MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 129–132

REMARQUES SUR CERTAINS PROBLÈMES DE PROGRAMMATION PSEUDO-LINÉAIRE PAR MORCEAUX

par

ŞTEFAN ŢIGAN

(Cluj-Napoca)

1. Soit $h: D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}^2$, $D \neq \emptyset$, une fonction continue sur D et nondécroisante par rapport à chaque des deux variables.

Sous le terme de problème de programmation pseudo-linéaire par morceaux on entend le problème de programmation mathématique suivant :

PSPL. Déterminer :

$$v = \max \min_{i \in M} h(c_i x + e_i,\ dx + q) \tag{1.1}$$

sous les conditions :

$$Ax = b,\ x \geq 0, \tag{1.2}$$

où :

$$M = \{1, 2, \ldots, m\},\ c_i \in \mathbf{R}^n,\ e_i \in \mathbf{R}(i \in M),\ d \in \mathbf{R}^n,\ q \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R}^s,$$

et A est une matrice de dimension $s \times n$.

Concernant le problème PSPL on suppose que l'ensemble de ses solutions admissibles, c'est-à-dire :

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b,\ \ x \geq 0\}, \tag{1.2'}$$

est nonvide et borné et que :

$$\{(c_i x + e_i,\ dx + q) \in \mathbf{R}^2 : x \in S\} \subseteq D.$$

On désignera par f la fonction objective du problème PSPL, c'est-à-dire :

$$f(x) = \min_{i \in M} h(c_i x + e_i,\ dx + q).$$

Dans cette section on montrera que la résolution du problème PSPL peut être réduit à la résolution des „m" problèmes de programmation pseudo-linéaire (voir [2]), en employant un procedé de décomposition similaire à celui consideré par R. A. BLAU [1].

Dans ce but, pour chaque $i \in M$, nous considérons le suivant problème de programmation pseudo-linéaire asocié au problème PSPL :

PPL (i). Déterminer :

$$v_i = \max h(c_i x + e_i,\ dx + q)$$

sous les conditions (1.2) et :

$$(1.3)\qquad (c_i - c_k)x \leq e_k - e_i,\ \forall k \in M \setminus \{i\}.$$

On denote par S_i l'ensemble des solutions admissibles du problème PPL(i). Si $S_i = \emptyset$, on prend $v_i = -\infty$.

Le théorème suivant établit la liaison entre le problème PSPL et les problèmes associés PPL(i).

THÉORÈME 1.1. *Entre les valeurs optimales des problèmes* PSPL *et* PPL(i) *il y a la relation* :

$$(1.4)\qquad v = \max_{i \in M} v_i.$$

Démonstration : Désignons par S_i' l'ensemble des éléments x de S, vérifiant les contraintes :

$$(1.5)\qquad h(c_i x + e_i,\ dx + q) \leq h(c\ x + e_k,\ dx + q),\ k \in M \setminus \{i\}.$$

On voit aisement que :

$$(1.6)\qquad f(x) = h(c_i x + e_i,\ dx + q),\ \forall x \in S_i',$$

et, aussi, que :

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i'.$$

Mais puisque la fonction h est nondécroisante par rapport à la première variable, les inégalités (1.5) sont équivalentes à (1.3). Par conséquent :

$$S_i = S_i',\ \forall i \in M,$$

d'où, en tenant compte de (1.6), il résulte sans dificulté la relation (1.4)

On déduit donc, que la résolution du problème de programmation pseudo-linéaire par morceaux PSPL peut être faite d'après le schéma suivante : on résoud les problèmes pseudo-linéaires PPL(i) pour tout $i \in M$, et puis on choisit comme solution optimale du problème PSPL, la solution optimale du problème PPL(k), tel qu'on a :

$$v_k = \max_{i \in M} v_i.$$

Pour la résolution des problèmes de programmation pseudo-linéaire PPL(i) on peut utiliser, par exemple, l'algorithme paramétrique presenté dans les travaux [2] ou [3].

2. Dans cette section, en supposant que la fonction h est linéaire par rapport à la première variable, on montrera que la résolution du problème de programmation fractionnaire pseudo-linéaire par morceaux, peut être reduite à la résolution succesive des certains problèmes de programmation pseud-linéaire par morceaux.

Le problème de programmation fractionnaire pseudo-linéaire par morceaux, qu'on va étudier par la suite est le suivant :

PSFPL. Déterminer :

$$v = \max \min_{i \in M} \left\{ \frac{h(c_i x + e_i,\ dx + q) + a}{h(c_i' x + e_i',\ dx + q) + a'} \right\}$$

sous les conditions (1.2).

Dans la formulation du problème PSFPL on considère que d, c_i et c_i' sont des éléments donnés de $\mathbf{R}^n$ et a, a', q, e_i, e_i' sont des nombres réels donnés.

De même, nous supposons que :

$$(2.1)\qquad h(c_i' x + e_i',\ dx + q) > 0, \text{ pour tout } x \in S \text{ et } i \in M,$$

et que l'ensemble S des solutions admissibles du problème PSFPL (voir (1.2')) est nonvide et borné.

Par la suite, pour tout nombre réel t et pour tout $x \in S$ on désigne :

$$F(t,\ x) = \min_{i \in M} (h(c_i x + e_i,\ dx + q) - th(c_i' x + e_i',\ dx + q)) + a - ta',$$

et :

$$V(t) = \max \{F(t,\ x) : x \in S\}.$$

Remarque : Si la fonction h est linéaire par rapport à la première variable, alors on a :

$$(2.2)\qquad F(t,\ x) = \min_{i \in M} h((c_i - tc_i')x + e_i - te_i',\ dx + q) + a - ta'.$$

L'adaptation, au cas du problème PSFPL, de l'algorithme pour la résolution du problème général d'optimisation fractionnaire par morceaux (obtenu dans le travail [4]), consiste dans les étapes suivantes :

I. On détermine $x_0 \in S$. On peut faire cela, par exemple, en employant l'algorithme simplexe.

II. On prend :

$$t_n = \min_{i \in M} \left\{ \frac{h(c_i x_{n-1} + e_i, dx_{n-1} + q) + a}{h(c_i' x_{n-1} + e_i', dx_{n-1} + q) + a'} \right\}.$$

III. On détermine $x_n \in S$, tel que :

$$\min_{i \in M} h((c_i - t_n c_i') x + e_i - t_n e'_i, dx + q) + a - t_n a' = V(t_n).$$

IV. Si $V(t_n) = 0$, alors x_{n-1} est une solution optimale du problème PSFPL et l'algorithme s'arrête.

V. Si $V_n(t) > 0$, alors on passe à l'étape II avec $n + 1$ au lieu de n.

Remarque. La plus dificile étape de l'algorithme est l'étape III, qui revient à la résolution d'un problème de programmation pseudo-linéaire par morceaux, et qui, à son tour, peut être réduit à la résolution des „m" problèmes de programmation pseudo-linéaire.

On a démontré dans [4], que l'algorithme présenté ci-dessus converge, c'est-à-dire, on a lieu :

$$\lim_{n \to \infty} t_n = v,$$

et il existe une sous-suite (x_{j_n}) de la suite (x_n), convergente vers une solution optimale du problème PSFLP.

Pour que l'algorithme s'arrête sûrement après un nombre fini d'itérations il sufit que les étapes IV et V soient remplacées par les suivantes :

IV'. Si $V(t_n) < u$, alors l'algorithme s'arrête, et x_{n-1} est une approximation de la solution eptimale du problème PSFPL.

V'. Si $V(t_n) \geq u$, alors on passe à l'étape II avec $n + 1$ au lieu de n.

Dans les étapes IV' et V', u est un nombre réel positif qui peut être choisi en fonction de l'approximation désirée dans la résolution du problème.

RÉFÉRENCES

[1] Blau, R. A., *Decomposition Techniques for the Chebyshev Problem.* Opns. Res., **21** (1973), 1157–1163.

[2] Dragomirescu M., Maliţa M., *Programare neliniară*, Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1972.

[3] Geoffrion, A., *Solving bi-criterion Mathematical Programs,* Opns. Res. **15** (1967), 39–54.

[4] Ţigan, Ş., *Sur une méthode pour la résolution d'un problème d'optimisation par segments,* Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, **4** (1975) , 87–97.

Reçu le 6. XII. 1979

Centrul Teritorial de Calcul Electronic
3400 Cluj-Napoca
Str. Republicii nr. 107