MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 133—150

INTERVALLRECHNUNG ÜBER VOLLSTÄNDIG SCHWACH GEORDNETEN VEKTOIDEN

von

CH. ULLRICH

(Karlsruhe)

0. Einleitung

In [9] betrachtet der Verfasser ein Konzept zur Erfassung der rundungsinvarianten Eigenschaften linearer Räume. Es wird dazu zunächst die Struktur des schwach geordneten bzw. geordneten (multiplikativen) Vektoides $\{V, R, \leqq\}$ definiert und deren Eigenschaften ausführlich diskutiert. Anschließend zeigt sich dann, daß diese Struktur beim Übergang zu speziellen symmetrischen Rastern mittels optimaler symmetrischer Rundungen erhalten bleibt. Dabei waren die Axiome des Vektoides so angelegt, daß wir, wie die vorliegende Arbeit zeigen soll, auch die darüber aufgebauten Intervallräume ohne weiteres damit beschreiben können. Die vorliegende Struktur bildet also eine Verallgemeinerung der bisher in verschiedenen Arbeiten (siehe etwa [1], [2], [6], [7]) betrachteten Rechteckintervallarithmetik über linearen Räumen, welche auch die Beschreibung der auf Rechenanlagen vorliegenden Eigenschaften solcher Räume gestattet. Für die Intervallrechnung über dem zugrundeliegenden schwach geordneten Ringoid $\{R, +, ., \leqq\}$ ziehen wir die in [5] gewonnenen Ergebnisse heran.

Zunächst geben wir einige Eigenschaften des Intervallraumes über einer geordneten Menge $\{\mathrm{M}, \leqq\}$ wieder ([3], [5]): Es sei **PM** die Potenzmenge über M und **IM** die Teilmenge der Intervalle

$$A := [a_1;\ a_2] := \{a \in \mathrm{M} \mid a_1,\ a_2 \in \mathrm{M} \wedge a_1 \leqq a \leqq a \leqq a_2\} \in \mathbf{PM}$$

und der leeren Menge $\varnothing$.

Durch die Relation $A \leqq B :\!= (a_1 \leqq b_1 \wedge a_2 \leqq b_2)$ mit $A = [a_1\,;\, a_2]$, $B = [b_1\,;\, b_2]$ wird $\{\mathbf{I}M \setminus \{\emptyset\}, \leqq\{$ zu einer geordneten Menge. Ist $\{M, \leqq\}$ ein vollständiger Verband, so ist auch $\{\mathbf{I}M \setminus \{\emptyset\}, \leqq\}$ ein vollständiger Verband und es gilt

$$\bigwedge_{\emptyset \neq T \subseteq \mathbf{I}M \setminus \{\emptyset\}} (\inf\, T = [\inf_{\emptyset \neq A \in T} a_1\,;\, \inf_{\emptyset \neq A \in T} a_2] \wedge \sup\, T = [\sup_{\emptyset \neq A \in T} a_1\,;\, \sup_{\emptyset \neq A \in T} a_2]).$$

Ferner bildet die bezüglich der Inklusion geordnete Menge $\{\mathbf{I}M, \subseteq\}$ ein oberes Raster der Potenzmenge $\{\mathbf{P}M, \subseteq\}$ und die optimale, nach oben gerichtete Rundung $\square : \mathbf{P}M \to \mathbf{I}M$ wird definiert durch

(R) $$\bigwedge_{A \in \mathbf{P}M} \square\, A :\!= \inf\, (\mathrm{U}(A) \cap \mathbf{I}M)$$

mit $\mathrm{U}(A) :\!= \{K \in \mathbf{P}M \mid K \supseteq A\}$. Sie besitzt die Eigenschaften

(R1) $$\bigwedge_{A, B \in \mathbf{P}M} (A \subseteq B \Rightarrow \square A \subseteq \square B), \qquad \text{(monoton)}$$

(R2) $$\bigwedge_{A \in \mathbf{I}M} \square A = A, \qquad \text{(optimal)}$$

(R3) $$\bigwedge_{A \in \mathbf{P}M} A \subseteq \square A, \qquad \text{(nach oben gerichtet)}$$

durch die sie auch definiert wird.

Zur Beschreibung der bei der Intervallrechnung besonders wichtigen Teilmengeneigenschaft legen wir noch fest:

D e f i n i t i o n 1. *Es seien* $\{V, R\}$ *ein (multiplikatives) Vektoid und* $\{R, \leqq\}$, $\{V, \leqq\}$ *geordnete Mengen. Dann heißt* V *ein inklusionsisoton geordnetes (multiplikatives)* R-*Vektoid* $\{V, R, \leqq\}$, *falls* $\{V, +, \leqq\}$ *(und* $\{V, \cdot, \leqq\}$) *ein geordnetes Gruppoid ist (siehe* [3]) *und zusätzlich gilt*

$$\bigwedge_{a, b \in R} \bigwedge_{a, b \in V} (a \leqq b \wedge a \leqq b \Rightarrow a \cdot a \leqq b \cdot b).$$

SATZ 1. *Es sei* $\{V, R, \leqq\}$ *ein inklusionsisoton geordnetes* R-*Vektoid. Dann ist auch* $\{V, -, \leqq\}$ *ein geordnetes Gruppoid, d.h. es gilt*

$$\bigwedge_{a, b, c, d \in V} (a \leqq b \wedge c \leqq d \Rightarrow a - c \leqq b - d).$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\bigwedge_{a, b \in V} (a \leqq b \Rightarrow (-e) \cdot a \leqq (-e) \cdot b \Rightarrow -a \leqq -b),$$

falls $\{-e, 0, e\}$ die ausgezeichneten Elemente von $\{R, +, \cdot\}$ sind. Da $\{V, +, \leqq\}$ ein geordnetes Gruppoid ist, folgt dann

$$\bigwedge_{a, b, c, d \in V} (a \leqq b \wedge c \leqq d \Rightarrow a \leqq b \wedge -c \leqq -d \Rightarrow a - c = a + (-c) \leqq$$
$$\leqq b + (-d) = b - d).$$

Als Beispiel für inklusionsisoton geordnete Strukturen bieten sich diejenigen in den Potenzmengen über den hier betrachteten Räumen an:

Beispiel: Wir betrachten das (multiplikative) $\mathbf{P}$R-Vektoid $\{\mathbf{P}V, \mathbf{P}R\}$ in der Potenzmenge $\mathbf{P}V$ über V eines gegebenen (multiplikativen) R-Vektoides $\{V, R\}$ ([9]). Bezüglich der Inklusion $\subseteq$ sind dann natürlich $\{\mathbf{P}V, +, \subseteq\}$, $\{\mathbf{P}V, \cdot, \subseteq\}$ geordnete Gruppoide und man erhält sofort

$$\bigwedge_{A, B \in \mathbf{P}R} \bigwedge_{A, B \in \mathbf{P}V} (A \subseteq B \wedge A \subseteq B \Rightarrow \{a \cdot a \mid a \in A \wedge a \in A\} \subseteq$$
$$\subseteq \{b \cdot b \mid b \in B \wedge b \in B\} \Rightarrow A \cdot A \subseteq B \cdot B),$$

d.h. $\{\mathbf{P}V, \mathbf{P}R, \subseteq\}$ bildet ein inklusionsisoton geordnetes Vektoid.

1. Erzeugung der Struktur in $\mathbf{I}V$

Im folgenden sei nun $\{V, R, \leqq\}$ ein vollständig schwach geordnetes (multiplikatives) R-Vektoid über dem vollständig schwach geordneten Ringoid $\{R, +, \cdot, \leqq\}$. $\{-e, o, e\}$ seien die ausgezeichneten Elemente in $\{R, +, \cdot\}$ und o das neutrale Element der Addition (und e das neutrale Element der Multiplikation) in $\{V, R\}$. Nach [9] bildet zunächst die Potenzmenge $\mathbf{P}V$ über V ein (multiplikatives) Vektoid über dem Ringoid in der Potenzmenge $\mathbf{P}R$ über R. Die Verknüpfungen werden dabei definiert durch

$$\bigwedge_{A, B \in \mathbf{P}V} A * B :\!= \{a * b \mid a \in A,\ b \in B\},\ * \in \{+, \cdot\},$$

$$\bigwedge_{A \in \mathbf{P}R} \bigwedge_{A \in \mathbf{P}V} A \cdot A :\!= \{a \cdot a \mid a \in A,\ a \in A\}.$$

Die ausgezeichneten Elemente des Ringoids $\{\mathbf{P}R, +, \cdot\}$ sind durch $\{\{-e\}, \{o\}, \{e\}\}$ gegeben und $\{o\}$ ist neutrales Element der Addition (und $\{e\}$ neutrales Element der Multiplikation) in $\{\mathbf{P}V, \mathbf{P}R\}$. Für die Übertragung der Struktur nach $\mathbf{I}V$ benötigen wir das

L e m m a 1. *Es sei* $\{V, R, \leqq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes* R-*Vektoid,* $\{\mathbf{P}V, \mathbf{P}R\}$ *das Vektoid in der Potenzmenge von* V *über* R *und* $\{\mathbf{I}V, \subseteq\}$ *das obere Raster von* $\{\mathbf{P}V, \subseteq\}$. *Dann gilt*

(a) $\{\mathbf{I}V, \subseteq\}$ *ist ein symmetrisches Raster von* $\{\mathbf{P}V, \mathbf{P}R\}$ *bezüglich der Inklusion, d.h. es gilt*

$$\bigwedge_{\emptyset \neq A \in \mathbf{I}V} (A = [a_1\,;\, a_2] \Rightarrow -A = [-a_2\,;\, -a_1] \in \mathbf{I}V) \wedge -\emptyset = \emptyset \in \mathbf{I}V,$$

(b) $$\bigwedge_{\emptyset \neq A \in \mathbf{P}V} \square A :\!= \inf\nolimits_{\mathbf{I}V}(\cup(A) \cap \mathbf{I}V) = [\inf_{a \in A} a\,;\, \sup_{a \in A} a],$$

(c) *die durch* (R) *definierte optimale, nach oben gerichtete Rundung* $\square$ *von* $\mathbf{P}V$ *in* $\mathbf{I}V$ *ist symmetrisch, d.h. es gilt*

(R4) $$\bigwedge_{A \in \mathbf{P}V} \square(-A) = -\square A.$$

Beweis. (a): Es ist

$$-A := \{-e\}\cdot A = \{(-e)\cdot a \mid \mathbf{I} \in A\} = \{-a \mid a \in \mathrm{V} \wedge a_1 \le a \le a_2\} =$$
$$= \{a \mid a \in \mathrm{V} \wedge a_1 \le -a \le a_2\} = \{a \in \mathrm{V} \mid -a_2 \le a \le -a_1\} =$$
$$= [-a_2;\ -a_1] \in \mathbf{IV}$$

nach (OV2) in $\{\mathrm{V}, \mathrm{R}, \le\}$ und $-\emptyset = \{-e\}\cdot\emptyset = \emptyset$.

(b): Jedes Element $A \in \mathbf{PV}$, $A \ne \emptyset$, ist in $[\inf a;\ \sup a] \in \mathbf{IV}$ enthalten. Ferner ist $\bigwedge_{B=[b_1;b_2]\in \mathbf{IV}} (A \subseteq B \Rightarrow b_1 \le \inf_{a\in A} a \wedge \sup_{a\in A} a \le b_2)$, d.h. es gilt $[\inf a;\ \sup a] \subseteq B$. Damit ist $[\inf_{a\in A} a;\ \sup_{a\in A} a]$ kleinste obere Schranke von A in $\{\mathbf{IV}, \subseteq\}$ und die Behauptung bewiesen.

(c): Wir zeigen zunächst die Aussage

$$\bigwedge_{\emptyset\ne A\in \mathbf{PV}} \inf A = -\sup(-A).$$

1. $\bigwedge_{a\in A}(\inf A \le a \Rightarrow -a \le -\inf A) \Rightarrow \sup(-A) = \sup_{a\in A}(-a) \le -\inf A \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf A \le -\sup(-A)$ nach (OV2).

2. $\bigwedge_{a\in A}(-a\le \sup(-A) \Rightarrow -\sup(-A) \le a) \Rightarrow -\sup(-A) \le \inf A$.

Analog beweist man

$$\bigwedge_{\emptyset\ne A\in \mathbf{PV}}\sup A = -\inf(-A).$$

Wir erhalten dann

$$\square(-A) \underset{(b)}{=} [\inf_{a\in -A} a;\ \sup_{a\in -A} a] = [\inf(-A);\ \sup(-A)] =$$
$$= [-\sup A;\ -\inf A] \underset{(a)}{=} -[\inf A;\ \sup A] = -\square A.$$

Für die leere Menge gilt die Behauptung nach Definition.

Im folgenden bezeichnen wir $\mathbf{IV}\setminus\{\emptyset\}$ bzw. $\mathbf{IR}\setminus\{\emptyset\}$ mit $\mathbf{IV}'$ bzw. $\mathbf{IR}'$. Es gilt der

SATZ 1. *Es sei* $\{\mathrm{V}, \mathrm{R}, \le\}$ *ein vollständig schwach geordnetes (multiplikatives) Vektoid üer dem vollständig schwach geordneten Ringoid* $\{\mathrm{R}, +, \cdot, \le\}$ *mit* o *als neutralem Element der Addition (und* e *als neutralem Element der Multiplikation). In* $\mathbf{IV}$ *erklaren wir eine Addition (und eine Multiplikation) durch*

$$\bigwedge_{A,B\in \mathbf{IV}} A \boxtimes B := \square(A * B),\quad * = +\ (* = \cdot),$$

sowie eine äußere Multiplikation $\boxdot: \mathbf{IR}\times\mathbf{IV} \to \mathbf{IV}$ *durch*

$$\bigwedge_{\mathrm{A}\in \mathbf{IR}}\ \bigwedge_{A\in \mathbf{IV}} \mathrm{A}\boxdot A := \square(\mathrm{A}\cdot A).$$

Dann bildet $\mathbf{IV}$ *über dem Rasterringoid* $\{\mathbf{IR}, \boxplus, \boxdot\}$ *von* $\{\mathbf{PR}, +, \cdot\}$ *(siehe [5]) ein optimales, oberes (multiplikatives) Rastervektoid* $\{\mathbf{IV}, \mathbf{IR}\}$ *von* $\{\mathbf{PV}, \mathbf{PR}\}$ *bezüglich der Ordnungsrelation* $\subseteq$ *([9]).* $[o;\ o]$ *ist neutrales Element in* $\{\mathbf{IV}, \boxplus\}$ *(und* $[e;\ e]$ *in* $\{\mathbf{IV}, \boxdot\}$*). Ferner ist* $\{\mathbf{IV}', \mathbf{IR}'\}$ *ein vollständig schwach geordnetes, inklusionsisoton geordnetes Vektoid* $\{\mathbf{IV}', \mathbf{IR}', \le, \subseteq\}$ *und es gilt*

$$\bigwedge_{A,B\in \mathbf{IV}'} (A \boxplus B = [a_1+b_1;\ a_2+b_2] \wedge A \boxminus B = [a_1-b_2;\ a_2-b_1]$$

mit $A = [a_1;\ a_2]$, $B = [b_1;\ b_2]$.

Beweis. Nach Lemma 1 ist $\{\mathbf{IV}, \subseteq\}$ ein symmetrisches, oberes Raster von $\{\mathbf{PV}, \mathbf{PR}\}$ bezüglich der Ordnungsrelation $\subseteq$ mit der Eigenschaft $\{o\} = [o;\ o] \in \mathbf{IV}$ (bzw. $\{e\} = [e;\ e] \in \mathbf{IV}$) und $\square$ eine optimale, symmetrische, nach oben gerichtete Rundung von $\{\mathbf{PV}, \subseteq\}$ nach $\{\mathbf{IV}, \subseteq\}$. Ferner ist $\{\mathbf{IR}, \boxplus, \boxdot\}$ ein optimales, oberes Rasterringoid von $\{\mathbf{PR}, +, \cdot\}$ bezüglich der Ordnungsrelation $\subseteq$ (siehe [5]). Nach [9] ist dann $\mathbf{IV}$ über $\mathbf{IR}$ ein optimales, oberes (multiplikatives) Rastervektoid mit $\{o\} = [o;\ o]$ als neutralem Element der Addition (bzw. $\{o\} = [o;\ o]$ bzw. $\{e\} = [e;\ e]$ als neutralem Element der Addition bzw. Multiplikation).

Wir zeigen noch, daß $\mathbf{IV}$ bezüglich der Ordnungsrelation $\{\mathbf{IV}, \subseteq\}$ ein inklusionsisoton geordnetes (multiplikatives) Vektoid über $\mathbf{IR}$ ist. In Abschnitt 0 haben wir bereits gesehen, daß $\{\mathbf{PV}, \mathbf{PR}\}$ ein inklusionsisoton geordnetes (multiplikatives) Vektoid bildet. Damit erhält man sofort:

$$\bigwedge_{A,B,C,D\in \mathbf{IV}}(A\subseteq B \wedge C\subseteq D \Rightarrow A*C \subseteq B*D \underset{(R1)}{\Rightarrow} \square(A*C)\subseteq \square(B*D) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\boxtimes C \subseteq B\boxtimes C) \text{ für } * = + \text{ (bzw. } * \in \{+,\cdot\})$$

und

$$\bigwedge_{\mathrm{A},\mathrm{B}\in \mathbf{IR}}\ \bigwedge_{A,B\in \mathbf{IV}}(\mathrm{A}\subseteq \mathrm{B} \wedge A\subseteq B \Rightarrow \mathrm{A}\cdot A \subseteq \mathrm{B}\cdot B \underset{(R1)}{\Rightarrow}\square(\mathrm{A}\cdot A)\subseteq\square(\mathrm{B}\cdot B)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{A}\boxdot A \subseteq \mathrm{B}\boxdot B).$$

Für die Substraktion folgt die Behauptung sofort nach Satz 1. Schließlich gilt mit $A = [a_1;\ a_2]$, $B = [b_1;\ b_2]$, $C = [c_1;\ c_2] \in \mathbf{IV}'$

(OV1): Aus $\bigwedge_{a\in A}\bigwedge_{b\in B}(\inf A \le a \wedge \inf B \le b \underset{(OV1)\text{ in }\{V,R\}}{\Rightarrow} \inf A + \inf B \le$
$\le a+b) \Rightarrow \inf A + \inf B \le \inf(A+B)$ und $\inf(A+B) \le a_1+b_1 =$
$= \inf A + \inf B$

folgt die Gleichung $\inf A + \inf B = \inf (A + B)$. Entsprechend erhält man für das Supremum $\sup A + \sup B = \sup (A + B)$. Man zeigt nun aufgrund von Lemma 1(b) und (OV1) in $\{V, R\}$

$$\bigwedge_{A,B,C\in \mathbf{I}V} (A \leqq B \Rightarrow (a_1 \leqq b_1 \wedge a_2 \leqq b_2) \Rightarrow (a_1 + c_1 \leqq b_1 + c_1 \wedge$$

$$\wedge\, a_2 + c_2 \leqq b_2 + c_2) \Rightarrow (\inf (A + B) \leqq \inf (B + C) \wedge$$

$$\wedge \sup (A + C) \leqq \sup (B + C)) \Rightarrow A \boxplus C \leqq B \boxplus C).$$

$$\text{(OV2)}: \bigwedge_{A,B\in \mathbf{I}V'} (A \leqq B \Rightarrow (a_1 \leqq b_1 \wedge a_2 \leqq b_2) \underset{\text{(OV2) in } \{V,R\}}{\Rightarrow} (-b_1 \leqq -a_1 \wedge$$

$$\wedge -b_2 \leqq -a_2) \Rightarrow -B \leqq -A.$$

Wegen $\boxminus A = -A$ ([5]) folgt damit die Behauptung.

Die Formel für die Addition ergibt sich aus den unter (OV1) bewiesenen Gleichungen für $\inf (A + B)$ und $\sup (A + B)$. Für die Substraktion erhält man weiter

$$A \boxminus B = A \boxplus (\boxminus B) = A \boxplus (-B) = [a_1 ; a_2] \boxplus [-b_2 ; -b_1] =$$

$$= [a_1 + (-b_2) ; a_2 + (-b_1)] = [a_1 - b_2 ; a_2 - b_1].$$

Beachtet man nun, daß die Verknüpfungen $\boxtimes$ nicht aus $\mathbf{I}V'$ hinausführen, ist damit auch die letzte Behauptung des Satzes bewiesen.

In allen Fällen, in welchen die bezüglich der inneren bzw. äußeren Multiplikation zu verknüpfenden Elemente mit den entsprechenden Nullelementen vergleichbar sind, lassen sich bei Vorgabe eines geordneten Vektoides $\{V, R\}$ die Verknüpfungsergebnisse ebenfalls explizit angeben. Wir zeigen dazu den

SATZ 2. *Es sei* $\{V, R, \leqq\}$ *ein vollständig geordnetes (multiplikatives) Vektoid über dem vollständig schwach geordneten Ringoid* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *mit den ausgezeichneten Elementen* $\{-e, o, e\}$. o *sei neutrales Element in* $\{V, +\}$. *Dann ist auch* $\mathbf{I}V'$ *ein vollständig geordnetes (multiplikatives)* $\mathbf{I}R$-*Vektoid* $\{\mathbf{I}V', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *und es gilt mit* $\mathrm{A} = [\mathrm{a}_1 ; \mathrm{a}_2]$, $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1 ; b_2]$

(a) $\bigwedge_{\mathrm{A}\in \mathbf{I}R'} \bigwedge_{A\in \mathbf{I}V'} (\mathrm{A} \geqq [\mathrm{o} ; \mathrm{o}] \wedge A \geqq [o ; o] \Rightarrow \mathrm{A} \boxdot A = [\mathrm{a}_1 \cdot a_1 ; \mathrm{a}_2 \cdot a_2])$

(b) $\bigwedge_{\mathrm{A}\in \mathbf{I}R'} \bigwedge_{A\in \mathbf{I}V'} (\mathrm{A} \leqq [\mathrm{o} ; \mathrm{o}] \wedge A \leqq [o ; o] \Rightarrow \mathrm{A} \boxdot A = [\mathrm{a}_2 \cdot a_2 ; \mathrm{a}_1 \cdot a_1])$

(c) $\bigwedge_{\mathrm{A}\in \mathbf{I}R'} \bigwedge_{A\in \mathbf{I}V'} (\mathrm{A} \leqq [o ; o] \wedge A \leqq [o ; o] \Rightarrow \mathrm{A} \boxdot A = [\mathrm{a}_2 \cdot a_1 ; \mathrm{a}_1 \cdot a_2])$

(d) $\bigwedge_{\mathrm{A}\in \mathbf{I}R'} \bigwedge_{A\in \mathbf{I}V'} (\mathrm{A} \leqq [o ; o] \wedge A \geqq [o ; o] \Rightarrow \mathrm{A} \boxdot A = [\mathrm{a}_1 \cdot a_2 ; \mathrm{a}_2 \cdot a_1])$

und

(e) $\bigwedge_{A,B\in \mathbf{I}V'} (A \geqq [o ; o] \wedge B \geqq [o ; o] \Rightarrow A \boxdot B = [a_1 \cdot b_1 ; a_2 \cdot b_2])$

(f) $\bigwedge_{A,B\in \mathbf{I}V'} (A \leqq [o ; o] \wedge B \leqq [o ; o] \Rightarrow A \boxdot B = [a_2 \cdot b_2 ; a_1 \cdot b_1])$

(g) $\bigwedge_{A,B\in \mathbf{I}V'} (A \leqq [o ; o] \wedge B \geqq [o ; o] \Rightarrow A \boxdot B = [a_1 \cdot b_2 ; a_2 \cdot b_1] \wedge$

$$\wedge\, B \boxdot A = [b_2 \cdot a_1 ; b_1 \cdot a_2])).$$

Beweis. Nach Satz 1 bildet $\{\mathbf{I}V', \mathbf{I}R', \leqq\}$ ein vollständig schwach geordnetes (multiplikatives) Vektoid. Es ist also noch die Gültigkeit von (OV3) (und (OV4)) nachzuweisen.

$$\text{(OV3)}: \bigwedge_{\mathrm{A}\in \mathbf{I}R'} \bigwedge_{A,B\in \mathbf{I}V} ([\mathrm{o} ; \mathrm{o}] \leqq \mathrm{A} \wedge [o ; o] \leqq A \leqq B \Rightarrow \mathrm{o} \leqq \mathrm{a}_1 \leqq \mathrm{a}_2 \wedge$$

$$\wedge\, o \leqq a_1 \leqq b_1 \wedge o \leqq a_2 \leqq b_2 \underset{\text{(OV3) in } \{V,R,\leqslant\}}{\Rightarrow} \mathrm{a}_1 \cdot a_1 \leqq \mathrm{a}_1 \cdot b_1 \wedge$$

$$\wedge\, \mathrm{a}_2 \cdot a_2 \leqq \mathrm{a}_2 \cdot b_2 \underset{\text{(a)}}{\Rightarrow} \mathrm{A} \boxdot A \leqq \mathrm{A} \boxdot B).$$

Der Nachweis der zweiten Eigenschaft

$$[\mathrm{o} ; \mathrm{o}] \leqq \mathrm{A} \leqq \mathrm{B} \wedge [o ; o] \leqq A \Rightarrow \mathrm{A} \boxdot A \leqq \mathrm{B} \boxdot A$$

erfolgt analog.

$$\text{(OV4)}: \bigwedge_{A,B,C\in \mathbf{I}V'} ([o ; o] \leqq A \leqq B \wedge [o ; o] \leqq C \Rightarrow o \leqq c_1 \leqq c_2 \wedge$$

$$\wedge\, o \leqq a_1 \leqq b_1 \wedge o \leqq a_2 \leqq b_2 \underset{\text{(OV4) in } \{V,R,\leqslant\}}{\Rightarrow} a_1 \cdot c_1 \leqq b_1 \cdot c_1 \wedge$$

$$\wedge\, a_2 \cdot c_2 \leqq b_2 \cdot c_2 \underset{\text{(e)}}{\Rightarrow} A \boxdot C \leqq B \boxdot C).$$

Der Nachweis der Ungleichung $C \boxdot A \leqslant C \boxdot B$ erfolgt analog.

$$\text{(a)}: \bigwedge_{\mathrm{a}\in \mathrm{A}} \bigwedge_{a\in A} (\mathrm{a}_2 \geqq \mathrm{a} \geqq \mathrm{a}_1 \geqq \mathrm{o} \wedge a_2 \geqq a \geqq a_1 \geqq o \underset{\text{(OV3) in } \{V,R,\leqslant\}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \mathrm{a}_1 \cdot a_1 \leqq a_1 \cdot a \leqq \mathrm{a} \cdot a \wedge \mathrm{a} \cdot a \leqq \mathrm{a} \cdot a_2 \leqq \mathrm{a} \cdot a_2 \leqq \mathrm{a}_2 \cdot a_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{a}_1 \cdot a_1 \leqq \inf (\mathrm{A} \cdot A) \wedge \sup (\mathrm{A} \cdot A) \leqq \mathrm{a}_2 \cdot a_2.$$

Mit $\inf (\mathrm{A} \cdot A) \leqq \mathrm{a}_1 \cdot a_1$ und $\mathrm{a}_2 \cdot a_2 \leqq \sup (\mathrm{A} \cdot A)$ folgt sofort die Behauptung.

Die Eigenschaften (b), (c) und (d) führt man nun unter Ausnützung der Regel (OV2) in $\{V, R, \leqq\}$ bzw. (OD2) in $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ auf (a) zurück.

$$(e): \bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} (a_2 \geqq a \geqq a_1 \geqq o \wedge b_2 \geqq b \geqq b_1 \geqq o \underset{(OV4) \text{ in } \{V, R, \leqslant\}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 \leqq a \cdot b_1 \leqq a \cdot b \wedge a \cdot b \leqq a_2 \cdot b \leqq a_2 \cdot b_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 \leqq \inf (A \cdot B) \wedge \sup (A \cdot B) \leqq a_2 \cdot b_2.$$

Mit $\inf (A \cdot B) \leqq a_1 \circ b_1$ und $a_2 \cdot b_2 \leqq \sup (A \cdot B)$ ergibt sich die Behauptung.

(f) und (g) lassen sich wieder unter Verwendung von (OV2) in $\{V, R, \leqq\}$ auf (e) zurückführen.

Ist einer der Operanden nicht mit dem entsprechenden Nullelement vergleichbar, so lassen sich für die Multiplikationen im allgemeinen keine expliziten Formeln für die Verknüpfungsergebnisse herleiten. Da aufgrund der Definition mittels der Operationen in der Potenzmenge die Verknüpfungen $\boxdot: \mathbf{I}V \times \mathbf{I}V \to \mathbf{I}V$ und $\boxdot: \mathbf{I}R \times \mathbf{I}V \to \mathbf{I}V$ praktisch nicht verwendbar sind, wollen wir in den für die Anwendungen wichtigen Fällen $V_n\mathbf{I}R'$ bzw. $M_n\mathbf{I}R'$ der Vektoren bzw. quadratischen Matrizen mit Komponenten aus $\mathbf{I}R'$ Formeln für die Verknüpfungsergebnisse herleiten.

2. Intervallvektoren und Intervallmatrizen

Über einem vollständig schwach geordneten Ringoid $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ bildet die Menge V_nR der n-Tupel bzw. die Menge M_nR der $n \times n$-Matrizen von Elementen aus R mit den üblichen Verknüpfungen und der komponentenweise erklärten Ordnungsrelation $\leqq$ ein vollständig schwach geordnetes Vektoid $\{V_nR, R, \leqq\}$ bzw. ein vollständig schwach geordnetes multiplikatives Vektoid $\{M_nR, R, \leqq\}$ ([9]). In den Intervallräumen $\mathbf{I}V_nR$ bzw. $\mathbf{I}M_nR$ werden dann gemäß Satz 1 Verknüpfungen eingeführt und es entstehen die entsprechenden Strukturen. Bei Addition und Subtraktion lassen sich die Verknüpfungsergebnisse jeweils durch die Schranken der Operanden ausdrücken, während bei den Multiplikationen dies nur bei Voraussetzung eines geordneten Ringoids für die mit den Nullelementen vergleichbaren Operanden möglich ist.

Wir bilden nun ausgehend von $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ zunächst das vollständig schwach geordnete Ringoid $\{\mathbf{I}R', \boxplus, \boxdot, \leqq\}$ der Intervalle über R und darüber wieder die Räume $\{V_n\mathbf{I}R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ bzw. $\{M_n\mathbf{I}R', \leqq\}$. Ordnungsrelation und Verknüpfungen sind dabei in der folgenden Weise erklärt:

$A \leqq B: = (A_1 \leqq B_1$ für $i = 1(1)n)$ bzw. $A \leqq B: =(A_{ij} \leqq B_{ij}$ für $i,j=1(1)n)$,

$A \oplus B: = (A_i \boxplus B_i)$ bzw. $A \oplus B: = (A_{ij} \boxplus B_{ij})$,

$A \ominus B: = (A_i \boxminus B_i)$ bzw. $A \ominus B: = (A_{ij} \boxminus B_{ji})$,

$A \odot B: = (A \boxdot B_i)$ bzw. $A \odot B: = (A \boxdot B_{ij})$

bzw. und $A \odot B: = \left(\left|\sum_{i=1}^{n}\right| A_{ik} \boxdot B_{ij}\right): = ((\ldots(A_{i1} \boxdot B_{1k}) \boxplus (A_{i2} \boxdot B_{2k})) \boxplus \boxplus \ldots) \boxplus (A_{in} \boxdot B_{nk}))$ mit $A = (A_i)$, $B = (B_i) \in V_n\mathbf{I}R$ bzw. $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ii}) \in M_n\mathbf{I}R'$ und $A \in \mathbf{I}R'$.

Es gilt der

SATZ 3. *Die Vektoide* $\{\mathbf{I}V_nR', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *und* $\{V_n\mathbf{I}R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *bzw.* $\{\mathbf{I}M_n{}'R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *und* $\{M_n, \mathbf{I}R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *über einem vollständig schwach geordneten Ringoid* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *sind isomorph.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Abbildung $\varphi: \mathbf{I}V_nR' \to V_n\mathbf{I}R'$ mit

$$\varphi[(a_i^{(1)}); (a_i^{(2)})]: = ([a_i^{(1)}; a_i^{(2)}]).$$

$(a_i^{(1)}), (a_i^{(2)}) \in V_nR$ ein Ordnungsisomorphismus ist.

1. $A = [(a_i^{(1)}); (a_i^{(2)})] \neq B = [(b_i^{(1)}); (b_i^{(2)})] \Rightarrow \bigvee_{i_0, j_0} a_{i_0}^{(j_0)} \neq b_{i_0}^{(j_0)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigvee_{i_0} [a_{i_0}^{(1)}; a_{i_0}^{(2)}] \neq [b_{i_0}^{(1)}; b_{i_0}^{(2)}] \Rightarrow \varphi A \neq \varphi B.$$

2. $(A_i) \in V_n\mathbf{I}R' \underset{A_i = [a_i(1); a_i^{(2)}]}{\Rightarrow} A: = [(a_i^{(1)}); (a_i^{(2)})] \in \mathbf{I}V_n R' \wedge \varphi A = (A_i).$

3. $A \leqq B \Rightarrow (a_i^{(1)}) \leqq (b_i^{(1)}) \wedge (a_i^{(2)}) \leqq (b_i^{(2)}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i=1(1)n} a_i^{(1)} \leqq b_i^{(1)} \wedge a_i^{(2)} \leqq b_i^{(2)} \Rightarrow \bigwedge_{i=1(1)n} A_i = [a_i^{(1)}; a_i^{(2)}] \leqq B_i =$$

$$= [b_i^{(1)}; b_i^{(2)}] \Rightarrow \varphi A = (A_i) \leqq (B_i) = \varphi B.$$

Für die Verknüpfungen $* \in \{+, -\}$ gilt dann mit $\varphi A=(A_i)$, $\varphi B=(B_i)$

$$\varphi(A \boxtimes B) = \varphi(\square(A * B)) = \varphi[\inf(A * B); \sup (A * B)] =$$

$$= [(\inf_{(a_i) \in A,\, b(_i) \in B} (a_i * b_i)); (\sup_{(a_i) \in A,\, (b_i) \in B} (a_i * b_i))] =$$

$$= ([\inf_{(a_i) \in A,\, (b_i) \in B} (a_i * b_i); \sup_{(a_i) \in A,\, (b_i) \in B} (a * b_i)]) =$$

$$= ([\inf (A_i * B_i); \sup (A_i * B_i)]) = (A_i \boxtimes B_i) = \varphi A \otimes \varphi B$$

und für die äußere Multiplikation

$$\varphi(A \boxdot B) = \varphi(\square(A \cdot B)) = \varphi[\inf (A \cdot B); \sup (A \cdot B)] =$$

$$= \varphi[(\inf_{a \in A,\, (b_i) \in B} (a \cdot b_i)); \sup_{a \in A,\, (b_i) \in B} (a \cdot b_i))] =$$

$$= ([\inf_{a \in A,\, (b_i) \in B} (a \cdot b_i); \sup_{a \in A,\, (b_i) \in B} (a \cdot b_i)]) =$$

$$= ([\inf (A \cdot B_i); \sup (A \cdot B_i)]) = (A \cdot B_i)]) = (A \boxdot B_i) = A \odot \varphi B.$$

Im Fall der Matrizen verläuft der Beweis analog.

Wir führen nun in $V_n\mathbf{I}R'$ bzw. $M_n\mathbf{I}R'$ in natürlicher Weise eine Relation $\subseteq$ (Inklusion) ein durch die Definition

$$\bigwedge_{A,B\in V_n\mathbf{I}R'} A \subseteq B :\,= \big(\bigwedge_{i=1(1)n} A_i \subseteq B_i\big) \text{ bzw. } \bigwedge_{A,B\in M_n\mathbf{I}R'} A \subseteq B :\,=$$

$$= \big(\bigwedge_{i,j=1(1)n} A_{ij} \subseteq B_{ij}\big) \text{ mit } A = (A_i),\ B = (B_i) \text{ bzw. } A = (A_{ij}),\ B = (B_{ij}).$$

Da $\{\mathbf{I}R', \subseteq\}$ eine geordnete Menge bildet, ist $\subseteq$ offensichtlich eine Ordnungsrelation in $V_n\mathbf{I}R'$ bzw. $M_n\mathbf{I}R'$ und die Abbildung φ auch bezüglich er Inklusion ein Ordnungsisomorphismus.

Für die innere Multiplikation in $\{M_n\mathbf{I}R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ und $\{\mathbf{I}M_n, R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ läßt sich dann im Gegensatz zu den übrigen Verknüpfungen im allgemeinen nur $\varphi(A \boxdot B) \subseteq \varphi A \odot \varphi B$ zeigen:

Wegen $\bigwedge_{i,j,k=1(1)n} a_{ik} \cdot b_{kj} \in A_{ij} \cdot B_{kj} \subseteq \square(A_{ij} \cdot B_{kj}) = A_{ij} \boxdot B_{kj}$ gilt

$$\bigwedge_{i,j=1(1)n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{kj} \in \sum_{k=1}^{n} A_{ij} \boxdot B_{kj} \subseteq \Big|\sum_{k=1}^{n}\Big| A_{ik} \boxdot B_{kj} \in \mathbf{I}R'$$

mit $\varphi A = (A_{ij})$, $\varphi B = (B_{ij})$ und $\mathbf{I}M_nR' \ni \varphi^{-1}(\varphi A \odot \varphi B) \supseteq$
$\supseteq \{a \cdot b \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Ferner ist $A \boxdot B =$
$= \inf (\bigcup(A \cdot B) \bigcap \mathbf{I}M_nR)$ und somit $A \boxdot B \subseteq \varphi^{-1}(\varphi A \odot \varphi B)$.

Unter geeigneten Voraussetzungen können wir jedoch die Gleichheit nachweisen. Wir zeigen hierzu den

SATZ 4. *Es sei* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes Ringoid und est gelte in dem schwach geordneten Ringoid* $\{\mathbf{I}R', \boxplus, \boxdot, \leqq\}$ *der Intervalle über* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *die Eigenschaft*

$$(1)\qquad \bigwedge_{A_i, B_i, \in \mathbf{I}R',\ i=1(1)n} \sum_{j=1}^{n} A_i \boxdot B_i \subseteq \square\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot B_i\Big).$$

Dann gilt

$$\bigwedge_{A,B\in \mathbf{I}M_nR'} \varphi(A \boxdot B) = \varphi A \odot \varphi B,$$

d.h. die multiplikativen Vektoide $\{\mathbf{I}M_nR', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *und* $\{M_n\mathbf{I}R', \mathbf{I}R', \leqq\}$ *sind isomorph.*

Beweis. Mit $A,B \in \mathbf{I}M_nR'$ und $\varphi A :\,= (A_{ij})$, $\varphi B :\,= (B_{ij}) \in M_n\mathbf{I}R'$ gilt

$$\varphi(A \boxdot B) :\,= \varphi(\square(A \cdot B)) =$$

$$= \varphi\Big[\inf_{(a_{ij})\in A,\ (b_{ij})\in B}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\Big);\ \sup_{(a_{ij})\in A,\ (b_{ij})\in B}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\Big)\Big] =$$

$$= \varphi\Big[\Big(\inf_{(a_{ij})\in A,\ (b_{ij})\in B} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{kj}\Big);\ \Big(\sup_{(a_{ij})\in A,\ (b_{ij})\in B} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\Big)\Big] =$$

$$= \Big(\Big[\inf_{(a_{ij})\in A,\ (b_{ij})\in B} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj};\ \sup_{(a_{ij})\in A,\ (b_{ij})\in B} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\Big]\Big) =$$

$$= \Big(\Big[\inf \sum_{k=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{kj};\ \sup \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}\Big]\Big) = \Big(\square\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}\Big)\Big).$$

Aus der Eigenschaft

$$\bigwedge_{k=1(1)n} A_{ij} \boxdot B_{kj} \subseteq A_{ik} \cdot B_{kj} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \boxdot B_{kj} \subseteq \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj} \underset{(R1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \square\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \boxdot B_{kj}\Big) \subseteq \square\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}\Big)$$

und der Voraussetzung (1) folgt dann

$$\square\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \boxdot B_{kj}\Big) = \square\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}\Big)$$

und weiter aufgrund ovn (0D1) in $\{R, +, \circ, \leqq\}$

$$\varphi(A \boxdot B) = \Big(\square\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \boxdot B_{kj}\Big)\Big) = \Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}\Big| A_{ik} \boxdot B_{kj}\Big) = \varphi A \odot \varphi B.$$

Es ist nun noch interessant, ob die Bedingung (1) in Satz 4 überhaupt erfüllt werden kann. Dies ist z.B. ganz allgemein für den Fall möglich, daß ein vollständiges, linear geordnetes Ringoid zugrundeliegt:

SATZ 5. *Es sei* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *ein vollständig linear geordnetes Ringoid. Dann gilt in dem vollständig geordneten Ringoid* $\{\mathbf{I}R', \boxplus, \boxdot, \leqq\}$ *der Intervalle über* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *die Eigenschaft* (1).

Beweis. In $\{\mathbf{I}R', \boxplus, \boxdot, \leqq\}$ sind die Verknüpfungen gegeben durch die Formel

$$\bigwedge_{A,B=\mathbf{I}R'} A \boxtimes B = [\min_{i,j=1,2} (a_i * b_j);\ \max_{i,j=1,2} (a_i * b_j)],\quad * \in \{+, -, \cdot, /\},$$

mit $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$ ([5]). Wir erhalten damit

$$x \in \sum_{i=1}^{n} A_i \boxdot B_i \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge \bigwedge_{i=1(1)n} x_i \in A_i \boxdot B_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge \bigwedge_{i=1(1)n} \min_{j,k=1,2} a_{ij} \cdot b_{ik} \leqq x_i \leqq \max_{j,k=1,2} a_{ij} \cdot b_{ik} \Rightarrow$$

$$\underset{(\mathrm{OD1})\ \text{in}\ \{R,+,\cdot,\leqslant\}}{\Rightarrow} x = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge \sum_{i=1}^{n} \min_{j,k=1,2} a_{ij} \cdot b_{ik} \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \max_{j,k=1,2} a_{ij} \cdot b_{ik} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \square\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot B_i\Big) \text{ für } A_i = [a_{i1}; a_{i2}],\ B_i = [b_{i1}; b_{i2}].$$

Die Eigenschaft (1) gilt jedoch nicht nur im Falle des linear geordneten Ringoides und damit im Falle (dessen wichtigsten Beispieles) des Körpers der reellen Zahlen. In [8] zeigt der Verfasser die Gültigkeit von (1) für die Intervalle über den komplexen Zahlen und in [10] ganz allgemein für die Intervalle über komplexen Divisionsringoiden.

3. Intervallrechnung über dem Raster eines (multiplikativen) Vektoides

Wir haben bisher die Eigenschaften einer Intervallrechnung über einem vollständig schwach geordneten bzw. geordneten (multiplikativen) Vektoid $\{V, R, \leqq\}$ untersucht. In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit der Approximation dieser Intervallrechnung in einem Rastervektoid $\{T, S\}$ von $\{V, R\}$ beschäftigen.

Wir verwenden hierbei die Tatsache, daß zu einem Raster $\{T, \leqq\}$ eines vollständigen Verbandes $\{M, \leqq\}$ die geordnete Menge $\{\mathbf{I}T, \subseteq\}$ der Intervalle über M mit Schranken in T

$$A = [a_1 ; a_2] = \{x \in M \mid a_1, a_2 \in T \wedge a_1 \leqq x \leqq a_2\}$$

und der leeren Menge $\emptyset$ ein Raster von $\{\mathbf{I}M, \subseteq\}$ bildet und mit $A = [a_1 ; a_2] \in \mathbf{I}T$ gilt

$$\bigwedge_{\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathbf{I}T} \inf_{\mathbf{I}T}\mathcal{A} = [\sup_{\emptyset \neq A \in \mathcal{A}} a_1 ; \inf_{\emptyset \neq A \in \mathcal{A}} a_2] \wedge \sup_{\mathbf{I}T}\mathcal{A} = [\inf_{\emptyset \neq A \in \mathcal{A}} a_1 ; \sup_{\emptyset \neq A \in \mathcal{A}} a_2] \text{([5])}.$$

Zur Approximation der Verknüpfungen in $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ verwenden wir wieder die optimale, nach oben gerichtete Rundung $\diamond : \mathbf{I}V \to \mathbf{I}T$, welche uns die bestmöglichen Ergebnisse der Rechnung in $\{\mathbf{I}T, \mathbf{I}S\}$ bezüglich derjenigen in $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ gewährleistet.

SATZ 6. *Es sei* $\{V, R, \leqq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes (multiplikatibes) Vektoid mit dem symmetrischen Raster* $\{T, \leqq\}$ *und* $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ *das optimale obere (multiplikative) Rastervektoid von* $\{\mathbf{P}V, \mathbf{P}R\}$ *bezüglich der Inklusion* $\subseteq$ *sowie* $\{\mathbf{I}T, \subseteq\}$ *das Raster der Intervalle über V mit Schranken aus T von* $\{\mathbf{I}V, \subseteq\}$. *Dann gilt mit* $A = [a_1 ; a_2]$:

(a) $\{\mathbf{I}T, \subseteq\}$ *ist ein symmetrisches Raster von* $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ *bezüglich der Ordnungsrelation* $\subseteq$.

(b) *Für alle* $\emptyset \neq A \in \mathbf{I}V$ *ist* $\diamond A = [\triangledown a_1 ; \triangle a_2]$, *wobei* $\triangledown, \triangle$ *die beiden optimalen, gerichteten Rundungen von V in T darstellen* ([5]).

(c) $\diamond : \mathbf{I}V \to \mathbf{I}T$ *ist eine symmetrische Rundung, d.h. es gilt*

$$\bigwedge_{A = \mathbf{I}V} \diamond(\boxminus A) = \boxminus(\diamond A).$$

Beweis. Es seien $\{-e, 0, e\}$ dis ausgezeichneten Elemente von $\{R, +, \cdot\}$.

(a): Dann gilt $A \in \mathbf{I}T' \Rightarrow a_1, a_2 \in T \wedge a_1 \leqq a_2 \Rightarrow -a_1, -a_2 \in T$

$$\wedge\ -a_2 \leqq -a_1 \Rightarrow [-a_2 ; -a_1] = -A = \boxminus A \in \mathbf{I}T' \text{ und}$$

$$\emptyset = -\emptyset = \boxminus\emptyset \in \mathbf{I}T.$$

(b): Mit $B = [b_1 ; b_2] \in \mathbf{I}T$ ist für $\emptyset \neq A \in \mathbf{I}T$

$$\diamond A := \inf_{\mathbf{I}T}(\bigcup(A) \cap \mathbf{I}T) = [\sup_{B \in \bigcup(A) \cap \mathbf{I}T'} b_1 ; \inf_{B \in \bigcup(A) \cap \mathbf{I}T'} b_2] =$$

$$= [\sup \{b_1 \in T \mid b_1 \leqq a_1\} ; \inf \{b_2 \in T\ a_2 \leqq b_2\}] =$$

$$= [\sup (L(a_1) \cap T), \inf (\bigcup (a_2) \cap T)] = [\triangle a_1 ; \triangledown a_2].$$

(c): $$\diamond(\boxminus A) = \diamond[-a_2 ; -a_1] = [\triangledown(-a_2) ; \triangledown(-a_1)] =$$

$$= [-\triangle a_2 ; -\triangledown a_1] = \boxminus[\triangledown a_1 ; \triangle a_2] = \boxminus(\diamond A).$$

für $A \in \mathbf{I}V'$ und wegen der Optimalität von $\diamond$ die Behauptung für die leere Menge $\emptyset$.

Für die Struktur in $\mathbf{I}T$ erhalten wir den

SATZ 7. *Es sei* $\{V, R, \leqq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes (bzw. geordnetes) (multiplikatives) Vektoid über dem vollständig schwach geordneten (bzw. geordneten) Ringoid* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *mit o als neutralem Element der Addition (und e als neutralem Element der Multiplikation) und* $\{\mathbf{I}S, \overset{+}{\diamond}, \dot{\diamond}\}$ *ein optimales Rasterringoid von* $\{\mathbf{I}R, \boxplus, \boxdot\}$ *bezüglich der Inklusion* $\subseteq$. *Ferner sei* $\{T, \leqq\}$ *ein symmetrisches Raster von* $\{V, R, \leqq\}$ *mit der Eigenschaft* $o \in T$ (*und* $e \in T$), $\{\mathbf{I}, T, \subseteq\}$ *das symmetrische Raster der Intervalle über V mit Schranken in T von* $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ *bezüglich der Inklusion* $\subseteq$. *Dann bildet* $\{\mathbf{I}T, \mathbf{I}S\}$ *mit den Verknüpfungen*

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbf{I}T} A \overset{+}{\diamond} B := \diamond(A \boxplus B)$$

(*und*

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbf{I}T} A \dot{\diamond} B := (A \boxdot B)),$$

$$\bigwedge_{A \in \mathbf{I}S} \bigwedge_{A \in \mathbf{I}T} A \dot{\diamond} A := \diamond(A \boxdot A)$$

ein optimales oberes (multiplikatives) Rastervektoid von $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ *bezüglich der Inklusion* $\subseteq$ *und es ist* $[o ; o]$ *neutrales Element in* $\{\mathbf{I}T, \overset{+}{\diamond}\}$ (*und* $[e ; e]$ *neutrales Element in* $\{\mathbf{I}T, \dot{\diamond}\}$). *Ferner bildet* $\{\mathbf{I}T, \mathbf{I}S, \leqq, \subseteq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes (bzw. geordnetes) inklusionsisoton geordnetes (multiplikatives) Vektoid.*

Beweis. Da $\diamond : \mathbf{I}V \to \mathbf{I}T$ eine optimale, symmetrische, nach oben gerichtete Rundung ist, bildet nach [9] $\{\mathbf{I}T, \mathbf{I}S\}$ ein optimales oberes Rastervektoid von $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ bezüglich der Ordnungsrelation $\subseteq$. Die in $\mathbf{I}T$ enthaltenen neutralen Elemente von $\{\mathbf{I}V, \mathbf{I}R\}$ sind auch die neutralen Elemente in $\{\mathbf{I}T, \mathbf{I}S\}$ Ferner ist $\{\mathbf{I}T, \leqq\}$ gemäß Abschnitt 0 vollständig, so daß lediglich noch die Inklusionsisotonie und (0V1), (0V2) (bzw. und (0V3)) zu zeigen sind: Mit Satz 1 gilt

$$\bigwedge_{A,B,C,D \in \mathbb{I}T} (A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \boxtimes C \subseteq B \boxtimes D \underset{(R1)}{\Rightarrow} \diamond (A \boxtimes C) \subseteq \diamond (B \boxtimes D)$$

$$\Rightarrow A \overset{*}{\diamond} C \subseteq B \overset{*}{\diamond} D) \text{ für } * = + \; (* \in \{+, \cdot\}) \text{ und}$$

$$\bigwedge_{\mathrm{A,B} \in \mathbb{I}S} \; \bigwedge_{A,B \in \mathbb{I}T} (\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \wedge A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{A} \boxdot A \subseteq \mathrm{B} \boxdot B \underset{(R1)}{\Rightarrow} \diamond (\mathrm{A} \boxdot A) \subseteq \diamond (\mathrm{B} \boxdot B)$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} \overset{\circ}{\diamond} A \subseteq \mathrm{B} \overset{\circ}{\diamond} B),$$

(0V1) $$\bigwedge_{A,B,C \in \mathbb{I}T'} (A \leqq B \Rightarrow A \boxplus B \leqq B \boxplus C \Rightarrow a_1 + c_1 \leqq b_1 + c_1 \wedge a_2 + c_2 \leqq b_2 + c_2$$

$$\Rightarrow \triangledown (a_1 + c_1) \leqq \triangledown (b_1 + c_1) \wedge \triangle (a_2 + c_2) \leqq \triangle (b_2 + c_2)$$

$$\Rightarrow \diamond (A \boxplus C) = A \overset{+}{\diamond} C \leqq B \overset{+}{\diamond} C = \diamond (B \boxplus C))$$

für $A = [a_1 ; a_2]$, $B = [b_1 ; b_2]$, $C = [c_1 ; c_2]$.

(0V2) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft in $\{\mathbb{I}V, \mathbb{I}R', \leqq\}$ wegen $\bar{\diamond} A = \boxminus A$ für alle A aus $\mathbb{I}T$.

(0V3): $$\bigwedge_{\mathrm{A} \in \mathbb{I}S'} \; \bigwedge_{A,B \in \mathbb{I}T'} ([0 ; 0] \leqq \mathrm{A} \wedge [o ; o] \leqq A \leqq B \underset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} \mathrm{A} \boxdot A \leqq \mathrm{A} \boxdot B$$

$$\Rightarrow \mathrm{a}_1 \cdot a_1 \leqq \mathrm{a}_1 \cdot b_1 \wedge \mathrm{a}_2 \cdot a_2 \leqq \mathrm{a}_2 \cdot b_2 \Rightarrow \triangledown(\mathrm{a}_1 \boxdot a_1) \leqq \triangledown(\mathrm{a}_1 \cdot b_1) \wedge$$

$$\triangle(\mathrm{a}_2 \cdot a_2) \leqq \triangle(\mathrm{a}_2 \cdot b_2) \Rightarrow \diamond(\mathrm{A} \boxdot A) \leqq (\mathrm{A} \boxdot B) \Rightarrow \mathrm{A} \overset{\bullet}{\diamond} A \leqq \mathrm{A} \overset{\bullet}{\diamond} B)$$

und analog die zweite Eigenschaft.

Ganz entsprechend folgt (0V4) aus Satz 2, (e).

Satz 7 besagt u.a., daß durch den Übergang von dem multiplikativen Vektoid $\{\mathbb{I}M_n R, \mathbb{I}R, \leqq\}$ der Intervalle über der Menge $M_n R$ der $n \times n$-Matrizen bei zugrundeliegendem vollständig schwach geordneten (bzw. geordneten) Ringoid $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ wieder dieselbe Struktur in dem symmetrischen Raster $\mathbb{I}T$ von $\mathbb{I}M_n R$ erzeugt wird. Dies gilt jedoch für die Ringoideigenschaft von $\{\mathbb{I}M_n R, \boxplus, \boxdot, \leqq\}$ (siehe [5], [9]) nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $\{M_2\mathbb{R}, \mathbb{R}, \leqq\}$ das vollständig geordnete multiplikative Vektoid der 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und T eine Teilmenge von $M_2\mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{T} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} \right\}.$$

$\{\mathrm{T}, \leqq\}$ ist offensichtlich ein symmetrisches Raster von $\{M_2 \mathbb{R}, \mathbb{R}, \leqq\}$ und enthält die Nullmatrix und die Einheitsmatrix. Zu beliebig vorgegebenem optimalen Rasterringoid $\{\mathbb{I}S, \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}\}$ von $\{\mathbb{I}R, \boxplus, \boxdot\}$ bezüglich der Inklusion $\subseteq$ bildet dann $\{\mathbb{I}T, \mathbb{I}S\}$ gemäß Satz 7 ein multiplikatives Vetoid mit den neutralen Elementen

$$O = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \text{ und } E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Außerdem erfüllt wegen $\bar{\diamond} A := [-1 ; -1] \overset{\bullet}{\diamond} A = (\bar{\diamond} \mathrm{E}) \overset{\bullet}{\diamond} A$ nach (VD3), (VD4) und (VD5) in $\{\mathbb{I}T, \mathbb{I}S\}$ das Element

$$X = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \neq E$$

das von einem Ringoid geforderte Axiom

(D5): (a) $X \overset{\bullet}{\diamond} X = E$

(b) $$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{I}T} X \overset{\bullet}{\diamond} (A \overset{\bullet}{\diamond} B) = (X \overset{\bullet}{\diamond} A) \overset{\bullet}{\diamond} B = A \overset{\bullet}{\diamond} (X \overset{\bullet}{\diamond} B)$$

(c) $$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{I}T} X \overset{\bullet}{\diamond} (A \overset{+}{\diamond} B) = (X \overset{\bullet}{\diamond} A) \overset{+}{\diamond} (X \overset{\bullet}{\diamond} B).$$

Wir zeigen jedoch, daß auch das Element

$$E^* := \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \neq E$$

(D5) genügt und somit $\{\mathbb{I}T, \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}\}$ kein Ringoid bildet: Wir führen den Nachweis in 5 Schritten und nützen hierbei die Isomorphie von $\{\mathbb{I}M_2\mathbb{R}', \mathbb{I}\mathbb{R}', \leqq\}$ und $\{M_2\mathbb{I}\mathbb{R}', \mathbb{I}\mathbb{R}', \leqq\}$ aus.

a) Alle Elemente $t = (\mathrm{t}_{ij}) \in \mathrm{T}$ sind von der Form $\mathrm{t}_{11} = \mathrm{t}_{22}$ und $\mathrm{t}_{21} = \mathrm{t}_{12}$ und die durch Zeilenvertauschung aus der Matrix $t \in \mathrm{T}$ entstandene Matrix t^* ist wieder Element von T. Daher ist auch $T^* := [t_1^* ; t_2^*] \in \mathbb{I}T'$ für jedes Element $T = [t_1 ; t_2] \in \mathbb{I}T'$.

b) Es gilt für alle $T \in \mathbb{I}T'$ mit $\varphi T = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1 & \mathrm{T}_2 \\ \mathrm{T}_2 & \mathrm{T}_1 \end{pmatrix}$

$$\varphi(E^* \boxdot \mathrm{T}) = \varphi E^* \odot \varphi T = \begin{pmatrix} [0 ; 0] & [1 ; 1] \\ [1 ; 1] & [0 ; 0] \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1 & \mathrm{T}_2 \\ \mathrm{T}_2 & \mathrm{T}_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [1 ; 1] \boxdot \mathrm{T}_2 & [1 ; 1] \boxdot \mathrm{T}_1 \\ [1 ; 1] \boxdot \mathrm{T}_1 & [1 ; 1] \boxdot \mathrm{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_2 & \mathrm{T}_1 \\ \mathrm{T}_1 & \mathrm{T}_2 \end{pmatrix} = \varphi(T^*).$$

Nach a) haben wir also

$$(2) \qquad \bigwedge_{T \in \mathbf{I}T'} E^* \overset{\bullet}{\diamond} T = \diamond (E^* \boxdot T) = \diamond T^* = T^*.$$

c) Es sei $T := [t_1 ; t_2] \in \mathbf{I}M_2\mathbf{R}'$ und $\diamond T = [\triangledown t_1 ; \vartriangle t_2] = : V = [v_1 ; v_2]$. Dann ist natürlich $T^* \subseteq (\diamond T)^* = v^*$, d.h. v^* ist obere Schranke von T^*. v^* ist auch kleinste obere Schranke von T^* in $\mathbf{I}T'$, da für jedes Element $w = [w_1 ; w_2] \in \mathbf{I}T'$ mit $T^* \subseteq w \subset v^*$ die Beziehung $T \subseteq w^* \subset v$ im Widerspruch zu $\diamond T = v$ steht. Es gilt also

$$(3) \qquad \bigwedge_{T \in \mathbf{I}M_2\mathbf{R}'} (\diamond T)^* = \diamond (T^*).$$

d) Durch Nachrechnen verifiziert man unter Beachtung von $\varphi(A^*) = (\varphi A)^*$ leicht die Eigenschaften

$$(4) \qquad \bigwedge_{A,B \in \mathbf{I}M_2\mathbf{R}'} ((A \boxdot B)^* = A^* \boxdot B = A \boxdot B^* \wedge (A \boxplus B)^* = A^* \boxplus B^*).$$

Wir beweisen hier nur die erste Aussage; die restlichen erhält man entsprechend:

$$\varphi((A \boxdot B)^*) = (\varphi A \odot \varphi B)^* =$$
$$= \begin{pmatrix} A_{21} \boxdot B_{11} \boxplus A_{22} \boxdot B_{21} & A_{21} \boxdot B_{12} \boxplus A_{22} \boxdot B_{22} \\ A_{11} \boxdot B_{11} \boxplus A_{12} \boxdot B_{21} & A_{11} \boxdot B_{12} \boxplus A_{12} \boxdot B_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \varphi A^* \odot \varphi B = \varphi(A^* \boxdot B), \quad \varphi A = (A_{ij}), \quad \varphi B = (B_{ij}).$$

e) Wir erhalten nun $E^* \overset{\bullet}{\diamond} E^* = (E^*)^* = E$ nach (2),

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbf{I}T'} E^* \overset{\bullet}{\diamond} (A \overset{\bullet}{\diamond} B) \underset{(2)}{=} (A \overset{\bullet}{\diamond} B)^* = (\diamond A \boxdot B))^* \underset{(3)}{=} \diamond((A \boxdot B)^*) \underset{(4)}{=}$$
$$= \diamond(A^* \boxdot B) = \diamond(A \boxdot B^*) \underset{(2)}{=} (E^* \overset{\bullet}{\diamond} A) \overset{\bullet}{\diamond} B = A \overset{\bullet}{\diamond} (E^* \overset{\bullet}{\diamond} B),$$

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbf{I}T'} E^* \overset{\bullet}{\diamond} (A \overset{+}{\diamond} B) \underset{(2)}{=} (\diamond(A \boxplus B))^* \underset{(3)}{=} \diamond(A \boxplus B)^*) \underset{(4)}{=}$$
$$= \diamond(A^* \boxplus B^*) \underset{(2)}{=} (E^* \overset{\bullet}{\diamond} A) \overset{+}{\diamond} (E^* \overset{\bullet}{\diamond} B),$$

d.h. E^* erfüllt das Axiom (D5) in $\{\mathbf{I}T', \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}\}$. Ferner sind die Gleichungen trivialerweise erfüllt, falls einer der Operanden A, B die leere Menge $\emptyset$ ist.

Wir erkennen an dem vorstehenden Beispiel, daß man bei den Matrizen den Übergang zu einem Raster nicht in der Allgemeinheit von Satz 7 vornehmen kann, falls man die Ringoidstruktur erhalten will. Der folgende einschränkende Satz wird jedoch voll der praktischen Vorgehensweise auf Rechenanlagen gerecht.

SATZ 8. *Es sei* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes (bzw. geordnetes) Ringoid mit den ausgezeichneten Elementen* $\{-e, 0, e\}$ *und der Eigenschaft, daß genau ein Element* $x \neq e$ *das Axiom* (D5a) *erfüllt, sowie* $\{T, \leqq\}$ *ein symmetrisches Raster von* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *mit der Eigenschaft* $0, e \leqq T$. *Es bezeichne ferner* $\{M_nR, +, \cdot \leqq\}$ *das vollständig schwach geordnete (bzw. geordnete) Ringoid der* $n \times n$*-Matrizen über* $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ *mit den neutralen Elementen* $\{-e, o, e\}$ *und* $\{\mathbf{I}M_nR', \boxplus, \boxdot, \leqq\}$ *das vollständig schwach geordnete Ringoid der Intervalle über* $\{M_nR, \leqq\}$ *mit den ausgezeichneten Elementen* $\{[-e ; -e], [o ; o ;], [e ; e]\}$. *Dann bildet die Menge* $\mathbf{I}M_nT$ *der Intervalle über* $\{M_nR, \leqq\}$ *mit Schranken aus* M_nT *mit den in Satz 7 definierten Verknüpfungen* $\overset{*}{\diamond} : \mathbf{I}M_nT \times \mathbf{I}M_nT \to \mathbf{I}M_nT$, $* \in \{+, \cdot\}$ *ein optimales, oberes Rasterringoid von* $\{\mathbf{I}M_nR, \boxplus, \boxdot\}$ *bezüglich der Inklusion* $\subseteq$ *und* $\{\mathbf{I}M_nT', \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}, \leqq, \subseteq\}$ *ein vollständig schwach geordnetes (bzw. geordnetes), inklusionsisoton geordnetes Ringoid mit den ausgezeichneten Elementen* $\{[-e ; -e], [o ; o], [e ; e]\}$.

Beweis. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Ordnungsrelation bildet $(M_nT, \leqq\}$ ein symmetrisches Raster von $\{M_nR, +, \cdot, \leqq\}$ und damit $\{\mathbf{I}M_nT, \subseteq\}$ ein symmetrisches Raster von $\{\mathbf{I}M_n, R, \boxplus, \boxdot\}$ bezüglich der Inklusion $\subseteq$ mit $[o ; o]$, $[e ; e] \in \mathbf{I}M_nT$. Ebenso ist die optimale, nach oben gerichtete Rundung $\diamond : \mathbf{I}M_nR \to \mathbf{I}M_nT$ symmetrisch. Nach [4] ist dann $\{\mathbf{I}M_nT, \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}\}$ ein optimales, oberes Rastersemiringoid von $\{\mathbf{I}M_nR, \boxplus, \boxdot\}$ bezüglich der Inklusion mit den neutralen Elementen $[o ; o]$, $[e ; e]$ und es erfüllt $[-e ; -e]$ das Axiom (D5) in $\mathbf{I}M_nT$. Es zeigt sich ferner in [5], daß jedes Intervall $X \neq [e ; e]$, welches das Axiom (D5) in $\{\mathbf{I}M_nT, \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}\}$ erfüllt, ein Punktintervall $\varkappa = [\varkappa ; \varkappa]$, $\varkappa = (x_{ij}) \in M_nT$ ist. Für $B = [e ; e] \in \mathbf{I}M_nT$ folgt aus

$$(\text{D5b}) \qquad \bigwedge_{A,B \in \mathbf{I}M_nT} X \overset{\circ}{\diamond} (A \overset{\circ}{\diamond} B) = (X \overset{\circ}{\diamond} A) \overset{\circ}{\diamond} B = A \overset{\bullet}{\diamond} (X \overset{\circ}{\diamond} B)$$

sofort $X \overset{\bullet}{\diamond} A = A \overset{\circ}{\diamond} X$ für alle $A \in \mathbf{I}M_nT$. Wählen wir speziell $A^{(k)} = [a^{(k)} ; a^{(k)}] \in \mathbf{I}M_nT$ mit $a^{(k)} = (a_{ij})$, $a_{kk}^{(k)} = e$, $a_{ij}^{(k)} = 0$ sonst, so folgt aus der Vertauschbarkeit von $A^{(k)}$ mit X die Beziehung $x_{kj} = x_{jk} = 0$ für $j \neq k$, d.h. $\varkappa$ hat Diagonalgestalt. Für die Matrix $A = [a ; a] \in \mathbf{I}M_nT$ mit $a = (a_{ij})$, $a_{ij} = e$, $i, j = 1(1)n$, erhalten wir wiederum aus der Vertauschbarkeit mit x die Beziehung $x_{11} = x_{22} = \ldots = x_{nn} = : x$.

Nach

$$(\text{D5a}) \qquad X \overset{\circ}{\diamond} X = [e ; e]$$

in $\mathbf{I}M_nT$ gilt ferner aufgrund der Gerichtetheit der Rundung $\diamond\ x \cdot x = e$ mit $x \neq e$. Nach Voraussetzung besitzt aber in $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ nur das Element $-e$ diese Eigenschaft und es gilt somit $X = [-e ; -e]$. Damit ist

$\{IM_nT, \overset{+}{\diamond}, \overset{\bullet}{\diamond}\}$ ei optimales, oberes Rasterringoid von $\{IM_nR, \boxplus, \boxdot\}$ bezüglich der Inklusion $\subseteq$. Die restlichen Aussagen beweist man mit den zu Satz 7 entsprechenden Schlüssen.

Die Voraussetzungen des Satzen 8 sind so gefaßt, daß er sowohl auf die reellen Zahlen **R** als auch auf die komplexen Zahlen **C** als zugrundeliegende Ringoide anwendbar ist, da kanntlich $\{R, +, \cdot, \leq\}$ und $\{C, +, \cdot, \leq\}$ schwach geordnete Ringoide bilden mit der züsätzlichen Eigenschaft, daß genau ein Element $x \neq e$ das Axiom (D5a) erfüllt.

LITERATUR

[1] Alefeld, G., *Über Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten einer Intervallarithmetik über den komplexen Zahlen.* ZAMM **50**, 455—465 (1970)

[2] Kulisch, U., *Grundzüge der Intervallrechnung.* In „Überblicke Mathematik" 2, Bibliographisches Institut, Mannheim (1969)

[3] — , *An axiomatic approach to rounded computations.* Numer. Math. **18**, 1—17 (1971)

[4] — , *Rounding invariant structures.* Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Technical Summary Report # 1103, September 1970, 1—47

[5] — , *Interval arithmetic over completely ordered ringoids.* Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Ttechnical Summary Report # 1105, 1—55

[6] Mayer, O., *Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen.* Computing **5**, 144—162 (1970)

[7] Moore, R. E., *Interval Analysis.* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall Inc. (1966)

[8] Ullrich, Ch., *Rundungsinvariante Strukturen mit äußeren Verknüpfungen.* Diss., Universität Karlsruhe, 1972

[9] — , *Rundungsinvariante Eigenschaften linearer Räume.* Interner Bericht.

[10] — , *Zur Struktur der Matrizen über kamplexen Ringoiden.* (In Vorbereitung)

Eigegangen am 11.X. 1974

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
75 Karlsruhe, Kaiserstr. 12

Întreprinderea Poligrafică Cluj. Municipul Cluj-Napoca — 3010/1980.