\varphi) \sup \{|f(x) - f(y)| \,;\, f \in \beta^{n+1}(\varphi)\} < +\infty \tag{27}$$

pour tous x, $y \in X$ et $\varphi \in \Phi$,

alors la proposition (iii) du Théorème *1* est vraie.

c) si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\varphi) \alpha \circ \beta(\varphi) \cdot \ldots \cdot \alpha \circ \beta^n(\varphi) < +\infty \text{ pour chaque } \varphi \in \Phi \tag{28}$$

et

$$\sup \left\{|f(x) - f(y)| \,;\ f \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \beta^j(\varphi)\right\} < +\infty \text{ pour tous } x, y \in X \text{ et } \varphi \in \Phi \tag{29}$$

alors nous sommes encore dans le cas b).

Remarques au Théorème 1 *et à ses particularisations*

1) Associons à la structure syntopogène Φ sur X la famille des écarts sur $X\{d_f \,;\, f \in \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi\}$ où, $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ pour tous x, $y \in X$, et la structure syntopogène uniforme corespondante $\mathcal{S}^0_\Phi = \{<_{d_f, \varepsilon} \,;\, f \in \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi,\ \varepsilon > 0\}$ où $A <_{d_f, \varepsilon} B$ si et seulement si $d_f(x, y) \geqslant \varepsilon$ pour

chaques $x \in A$ et $y \notin B$. $\mathcal{S}^0_\Phi$ n'est pas en général comparable, au sens de la relation de finesse, à $\mathcal{S}_\Phi$; $\mathcal{S}^0_\Phi$ est encore Hausdorff mais on ne peut rien dire sur sa complètitude relativement aux suites ; les hypothèses sur les familles (3), (4), (5) sont des conditions de contraction du même type que celui de [6], formulées relativement à la structure uniforme $\mathcal{S}^0_\Phi$. Cependant le point fixe est limite en $\mathcal{S}_\Phi$ de la suite de sintérations de Γ.

2) Pendant que dans le cas général les conditions de contraction sont formulées relativement à la structure uniforme $\mathcal{S}^0_\Phi$, en général non comparable à $\mathcal{S}_\Phi$, dans le cas c) elles peuvent être formulées relativement à une structure uniforme plus fine que $\mathcal{S}_\Phi$, notée $\mathcal{S}_d$ et associée à la famille des écartes $\{d_\varphi ;\ \varphi \in \Phi\}$ où

$$d_\varphi(x, y) = \sup \{|f(x) - f(y)| ;\ f \in \varphi\} \text{ pour tous } x, y \in X.$$

$\mathcal{S}_d$ est séparée Hausdorff mais sa complétitude relativement aux suites reste encore indécise ; de plus, dans ce cas, Γ devient $(\mathcal{S}_d, \mathcal{S}_d)$-continue, plus précisément

$$d_\varphi(x, y) \geqslant \varepsilon \text{ implique } d_{\beta(\varphi)}(u, v) \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)} \tag{30}$$

pour chaques $u \in \Gamma^{-1}(x)$ et $v \in \Gamma^{-1}(y)$

d'où

$$d_\varphi(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leqslant \alpha(\varphi)\ d_{\beta(\varphi)}(x, y) \text{ pour tous } x, y \in X. \tag{31}$$

Maintenant, il est clair que (28), (29) nous conduisent précisément à la condition de contraction de [6], formulée cette fois relativement à $\mathcal{S}_d$; mais l'indécibilité sur la complétitude de $\mathcal{S}_d$ nous empêche d'appliquer ici, dans le cas le plus général, les résultats de [6] ; c'est pour cela qu'on obtient le point fixe encore en $\mathcal{S}_\Phi$.

La remarque 2) reste valable pour le cas b).

3) Dans le cas b) (et donc dans le cas c), aussi) sous l'hypothèse : $\mathcal{S}_d$ complète relativement aux suites, nous obtenons la généralisation du théorème des contractions donnée par N. GHEORGHIU [6].

4) S'il existe $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 2$ tel que

$$\beta^p = \beta \tag{32}$$

alors l'hypothèse sur (4) et β surjective impliquent (26) ; une condition du type (32) s'impose en [4] et [2] ; à remarquer que si card $\Phi < \infty$ alors (32) est nécessairement vérifiée.

4. Soit X un ensemble quelconque et $\Gamma : X \to \mathfrak{P}(X)$ une application multivoque sur X ; pour un sous-ensemble $A \subset X$ soit

$$\Gamma_-^{-1}(A) = \{x \in X : \Gamma(x) \cap A \neq \varnothing\},\quad \Gamma_+^{-1}(A) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset A\}.$$

Dans la suite $P(X)$ désigne la famille des parties nevides de X.

Soit (X, Φ) un espace syntopogène, Hausdorff, complet relativement aux suites, $\alpha : \Phi \to (0, +\infty)$, $\beta : \Phi \to \Phi$, deux fonctions et $\Gamma : X \to P(X)$ une application multivoque sur X pour laquelle quelques soient $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$ on a que

$$A <_{\varphi, \varepsilon} B \text{ entraîne } \Gamma_-^{-1}(A) <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} \Gamma_+^{-1}(B) ; \tag{33}$$

Dans ses hypothèses il est vrai le théorème suivant pour des applications multivoques :

THÉORÈME 2. (i') *S'il existe* $x_0 \in X$ *et* $x_1 \in \Gamma(x_0)$ *tels que pour tout* $\varphi \in \Phi$ *la famille de séries*

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\varphi) \cdot \ldots \cdot \alpha \circ \beta^n(\varphi) |f_n(x_0) - f_n(x_1)| ;\ f_n \in \beta^{n+1}(\varphi),\ n = 0, 1, \ldots\right\} \tag{3'}$$

converge uniformément alors, $F_\Gamma \neq \varnothing$ *et un point fixe de* Γ *peut être obtenu comme limite de la suite des itérations d'une sélection quelconque de* Γ *dont les premiers deux termes sont* x_0 *et* x_1.

(ii') *si en plus pour tout* $\varphi \in \Phi$ *et pour tous* $x, y \in X$ *la famille de suites* (4) *converge uniformément vers* 0 *alors on a en plus* card $F_\Gamma = 1$.

(iii') *Si pour tout* $\varphi \in \Phi$ *et pour tous* $x, y \in X$ *la famille* (5) *converge uniformément alors* card $F_\Gamma = 1$, *l'unique point fixe de* Γ *peut être obtenu comme limite de la suite des itérations d'une sélection quelconque de* Γ *calculées sur un point arbitraire de* X *et* $\Gamma(x^*) = \{x^*\} (x^* \in F_\Gamma)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\Gamma_1 : X \to X$, $\Gamma_1(x) \in \Gamma(x)$, $x \in X$, $\Gamma_1(x_0) = x_1$, une sélection de Γ ; sous l'hypothèse de (i') Γ_1 est $\alpha - \beta - \Phi$-continue ; en effet, soit $\varphi \in \Phi$, $\varepsilon > 0$ et $A <_{\varphi,\varepsilon} B$; en vertue de (33) on a

$$\Gamma_-^{-1}(A) <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} \Gamma_+^{-1}(B),$$

mais $\Gamma^{-1}(A) \subset \Gamma_-^{-1}(A)$ et $\Gamma_+^{-1}(B) \subset \Gamma_1^{-1}(B)$ d'où

$$\Gamma_-^{-1}(A) <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} \Gamma_1^{-1}(B).$$

Nous sommes donc dans les conditions du Théorème 1 pour la fonction Γ_1. Pour démontrer l'unicité du point fixe en (ii') et (iii') supposons le contraire : $x^*, y^* \in F_\Gamma$, $x^* \neq y^*$; (X, Φ) Hausdorff implique qu'il existe $\varphi \in \Phi$ et $f \in \varphi$ tels que $f(x^*) \neq f(y^*)$; soit $= f(y^*) - f(x^*) > 0$; on a $x^* <_{\varphi,\varepsilon} X \setminus y^*$ d'où

$$\Gamma^{-1}(x^*) <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} \Gamma_+^{-1}(X \setminus y^*).$$

Mais $x^* \in \Gamma_{-}^{-1}(x^*)$ et $\Gamma_{+}^{-1}(X \setminus y^*) \subset X \setminus y^*$ et par conséquent

$$x^* <_{\beta(\varphi), \frac{\varepsilon}{\alpha(\varphi)}} X \setminus y^*.$$

On répète ensuite le raisonnement fait dans la démonstration du Théorème 1.

Pour justifier la relation $\Gamma(x^*) = \{x^*\}$ sous l'hypothèse de (iii') supposons le contraire : $y \in \Gamma(x^*)$, $y \neq x^*$; toute sélection Γ_1 de Γ ayant un point fixe il résulte que la sélection Γ_y de Γ pour laquelle $\Gamma_y(x^*) = y$ a aussi un point fixe x_y^*; évidemment $x_y^* \in F_\Gamma$ et $x_y^* \neq x^*$ ce qui contredit l'unicité du point fixe.

Remarque. La propriété (33) d'une application multivoque est très forte ; elle implique la sémicontinuité inférieure et aussi la sémicontinuité supérieure de l'application.

5. Illustrons la méthode de travail aux structures syntopogènes par un exemple sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels. Définissons la structure ordonnatrice $\Phi = \{\varphi\}$ formée par la seule famille ordonnatrice φ, en choisissant comme φ, l'ensemble des fonctions bornées, continues, linéaires par morceaux ayant la pente 0 ou ± 1. Φ induit sur $\mathbf{R}$ une structure syntopogène $\mathcal{S}_\Phi$, séparée Hausdorff et complète relativement aux suites. Il est clair que

(34) pour tous $f \in \varphi$, $x, y \in \mathbf{R}$ on a $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$,

d'où la vérification de (29) (avec $\beta = 1_\Phi$).

Soit $\Gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction α-contractante $(0 < \alpha < 1)$ au sens usuel ; montrons que Γ est $\alpha - 1_\Phi - \Phi$-continue (α étant la fonction constante α) ; soit pour cela $A <_{\varphi, \varepsilon} B$, d'où

$$\sup f(A) + \varepsilon \leq \inf f(\mathbf{R} \setminus B)$$

pour un certain $f \in \varphi$, ou encore

$f(y) - f(x) \geqslant \varepsilon$ pour un certain $f \in \varphi$ et tous $x \notin A$ et $y \in B$, et compte tenu de (34) on a

(35) pour chaques $x \in A$, $y \notin B$: $|y - x| \geq \varepsilon$.

Soit la partition de $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} A_k, \quad A_k = [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$$

et $Z_1 = \{k \in \mathbf{Z} : A_k \cap \Gamma^{-1}(\mathbf{R} \setminus B) \neq \emptyset\} = \{k_i : i \in I\}$ où $I \subset \mathbf{Z}$ est un sous-ensemble de nombres consecutifs ; considérons

$$B_i = \Big(\bigcup_{k_i < j < k_{i+1}} A_j\Big) \cap \Gamma^{-1}(A), \; i, \; i + 1 \in I$$

$$B_{i^0} = \Big(\bigcup_{k_{i^0} < J} A_j\Big) \cap \Gamma^{-1}(A) \text{ si } i^0 \text{ est maximal pour } I,$$

$$B_{i_0} = \Big(\bigcup_{j < k_{i_0+1}} A_j\Big) \cap \Gamma^{-1}(A) \text{ si } i_0 + 1 \text{ est minimal pour } I,$$

et

$$I^* = \begin{cases} I, \text{ si } \inf I = -\infty \\ I \cup \{i_0\} \text{ si } \inf I = i_0 + 1. \end{cases}$$

Nous définissons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{\alpha}, \; x \in [\inf B_i, \sup B_i], \; i \in I^* \\ -\frac{\varepsilon}{\alpha} + x - \sup B_i, \; x \in \left[\sup B_i, \sup B_i + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right), \; i \in I^* \\ -\frac{\varepsilon}{\alpha} - x + \inf B_i, \; x \in \left(\inf B_i - \frac{\varepsilon}{\alpha}, \inf B_i\right], \; i \in I^* \\ 0 \qquad \text{en rest.} \end{cases}$$

En vertu de (34) f est bien définie et continue et de plus bornée, donc $f \in \varphi$; mais $f(x) = -\frac{\varepsilon}{\alpha}$ pour tout $x \in \Gamma^{-1}(A)$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma^{-1}(\mathbf{R} \setminus B)$ et par conséquent

$$\Gamma^{-1}(A) <_{\varphi, \frac{\varepsilon}{\alpha}} \Gamma^{-1}(B) ;$$

Nous sommes donc dans le cas particulier c) du Théorème 1. Il est à remarquer que la suite des itérations de Γ calculées sur un point x, quelconque, converge vers le point fixe non seulement relativement à $\mathcal{S}_\Phi$ mais aussi au sens usuel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Avramescu, C., *Teoreme de punct fix pentru aplicații multivoce contractante definite în spații uniforme.* Analele Univ. Craiova, **1**, 63–67 (1970).

[2] Bărbulescu, I., *Asupra unei teoreme de punct fix pentru aplicații multivoce în spații uniforme,* Analele Univ. Craiova, 2 (1974).

[3] Berge, C., *Espaces topologiques, Fonctions multivoques,* Dunod, Paris (1966).

[4] Colojoara, I., *Asupra unei teoreme de punct fix în spații uniforme complete,* Com. Acad. R.P.R., XI, 281–283 (1961).

[5] Császár, Á., *Fondements de la topologie générale,* Gauthier-Villars, Paris (1960).

[6] Gheorghiu, N., *Teorema contracțiilor în spații uniforme,* St. Cerc. Mat., 19, 1, 131–135 (1967).

[7] Marinescu, G., *Spații vectoriale topologice și pseudo-topologice,* Ed. Acad., București, (1959).

Reçu, 13. XII. 79