MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 11—18

EINE VERALLGEMEINERUNG DES PRINZIPS DER GLEICHMÄSSIGEN BESCHRÄNKTHEIT

von

WOLFGANG W. BRECKNER
(Cluj-Napoca)

1. Die Aussage, dass eine punktweise beschränkte Menge von stetigen linearen Abbildungen eines reellen oder komplexen Banach-Raumes in einen normierten linearen Raum über demselben Zahlkörper gleichmässig beschränkt ist, stellt eines der fundamentalen Prinzipien der Funktionalanalysis dar und wird *Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit* genannt. Dieses Prinzip besitzt viele Anwendungsmöglichkeiten. Zieht man es zur Konvergenzuntersuchung von Folgen stetiger linearer Funktionale heran, so ergibt sich der folgende *Satz von Banach-Steinhaus,* der in der Approximationstheorie häufig benutzt wird:

Eine Folge $(f_n)_{n \in N}$ *von stetigen linearen Funktionalen, die auf einem reellen oder komplexen Banach-Raum* X *definiert sind, konvergiert genau dann punktweise gegen ein stetiges lineares Funktional* f, *das auf* X *erklärt ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *für alle* x *aus einer in* X *dichten Teilmenge* X_0 *von* X *ist die Folge* $(f_n(x))_{n \in N}$ *konvergent;*

(ii) *die Folge* $(||f_n||)_{n \in N}$ *ist beschränkt.*

Wir kennen heute verschiedene Verallgemeinerungen des Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit und des obigen Satzes von Banach-Steinhaus. So wird in dem Buch von HOLMES R. B. [7, S. 134] bemerkt, dass das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit eine einfache Folgerung des aus der konvexen Analysis bekannten Satzes über die Stetigkeit einer auf einem reellen oder komplexen Banach-Raum nach unten halbstetigen konvexen Funktion ist. Andererseits hat KOSMOL P. [8, S. 17—23] gezeigt, dass der Satz von Banach-Steinhaus für Folgen stetiger konvexer Funktionen verallgemeinert werden kann, die auf einer offenen konvexen Teilmenge eines topologischen linearen Raumes der zweiten Kategorie erklärt sind. Als Anwendung der von ihm erzielten Ergebnisse beweist KOSMOL P. [8, S. 23—29] Aussagen über die Abhängigkeit des Extremalwertes und der Lösungen eines konvexen Optimierungsproblems von der Änderung der Menge der zulässigen Lösungen und der Zielfunktion. Ähnliche Untersuchungen hat auch MACKENROTH U. [9], [10] vorgenommen und auf Kontrollprobleme angewendet.

Da in der nichtlinearen Optimierung in zunehmenden Masse neben konvexen Funktionen auch Funktionen mit verallgemeinertem Konvexitätsverhalten betrachtet werden (vgl. ELSTER K.-H. und FOLGMANN G. [3], [4], [5], [6]), ist die Frage nach der Möglichkeit der Übertragung auf verallgemeinerte konvexe Funktionen der oben erwähnten Ergebnisse aus der Theorie der konvexen Funktionen, die durch Spezialisierung das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit und den Satz von Banach-Steinhaus ergeben, naheliegend. Ziel unserer Ausführungen ist es einen ersten Schritt zur Beantwortung dieser Frage zu unternehmen und zu zeigen, dass man sowohl das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit als auch den erwähnten Satz von Banach-Steinhaus für die von BRECKNER W. W. [1] eingeführten rational s-konvexen Funktionen verallgemeinern kann.

Im folgenden bezeichnet N stets die Menge der natürlichen Zahlen, R die Menge der reellen Zahlen, s eine Zahl aus dem Intervall $]0, 1]$, M eine nichtleere konvexe Teilmenge eines reellen oder komplexen topologischen linearen Raumes und F eine nichtleere Menge reellwertiger Funktionen, die auf M erklärt sind. Die obere Grenze von F wird mit $\sup F$ und die untere Grenze von F mit $\inf F$ bezeichnet.

2. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit zwei grundlegenden Definitionen. Eine Funktion $f: M \to R$ heisst *rational s-konvex* (bzw. *s-konvex*), wenn für alle rationalen (bzw. reellen) Zahlen $a > 0$, $b > 0$ mit $a + b = 1$ und alle Punkte x, y aus M die Ungleichung

$$f(ax + by) \leq a^s f(x) + b^s f(y)$$

gilt.

Offensichtlich ist jede s-konvexe Funktion rational s-konvex. Die Umkehrung dieser einfachen Eigenschaft ist im allgemeinen nicht richtig. Jede stetige rational s-konvexe Funktion ist aber s-konvex.

Kriterien für die Stetigkeit rational s-konvexer Funktionen wurden von BRECKNER W. W. [1] bewiesen. Auf Grund dieser Kriterien (u. zw. von Satz 2.2 und Korollar 2.3 aus [1]) lässt sich folgender Satz angeben.

SATZ 2.1. *Es sei M eine offene Menge und $f: M \to R$ eine rational s-konvexe Funktion. Gibt es ein $x_0 \in M$, so dass f an dieser Stelle lokal nach oben beschränkt ist (d. h. es gibt eine in M enthaltene Umgebung U von x_0 und eine reelle Zahl a mit der Eigenschaft $f(x) \leq a$ für alle $x \in U$), dann ist f stetig und s-konvex.*

Dieser Satz ist das wichtigste Hilfsmittel im Beweis des folgenden Satzes über die Stetigkeit einer nach unten halbstetigen rational s-konvexen Funktion auf einer offenen Menge zweiter Kategorie.

SATZ 2.2. *Ist M eine offene Menge von zweiter Kategorie und $f: M \to R$ eine nach unten halbstetige rational s-konvexe Funktion, dann ist f stetig und s-konvex.*

Beweis. In der auf M induzierten Topologie ist M ein topologischer Raum von zweiter Kategorie. Nach einem bekannten Satz aus der Topologie (vgl. CECH E. [2, S. 384]) gibt es dann ein $x_0 \in M$, eine in M enthaltene Umgebung U und eine reelle Zahl a, so dass $f(x) \leq a$ für alle $x \in U$ gilt. Wendet man nun Satz 2.1 an, so folgt, dass f stetig und s-konvex ist. ∎

K o r o l l a r 2.3. *Es sei M eine offene Menge von zweiter Kategorie und F eine Menge nach unten halbstetiger rational s-konvexer Funktionen, die nach oben punktweise beschränkt ist. Dann ist die Funktion $\sup F$ stetig und s-konvex.*

Beweis. Weil die Funktion $\sup F$ nach unten halbstetig und rational s-konvex ist, ist sie nach Satz 2.2 stetig und s-konvex. ∎

Aus Korollar 2.3 ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage.

K o r o l l a r 2.4. *Es sei M eine offene Menge von zweiter Kategorie und F eine Menge nach unten halbstetiger rational s-konvexer Funktionen, die nach oben punktweise beschränkt ist. Dann besitzt jedes $x \in M$ eine in M enthaltene Umgebung $U(x)$ mit der Eigenschaft*

$$\sup \{\{\sup f(y) : y \in U(x)\} : f \in F\} < +\infty.$$

Einfache Überlegungen zeigen, dass Korollar 2.4 das im ersten Abschnitt erwähnte Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit liefert. Im Verein mit den Implikationen

$$\text{Satz } 2.1 \Rightarrow \text{Satz } 2.2 \Rightarrow \text{Korollar } 2.3 \Rightarrow \text{Korollar } 2.4$$

ergibt sich somit, dass alle Ergebnisse dieses Abschnitts als Verallgemeinerungen des Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit angesehen werden können.

3. In diesem Abschnitt befassen wir uns mit punktweise beschränkten Mengen rational s-konvexer Funktionen.

SATZ 3.1. *Es sei M eine offene Menge und F eine punktweise beschränkte Menge rational s-konvexer Funktionen. Ist die Funktion $\sup F$ stetig, dann ist auch $\inf F$ stetig.*

Beweis. Aus der Stetigkeit der Funktion $\sup F$ folgt nach Satz 2.1 die Stetigkeit aller Funktionen aus F. Daher ist $\inf F$ nach oben halbstetig. Es bleibt also nur zu zeigen, dass $\inf F$ auch nach unten halbstetig ist.

Es sei x_0 ein beliebiger Punkt von M. Wir geben uns $\varepsilon > 0$ beliebig vor. Weil $\sup F$ in x_0 stetig ist, gibt es eine kreisförmige Nullumgebung V und eine reelle Zahl a, so dass $x_0 + V$ in M enthalten ist und

$$(3.1) \qquad (\sup F)(x) \leq a \text{ für alle } x \in x_0 + V$$

gilt. Es sei $\theta(s) = 0$ falls $s \in]0, 1[$ und $\theta(s) = 1$ falls $s = 1$. Weiterhin sei r eine rationale Zahl aus dem Intervall $]0, 1]$ die der Ungleichung

$$(3.2) \qquad r^s[a - \theta(s)(\inf F)(x_0)] < \varepsilon$$

genügt. Die Menge $U = x_0 + rV$ ist dann eine Umgebung von x_0 und in M enthalten. Ausserdem gilt

$$(3.3) \qquad (\inf F)(x_0) - \varepsilon < (\inf F)(x) \text{ für alle } x \in U.$$

In der Tat, ist x aus U, dann lässt es sich in der Form $x = x_0 + ry$ darstellen, wobei y der Nullumgebung V angehört. Weil

$$x_0 = \frac{1}{1+r}\, x + \frac{r}{1+r}\,(x_0 - y)$$

gilt, folgt auf Grund der Definition der rational s-konvexen Funktion

$$f(x_0) \leq \left(\frac{1}{1+r}\right)^s f(x) + \left(\frac{r}{1+r}\right)^s f(x_0 - y)$$

für alle $f \in F$. Wegen (3.1) resultiert hieraus

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (1+r)^s f(x_0) - r^s f(x_0 - y) \geq \\ &\geq f(x_0) - r^s[f(x_0 - y) - \theta(s) f(x_0)] \geq \\ &\geq (\inf F)(x_0) - r^s[a - (\inf F)(x_0)] \end{aligned}$$

für alle $f \in F$. Beachtet man (3.2), so erhält man

$$(\inf F)(x_0) - \varepsilon < (\inf F)(x).$$

Damit ist (3.3) bewiesen. Das bedeutet aber, dass die Funktion $\inf F$ in x_0 nach unten halbstetig ist. ∎

K o r o l l a r 3.2. *Es sei M eine offene Menge und F eine punktweise beschränkte Menge rational s-konvexer Funktionen. Ist die Funktion $\sup F$ stetig, dann gelten die folgenden Aussagen:*

1° Jeder Punkt $x \in M$ besitzt eine in M enthaltene Umgebung auf der F gleichmässig beschränkt ist.

2° F ist auf jeder nichtleeren kompakten Teilmenge von M gleichmässig beschränkt.

Als Folgerung erhalten wir aus dem Korollar 3.2 den nachstehenden Satz über die gleichmässige Gleichstetigkeit einer punktweise beschränkten Menge von rational s-konvexen Funktionen. Bezeichnet M_0 eine nicht-

leere Teilmenge von M, dann nennen wir die Menge F von Funktionen *gleichmässig gleichstetig* auf M_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Nullumgebung V gibt, so dass für alle $x, y \in M_0$ mit $x - y \in V$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } f \in F$$

gilt.

SATZ 3.3. *Es sei M eine offene Menge und F eine punktweise beschränkte Menge rational s-konvexer Funktionen. Ist die Funktion $\sup F$ stetig, dann gelten die folgenden Aussagen:*

1° Jeder Punkt $x \in M$ besitzt eine in M enthaltene Umgebung auf der F gleichmässig gleichstetig ist.

2° F ist auf jeder nichtleeren kompakten Teilmenge von M gleichmässig gleichstetig.

Beweis. 1° Es sei x ein beliebiger Punkt aus M. Nach Korollar 3.2 existieren eine kreisförmige Nullumgebung V_0 und reelle Zahlen a, b, so dass $x + V_0 + V_0$ in M enthalten ist und

$$(3.4) \qquad a \leq (\inf F)(y) \leq (\sup F)(y) \leq b \text{ für alle } y \in x + V_0 + V_0$$

gilt. Die Menge $U = x + V_0$ ist eine Umgebung von x mit der Eigenschaft $U \subseteq M$. Wir zeigen, dass F auf U gleichmässig gleichstetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen eine rationale Zahl $r \in]0, 1]$ die der Ungleichung

$$(3.5) \qquad r^s[b - \theta(s)\, a] < \varepsilon$$

genügt, wobei $\theta(s)$ die gleiche Bedeutung hat wie im Beweis von Satz 3.1. Ferner setzen wir $V = rV_0$. Für alle y, z aus U mit $y - z \in V$ gilt dann

$$(3.6) \qquad f(y) - f(z) < \varepsilon \text{ für alle } f \in F.$$

In der Tat, sind y, z Punkte von U mit $y - z \in V$, dann gehört der Punkt $y_0 = z + r^{-1}(y - z)$ der Menge $x + V_0 + V_0$ an und es gilt $y = ry_0 + (1 - r)z$. Auf Grund der Definition der rational s-konvexen Funktion haben wir dann

$$f(y) \leq r^s f(y_0) + (1 - r)^s f(z) \text{ für alle } f \in F$$

und somit

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &\leq r^s f(y_0) + [(1 - r)^s - 1] f(z) \leq \\ &\leq r^s[f(y_0) - \theta(s) f(z)] \leq \\ &\leq r^s[b - \theta(s)\, a] \end{aligned}$$

für alle $f \in F$. Beachtet man (3.5), so ergibt sich (3.6). Damit ist bewiesen, dass F auf U gleichmässig gleichstetig ist.

2° Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von M und $\varepsilon > 0$. Auf Grund der vorhergehenden Aussage besitzt jedes $x \in M$ eine in M

enthaltene Umgebung $U(x)$ auf der F gleichmässig gleichstetig ist. Zu jedem $U(x)$ existiert eine offene Nullumgebung $V(x)$, so dass $x + V(x) + V(x) \subseteq U(x)$ gilt. Weil K kompakt ist, gibt es dann endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m$ in K derart dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + V(x_i))$$

gilt. Beachtet man nun, dass F auf jeder Umgebung $U(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, gleichmässig gleichstetig ist, so folgt, dass es für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ eine Nullumgebung V_i gibt, so dass für alle $y, z \in U(x_i)$ mit $y - z \in V_i$ die Ungleichung

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon \text{ für alle } f \in F \tag{3.7}$$

gilt.

Wir setzen

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} (V(x_i) \cap V_i)$$

und behaupten, dass für alle $y, z \in K$ mit $y - z \in V$ die Ungleichung (3.7) gilt. In der Tat, sind y, z Punkte aus K mit $y - z \in V$, dann gibt es einen Index $i \in \{1, \ldots, m\}$ derart dass $z \in x_i + V(x_i)$ und demnach auch

$$y = z + (y - z) \in x_i + V(x_i) + V(x_i)$$

gilt. Folglich gehören y und z der Umgebung $U(x_i)$ an. Wegen $y - z \in V_i$ gilt dann (3.7). Damit ist bewiesen, dass F auf K gleichmässig gleichstetig ist. ∎

4. Bekanntlich nennen wir die Menge F von Funktionen *gleichstetig in einem Punkt* $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U des Punktes x_0 gibt, so dass für alle $x \in M \cap U$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } f \in F$$

gilt. Ist nun F auf einer Teilmenge M_0 von M gleichmässig gleichstetig, dann ist F in jedem Punkt von M_0 gleichstetig. Diese Bemerkung dient zusammen mit Satz 3.3 als Grundlage für unsere folgenden Untersuchungen betreffend die punktweise Konvergenz von Folgen nach unten halbstetiger rational s-konvexer Funktionen.

SATZ 4.1. *Es sei M eine offene Menge von zweiter Kategorie und $(f_n)_{n \in N}$ eine Folge nach unten halbstetiger rational s-konvexer Funktionen, die auf M erklärt sind. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in N}$ punktweise gegen die Funktion $f: M \to R$, dann gelten die folgenden Aussagen:*

1° Die Grenzfunktion f ist stetig und s-konvex.

2° Die Folge $(f_n)_{n \in N}$ konvergiert gleichmässig gegen f auf jeder nichtleeren kompakten Teilmenge von M.

Beweis. 1° Die Grenzfunktion f ist offensichtlich rational s-konvex. Weil die Menge $F_0 = \{f_n : n \in N\}$ punktweise beschränkt ist, ist die obere Grenze $\sup F_0$ dieser Menge nach Korollar 2.3 stetig. Beachtet man nun, dass $f(x) \leq (\sup F_0)(x)$ für alle $x \in M$ gilt, so ergibt sich nach Satz 2.1 dass f stetig und s-konvex ist.

2° Es sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge von M. Wir geben uns $\varepsilon > 0$ beliebig vor. Weil die Menge $\{f_n : n \in N\}$ punktweise beschränkt ist, ist sie nach Satz 3.3 in jedem Punkt von M gleichstetig. Für jedes $x \in M$ gibt es daher eine in M enthaltene offene Umgebung $U(x)$ von x, so dass für alle $y \in U(x)$ und alle $n \in N$ die Ungleichung

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.1}$$

gilt. Da $(f_n)_{n \in N}$ punktweise gegen f strebt, folgt hieraus

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } y \in U(x). \tag{4.2}$$

Weil K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m$ in K, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$$

gilt. Wegen der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_{n \in N}$ gegen f, lässt sich dann ein Index $n_0 \in N$ derart angeben, dass

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.3}$$

für alle $n \in N$, $n \geq n_0$, und jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ befriedigt wird. Ist nun x ein beliebiger Punkt aus K, dann gibt es einen Index $i \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $U(x_i)$ diesen Punkt enthält. Aus (4.1), (4.3) und (4.2) folgt dann

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + \\ + |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \in N$, $n \geq n_0$. Demnach konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in N}$ auf K gleichmässig gegen f. ∎

SATZ 4.2. *Es sei M eine offene Menge von zweiter Kategorie und $(f_n)_{n \in N}$ eine Folge nach unten halbstetiger rational s-konvexer Funktionen, die auf M erklärt sind. Die Folge $(f_n)_{n \in N}$ konvergiert genau dann punktweise gegen eine stetige s-konvexe Funktion $f: M \to R$, wenn es eine Teilmenge M_0 von M gibt, die den folgenden Bedingungen genügt:*

(i) *M_0 ist in M, in der auf M induzierten Topologie, dicht;*

(ii) *für jedes $x \in M_0$ ist die Folge $(f_n(x))_{n \in N}$ konvergent;*

(iii) *für jedes $x \in M \setminus M_0$ ist die Folge $(f_n(x))_{n \in N}$ beschränkt.*

Beweis. Die *Notwendigkeit* ist klar.

Hinlänglichkeit. Nach Satz 3.3 ist die Menge $\{f_n : n \in N\}$ in jedem Punkt von M gleichstetig. Ist x ein beliebiger Punkt von M, dann existiert für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$ eine in M enthaltene Umgebung $U(x)$ von x derart, dass für alle $y \in U(x)$ und alle $n \in N$ die Ungleichung (4.1) gilt. Weil M_0 in der auf M induzierten Topologie dicht in M ist, ist der Durchschnitt $M_0 \cap U(x)$ nicht leer. Es sei y ein Punkt aus $M_0 \cap U(x)$. Nach Bedingung (ii) gibt es dann ein $n_0 \in N$ mit der Eigenschaft

$$|f_m(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle natürlichen Zahlen $m \geq n_0$, $n \geq n_0$. Wegen (4.1) folgt hieraus

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_n(y)| + \\ + |f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen $m \geq n_0$, $n \geq n_0$. Die Folge $(f_n(x))_{n \in N}$ ist somit konvergent in sich und daher konvergent. Da $x \in M$ beliebig gewählt war, kann man eine Funktion $f : M \to R$ durch

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ für alle } x \in M$$

definieren. Nach Satz 4.1 ist diese Funktion stetig und s-konvex. ∎

Zum Abschluss bemerken wir, dass aus Satz 4.2 der Satz von Banach-Steinhaus für stetige lineare Funktionale folgt.

LITERATUR

[1] Breckner W. W., *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **23(37)**, 13–20 (1978)

[2] Cech E., *Topological spaces.* Prague: Academia 1966

[3] Elster K.-H., Folgmann G., *Über Verallgemeinerungen konvexer Funktionen und deren Anwendung in der Theorie der nichtlinearen Optimierung.* Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau **16**, Nr. *4*, 23–34 (1970).

[4] Elster K.-H., Folgmann G., *Verallgemeinerte konvexe Funktionale in linearen Räumen (Teil 1).* Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau **20**, Nr. *3*, 11–30 (1974)

[5] Elster K.-H., Folgmann G., *Verallgemeinerte konvexe Funktionale in linearen Räumen (Teil 2).* Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau **22**, Nr. *7*, 55–83 (1976)

[6] Elster K.-H., Folgmann G., *Verallgemeinerte konvexe Funktionale in linearen Räumen (Teil 3).* Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau **23**, Nr. *4*, 103–128 (1977)

[7] Holmes R. B., *Geometric functional analysis and its applications.* New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1975

[8] Kosmol P., *Optimierung konvexer Funktionen mit Stabilitätsbetrachtungen.* Dissertationes Math. Rozprawy Mat. **140** (1976)

[9] Mackenroth U., *Dualität und Approximation bei parabolischen Kontrollproblemen.* Dissertation. Mainz: Johannes Gutenberg Universität 1976

[10] Mackenroth U., *Dualität und Approximation bei konvexen Optimierungsproblemen.* ZAMM **58**, 459–460 (1978)

Eingegangen am 18. XII. 1979.

Universitatea „Babeş-Bolyai",
Facultatea de Matematică,
Cluj-Napoca