MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 27–33

UNE MÉTHODE D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par

ADRIAN DADU

(Cluj-Napoca)

On connait la méthode classique de KRYLOV pour accélérer la convergence d'une série Fourier attachée à une fonction donnée [2], [1]. La méthode suppose nécessairement la connaissance de la fonction en question.

Dans le présent travail on donne une méthode d'accélération de la convergence d'une série trigonométrique — en principe quelconque — bassée sur la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = U_n\, v_{n+1} - U_0 v_1 - \sum_{k=1}^{n} U_k \Delta v_k \tag{1}$$

où (u_k) et (v_k) sont des suites à valeurs réelles ou conplexes et $U_k = \sum_{i=0}^{k} u_i$.

Soit la série trigonométrique convergente :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2}$$

à coefficients réels ou complexes ; on s'occuppe seulement de la partie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, et on suivra aprés la même voie aussi pour la partie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

On pose $u_k = \cos kx$ et $v_k = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, d'où, comme on le sait :

$$U_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(2k+1)x}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

et on considére par définition $U_0 = 1$. La formule antérieure de U_k est valable seulement pour $x \neq 2\nu\pi (\nu \in Z)$; si $x = 2\nu\pi$ la série trigonométrique (2) dégénère en la série numérique $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ que l'on étudie comme telle. En appliquant la transformation (1) à la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right]a_{n+1} - a_1 -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(2k+1)x}{2}\right]\Delta a_k = \frac{a_{n+1}}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(2n+1)x}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} - a_1 -$$

$$-\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_1) - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k \sin\frac{(2k+1)}{2} = \frac{a_{n+1}}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(2n+1)x}{2} -$$

$$-\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k \sin\frac{(2k+1)x}{2}.$$

À la derniére somme on applique de nouveau la transformation (1) avec $u_k = \sin\frac{(2k+1)x}{2}$ et $v_k = \Delta a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, d'où, comme on le sait,

$$U_k = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cos(k+1)x \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k \sin\frac{(2k+1)x}{2} = \left[\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cos(n+1)x\right]\Delta a_{n+1} -$$

$$-\left[\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cos x\right]\Delta a_1 - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right]\Delta^2 a_k = -$$

$$-\frac{\Delta a_{n+1}}{2\sin\frac{x}{2}}\cos(n+1)x + \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_1 + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta^2 a\cos(k+1)x = -$$

$$-\frac{\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_{n+1} + \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_1 + \frac{\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta^2 a_n - \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta^2 a_0 +$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta^2 a_{k-1}\cos kx = -\frac{\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_n + \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_0 +$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta^2 a_{k-1}\cos kx.$$

En introduisant ce dernier résultat dans notre calcul antérieur,on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} a\cos kx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}a_{n+1} -$$

$$-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_n + \frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta a_0 + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta^2 a_{k-1}\cos kx\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}a_{n+1} + \frac{\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}\Delta a_n - \frac{a_1}{2} - \frac{\cos x}{4\sin^2\frac{x}{2}}\Delta a_0 -$$

$$-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta^2 a_{k-1}\cos kx.$$

En tenant compte du fait que la série est convergente, le passage à la limite $n \to \infty$ implique $a_{n+1} \to 0$, $\Delta a_m \to 0$, donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\cos kx = -\frac{a_1}{2} - \frac{\cos x}{4\sin^2\frac{x}{2}}\Delta a_0 - \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^2 a_{k-1}\cos kx. \tag{3}$$

En siuvant des calcules similaires pour $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, on arrive à

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \frac{b_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^2 b_{k-1} \sin kx \tag{4}$$

et pour la série trigonométrique complète on aura la transformation :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{2} - \frac{\cos x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \Delta a_0 + \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} b_0 - \tag{5}$$

$$- \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^2 a_{k-1} \cos kx + \Delta^2 b_{k-1} \sin kx).$$

On remarque, que la transformation (5) est une analogie de la transformation d'Abel-Euler, connue pour les séries de puissances [1].

THÉORÈME 1. *Soit* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ *respectivement* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ *des séries convergentes. Si* $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_j} = 1$ *respectivement* $\lim_{k \to \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1$, *alors la transformation* (3) *respectivement* (4) *accélère la convergence de la série correspondante.*

Démonstration. Conformément au théorème 3 du travail [3], si le rapport $\frac{\Delta^2 a_{k-1}}{a_k}$ des coefficients des deux séries de cosinus converge à zéro pour $k \to \infty$, alors la série transformée converge plus vite que la série originelle. On écrira

$$\frac{\Delta^2 a_{k-1}}{a_k} = \frac{a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1}}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_k} - 2 + \frac{1}{\frac{a_k}{a_{k-1}}},$$

et vu la condition $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} = 1$ on obtiendra $\lim_{k \to \infty} \frac{\Delta^2 a_{k-1}}{a_k} = 0$. Même considérations pour la série de sinus. C.Q.F.D.

La transformation (5) peut être itérée de la façon suivante : on l'applique à la série $\sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^2 a_{k-1} \cos kx + \Delta^2 b_{k-1} \sin kx)$ et on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^2 a_{k-1} \cos kx + \Delta^2 b_{k-1} \sin kx) = -\left(\frac{\Delta^2 a_0}{2} + \frac{\cos x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \Delta^3 a_{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \Delta^2 b_1 \right) - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^4 a_{k-2} \cos kx + \Delta^4 b_{k-2} \sin kx)$$

et conformément à (5) on aura

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} - \left(\frac{a_1}{2} + \frac{\cos x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \Delta a_0 - \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} b_0 \right) +$$

$$+ \left(\frac{\Delta^2 a_0}{8 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\cos x}{16 \sin^4 \frac{x}{2}} \Delta^3 a_{-1} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{8 \sin^3 \frac{x}{2}} \Delta^2 b_1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{16 \sin^4 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^4 a_{k-2} \cos kx + \Delta^4 b_{k-2} \sin kx).$$

On repète la transformation (5) m-fois successivement et on arrive à :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \tag{6}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{m} (-1)^l \left(\frac{\Delta^{2(l-1)} a_{2-l}}{2^{2l-1} \sin^{2(l-1)} \frac{x}{2}} + \frac{\Delta^{2l-1} a_{1-l}}{2^{2l} \sin^{2l} \frac{x}{2}} \cos x - \frac{\Delta^{2(l-1)} b_{1-l}}{2^{2l-1} \sin^{2l-1} \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \right) +$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{2^{2m} \sin^{2m} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^{2m} a_{k-1} \cos kx + \Delta^{2m} b_{k-m} \sin kx)$$

où $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-m-1} = 0$ et $b_{-1} = b_{-2} = \ldots = b_{-m-1} = 0$.

On remarque que (6) est l'analogie de l'itération de la transformation d'Abel-Euler, [1].

THÉORÈME 2. *Soit la série* (2) *convergente, à laquelle on applique la transformation* (6). *Si*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+2}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}=1 \text{ et } \lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{2(p-1)}b_{k-p+2}}{\Delta^{2(p-1)}b_{k-p+1}}=1$$

pour $p=1,2,\ldots,m$ $(m\in\mathbb{N})$, *alors chaque itération jusqu'à la m-ième inclusivement, accélère la convergence.*

Démonstration. On procède comme pour la démonstration du théorème 1 :

$$\frac{\Delta^{2p}a_{k-p}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}=\frac{\Delta^2\left(\Delta^{2(p-1)}a_{k-p}\right)}{\Delta^{2(p-1)}a_{l-p+1}}=\frac{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+2}-2\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}+\Delta^{2(p-1)}v_{k-p}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}=$$

$$=\frac{\Delta_{2(p-1)}a_{k-p+2}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}-2+\frac{1}{\dfrac{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p}}}\;;\;(p=1,2,\ldots,m)$$

et vu la condition $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+2}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}=1$, on obtiendra

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{2p}a_{k-p}}{\Delta^{2(p-1)}a_{k-p+1}}=0 \qquad (p=1,2,\ldots,m).$$

On repète la même raisonnement pour montrer que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{2p}l_{k-p}}{\Delta^{2(p1-1)}l_{k-p+1}}=0 \quad (p=1,2,\ldots,m) \text{ C.Q.F.D.}$$

Exemple. Nous traiterons l'exemple de la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{k^{2+1}}\sin kx$ donnée aussi dans [1], pour montrer que *la transformation* (6) *avec* $m=2$, *donne la même rapidité de convergence que la méthode de Krylov, sans faire appel à la connaissance de la fonction qui est développée en cette série trigonométrique, et sans être obligé de faire les constructions des fonctions nécéssitées par la méthode citée* [2]. *Même si on itère notre méthode plusieurs fois, les calculs sont encore plus simples que ceux utilisés par la méthode de Krylov.*

De $b_k=\dfrac{k}{k^2+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$, résulte :

$$\Delta^4 b_{k-2}=\frac{24k^5-360lk^3+576k}{k^{10}-5k^9+23k^6+5k^4+76k^2+10},\ b_1=0.$$

Donc, conformément à (6) nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}\sin kx=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}}+\frac{1}{16\sin^4\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{24k-360k^3+576k}{k^{10}-5k^8+23k^7+5k^4+76k^2+10}\sin kx.$$

Les calculs se prêtent au traitement par l'ordinateur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Demidovitch, B., Maron, I., *Éléments de calcul numérique*. Ed. MIR, Moscou, 1973.
[2] Krylov, A. N., *Lecţii de calcule prin aproximaţii*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.
[3] Ney, A., *Compléments regardant la rapidité de convergence des séries*. Mathematica-Revue d'analyse num. et de th. de l'approx. **5**, 2, 189–192 (1976)

Reçu le 20. XI. 1979