MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 47—53

UN THÉORÈME D'EXISTENCE POUR UNE INÉQUATION VARIATIONNELLE

par
C. KALIK
(Cluj-Napoca)

1. Dans ce qui suit on va étudier l'existence de la solution d'une inéquation variationnelle dans un ensemble convexe et fermé d'un espace Banach. Pour formuler le problème (P), qui est le problème de base du présent travail, nous supposons que sont donnés :

— trois espaces Banach, notés par X, Y et Z,

— deux opérateurs linéaires et continus $L: X \to Y$, respectivement $\pi: X \to Z$ et

— une application généralement multivoque $T: Y \to 2^{Y^*}$.

Soit $z \in Z$ un élément quelconque fixé. On notera

$$N(z) = \{u \in X \mid \pi u = z\}.$$

LE PROBLÈME (P). *Étant donnés les éléments* $z_0 \in Z$ et $h_0^* \in Y$, *il faut trouver* $u_0 \in N(z_0)$ *pour lequel il existe un* $v_0^* \in (TL)(u_0)$ *de sorte qu'on ait*

$$(1.1) \qquad \langle L^*v_0^* - L^*h_0^*, u - u_0\rangle \geq 0, \ \forall u \in N(z_0).$$

L'exemple 1. Soit $p \in \mathbf{N}$, $p > 1$, $X = W^{p,1}(\Omega)$, $Y = [L(\Omega)]^{n+1}$ et $Z = W^{p,1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un domaine borné ayant la frontière $\partial\Omega$ suffisamment bonne pour que les théorèmes d'immersion des espaces

Sobolev soient valables. On note $Du = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right\}$, $u \in W^{p,1}(\Omega)$ et $Lu = \{Du, u\}$, $u \in W^{p,1}(\Omega)$. Définissons l'opérateur T à l'aide de la relation

$$Tv = \{a_0(x, v), a_1(x, v), \ldots, a_n(x, v)\}, \quad v \in [L^p(\Omega)]^{n+1},$$

où $a_i : \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, $i = \overline{0, n}$ sont des fonctions données, pour lesquelles on a $Tv \in [L^q(\Omega)]^{n+1}$. Ici $p + q = pq$.

Soient $h_0^* = 0$ et $w_0 \in W^{p,1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ une fonction donnée. Dans ce cas on peut exprimer l'inéquation (1.1) considérée sur l'ensemble $N(w_0)$ de la façon suivant :

$$(1.2) \quad \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n a_i(x, u_0, Du_0)\frac{\partial(u - u_0)}{\partial x} + a_0(x, u_0, Du_0)(u - u_0)\right\}dx \geq 0, \ \forall u \in N(w_0).$$

Ayant en vue que $C_0^\infty(\Omega) \subset N(0)$, il résulte de (1.2) que la solution $u_0 \in N(w_0)$ de cette inéquation est en même temps celle du problème Dirichlet suivant :

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, Du) + a_0(x, u, Du) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = w_0. \end{cases}$$

L'exemple 2. Soit X un espace Banach quelconque et Y un espace Banach pour lequel Y^* est strictement convexe. Supposons que sont données les fonctionnelles indépendantes $x_1^*, \ldots, x_N^* \in X^*$. On choisit les éléments $x_1, \ldots, x_N \in X$ de façon qu'on ait $\langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{i,j}$, $i, j = \overline{1, N}$. L'espace Banach Z est donné par l'égalité

$$Z = \left\{z = \sum_{i=1}^N c_i x_i | c_i \in \mathbf{R}, \ i = \overline{1, N}\right\}.$$

L'opérateur π est défini par la relation $\pi x = \sum_{i=1}^N \langle x_i^*, x\rangle x_i$. Soit $L : X \to Y$ un opérateur linéaire et continuu quelconque et $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ une fonction de poids donnée [3]. On note $G(r) = \int_0^r g(t)\,dt$, $F(y) = G(||y||)$, $y \in Y$ et $Ty = F'(y)$. Soit $h_0^* = 0$. Supposons que sont donnés les nombres réels $r_1, \ldots, r_N$. On note $z_0 = \sum_{i=1}^N r_i x_i$. Alors la solution du problème (P) est une fonction spline [2].

2. Le résultat fondamental de ce travail sera formulé dans le théorème 2.1. D'abrod on introduit quelques notations et définitions. $R(L)$ et $R(\pi)$ représentent l'image de l'opérateur L respectivement π. Nous utilisons les notions d'application multivoque monotone, bornée et continue de façon finie (finitely continuous) selon les définitions données dans [1]. On va noter par $I : Y \to 2^{Y^*}$ l'application de dualité donnée par les égalités :

$$\langle y^*, y\rangle = ||y^*|| \cdot ||y||, \quad \forall y \in Y, \ \forall y_0^* \in Iy,$$
$$||y^*|| = ||y||, \quad \forall y \in Y, \forall y^* \in Iy.$$

Soit $z_0 \in Z$ un élément quelconque donné. L'image de l'ensemble $N(z_0)$ par l'opérateur L sera notée avec $K(z_0)$.

LEMME 2.1 *Si Y est un espace Banach réflexif et si les opérateurs linéaires et continus L et π satisfont aux conditions suivantes :*

1°. $\overline{R(L)} = R(L)$ et $\overline{R(\pi)} = R(\pi)$.

2°. $N(0) \cap \operatorname{Ker} L = \{0\}$,

alors il existe au moins un élément $y_0 \in K(z_0)$ et un $y_0^* \in Iy$, de sorte qu'on ait

$$(2.1) \quad \langle y_0^*, y - y_0\rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(z_0).$$

Dans ce qui suit nous noterons toujours par y_0 et par y_0^* les éléments qui satisfont l'inégalité (2.1). Soit $h_0^* \in Y^*$ un élément quelconque donné.

DEFINITION. *On dit que l'application $T : Y \to 2^{Y^*}$ est $[y_0^*, h_0^*]$ — coercitive s'il y a un nombre $R_0 > 0$ de facon qu'on ait*

$$(2.2) \quad \langle w^* - h_0^*, v - y_0\rangle \geq 0$$

pour chaque $v \in Y$ qui satisfait à la condition $||v|| > R_0$.

THEOREME 2.1. *On suppose que les conditions du lemme 2.1 sont satisfaites. Si l'application T est monotone, bornée, continue de façon finie et $[y_0, h_0^*]$-coercitive, alors le problème (P) admet au moins une solution.*

3. Passons à la démonstration du lemme 2.1 et du théorème 2.1. On notera par $|| \cdot ||_X$ la norme de l'espace X, par $||\cdot||_Y$ la norme de l'espace Y et par $|| \cdot ||_Z$ la norme de l'espace Z. Nous définissons la fonctionnelle $|| \cdot ||_{L,\pi}$ à l'aide de l'égalité

$$(3.1) \quad ||x||_{L,\pi} = ||Lx||_Y + ||\pi x||_Z, \quad x \in X.$$

Si la condition $N(0) \cap \operatorname{Ker} L = \{0\}$ est satisfaite, alors $|| \cdot ||_{L,\pi}$ est une norme sur X.

LEMME 3.1. *Si les opérateurs linéaires et continus L et π satisfont aux conditions 1° et 2° du lemme 2.1, alors $||\cdot||_{L,\pi}$ est une norme équivalente à $|| \cdot ||_X$ sur l'ensemble X.*

Démonstration. Il s'ensuit de la linéarité et continuité de L et de π qu'ils sont bornés. Alors nous avons

$$\|x\|_{L,\pi} \leq c_1\|x\|_X + c_2\|x\|_X = c_3\|x\|_X, \quad \forall x \in X. \tag{3.2}$$

Introduisons un opérateur auxiliaire $A : X \to R(L) \times R(\pi)$, défini par $Ax = [Lx, \pi x]$, $x \in X$. L'hypotèse 1° du lemme montre que $R(L) \times R(\pi)$ est un sous-espace fermé de $Y \times Z$. L'opérateur A ainsi défini est linéaire et continuu. L'hypothèse 2° montre que A est injectif, donc il existe A^{-1}. Enfin, de $R(A) = R(L) \times R(\pi)$ il résulte que A^{-1} est un opérateur borné. C'est-à-dire qu'il y a un nombre $c_4 > 0$ tel que

$$\|A^{-1}[Lx, \pi x]\|_X \leq c_4\{\|Lx\|_Y + \|\pi x\|_Z\} = c_4\|x\|_{L,\pi}, \quad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

Les égalités (3.2) et (3.3) font voir l'équivalence des normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_{L,\pi}$. Q.E.D.

Démonstration du lemme 2.1. Il résulte de la définition de l'ensemble $N(z_0)$ qu'il est convexe et fermé. Vu la linéarité de l'opérateur L, l'ensemble $K(z_0) = L(N(z_0))$ est convexe. Le lemme 3.1 permet de constater aisément que l'ensemble $K(z_0)$ est fermé dans Y. En effet, soit $\{y_n\}$ une suite fondamentale de $K(z_0)$. Puisque $y_n \in K(z_0)$, il existe un $x_n \in X$ tel qu'on aura $Lx_n = y_n$ et $\pi x_n = z_0$. Il s'ensuit que la suite $\{x_n\}$ appartient à $N(z_0)$. On a en même temps

$$\|x_n - x_p\|_{L,\pi} = \|Lx_n - Lx_p\| = \|y_n - y_p\|,$$

ce qui montre que la suite $\{x_n\}$ est fondamentale. Soit x la limite de la suite $\{x_n\}$. L'ensemble $N(z_0)$ étant fermé, il en résulte que $x \in N(z_0)$. En tenant compte aussi de la continuité de L, nous aurons $y_n = Lx_n \to Lx = y \in K(z_0)$. Cela veut dire que $K(z_0)$ est fermé dans Y.

Puisque l'ensemble $K(z_0)$ est convexe et fermé dans Y, comme l'espace Y est réflexif, enfin, ayant en vue les propriétés des applications de dualité, on peut affirmer que l'inéquation (2.1) a au moins une solution [1]. Q.E.D.

Pour simplifier l'écriture, on admettra par la suite que $R(L) = Y$ et $R(\pi) = Z$.

Grâce à l'égalité $\langle L^*v_0^* - L^*h_0^*, u - u_0\rangle = \langle v_0^* - h_0^*, Lu - Lu_0\rangle$, on peut remplacer le problème (P) par

LE PROBLÈME (P'). *Étant données les éléments $z_0 \in Z$ et $h_0^* \in Y^*$, il faut trouver un $v_0 \in K(z_0)$ pour lequel il existe un $v_0^* \in Tv_0$ tel que*

$$\langle v_0^* - h_0^*, v - v_0\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K(z_0). \tag{3.4}$$

Notre but est de démontrer que dans les conditions du théorème 2.1 le problème (P') a une solution. Nous utiliserons, pour cela, certains résultats de F. E. Browder donnés dans [1]. Nous nous servons aussi de quelques notations utilisées dans ce travail.

Soit $\varepsilon \geq 0$ un nombre quelconque et $I_\varepsilon = I\varepsilon$, où I est l'application de dualité ci-dessus.

LEMME 3.2. *Si y_0 et y_0^* satisfont l'inéquation* (2.1) *et si T est une application $[y_0, h_0^*]$-coércitive, alors pour chaque $\varepsilon \geq 0$ on a*

$$\langle y_0^* - h_0^* + w^*, v - v_0\rangle > 0 \tag{3.5}$$

toutes les fois que $v \in K(z_0)$ satisfait à la condition $\|v\| > R_0$ et pour chaque $w^* \in Tv$.

Démonstration. Considérons l'égalité

$$\langle y_0^* - h_0^* + w^*, v - y_0\rangle = \langle w^* - h_0^*, v - y_0\rangle + \langle y_0^*, v - y_0\rangle.$$

Grâce à $[y_0, h_0^*]$-coércivité de l'application T il résulte que $\langle w^* - h_0^*, v - y_0\rangle > 0$ pour $\|v\| > R_0$ et $w^* \in Tv$. Ayant en vue aussi l'inégalité (2.1) valable pour chaque $v \in K(z_0)$, on obtient l'inégalité (3.5). Q.E.D.

Supposons que $\varepsilon > 0$ et considérons le couple d'applications I_ε, T. L'application multivoque I_ε est monotone. Quant à T, nous supposons qu'elle satisfait aux conditions du théorème 2.1. En reprenant le raisonnement de la démonstration du théorème 7.1 [1], et en tenant compte du lemme 3.2, on peut prouver qu'il existe un $v_\varepsilon \in K(z_0)$ et un $w_\varepsilon \in Tv_\varepsilon$ tels que

$$\langle y_\varepsilon^* - h_0^* + w_\varepsilon^*, y - v_\varepsilon\rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(z_0), \quad \forall y_\varepsilon^* \in I_\varepsilon y \tag{3.6}$$

et

$$\|v_\varepsilon\| \leq R_0, \quad \|w_\varepsilon^*\| \leq k(R_0), \tag{3.7}$$

où R_0 est la constante qui intervient dans la condition de coércivité, et $k(R_0)$ est la constante qui résulte du fait que la T est bornée.

L'espace Y étant réflexif, il résulte des inégalités (3.7) que les familles $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ et $\{w_\varepsilon^*\}_{\varepsilon>0}$ contiennent une suite $\{v_{\varepsilon_n}\}$, respectivement $\{w_{\varepsilon_n}\}$ qui sont faiblement convergentes. On note $v_n = v_{\varepsilon_n}$ et par $w_n^* = w_{\varepsilon_n}^*$. Soit v_0, respectivement w_0^* les limites faibles de ces suites.

LEMME 3.3. *Il y a lieu l'égalité*

$$\lim \langle w_n^*, v_n\rangle = \langle w_0^*, v_0\rangle. \tag{3.8}$$

Démonstration. Vu que $w_n^* \in Tv_n$ et la monotonie de T, on peut écrire

$$\langle w_n^* - v_0^*, v_n - v_0\rangle \geq 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall v_0^* \in Tv_0,$$

ou

$$\langle w_n^*, v_n\rangle \geq \langle w_n^*, v_0\rangle + \langle v_0^*, v_n - v_0\rangle, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall v_0^* \in Tv_0.$$

Il s'ensuit l'inégalité

$$\lim \langle w_n^*, v_n\rangle \geq \langle w_0^*, v_0\rangle. \tag{3.9}$$

D'autre part, l'inégalité (3.6) pour $y = v_0$ permet d'écrire

$$\langle \tilde{v}_0^* - h_0^* + w_n^*,\ v_0 - v_n \rangle \geq 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\quad \forall v_0^* \in I_{\varepsilon_n}(v_0),$$

ou

$$\langle w_n^*,\ v_n \rangle \leq \langle \tilde{v}_n^* - h_0^*,\ v_0 - v_n \rangle + \langle w_n^*,\ v_0 \rangle.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\overline{\lim}\ \langle w_n^*,\ v_n \rangle \leq \langle w_0^*,\ v_0 \rangle. \tag{3.10}$$

(3.9) et (3.10) fournissent justement l'égalité (3.8) Q.E.D.

La démonstration du théorème 2.1. Considerons l'élément $v_0 \in K(z_0)$ qui d'après ce qu'on a vu plus haut est la limite faible de la suite $\{v_n\} \subset \subset K(z_0)$. Notre tâche est de démontrer l'existence d'un $v_0^* \in Tv_0$, tel qu'il y ait lieu l'inégalité (3.4).

Conformément à l'inégalité (3.6) on peut écrire que

$$\langle y_n^* - h_0^* + w_n^*,\ y - v_n \rangle \geq 0,\ \forall y \in K(z_0),\ \forall y_n^* \in I_{\varepsilon_n}(y),\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Cependant $I_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n I$, donc $||y_n^*|| = \varepsilon_n ||y||_Y$. Par conséquent on a $\lim y_n^* = 0$. En tenant compte de cette égalité, ainsi que de l'égalité (3.8) il s'ensuit de l'inégalité antérieure que

$$\langle w_0^* - h_0^*,\ y - v_0 \rangle \geq 0,\quad \forall y \in K(z_0). \tag{3.11}$$

Soit $v \in K(z_0)$ un élément quelconque fixé et $y_\lambda = v_0 + \lambda(v - v_0)$, où $\lambda \in (0, 1)$. Choisissons un tel nombre positif qu'il y ait $R_1 \geq ||v_0||_Y$ et considérons seulement les éléments y_λ pour lesquels nous avons $y_\lambda \in \bar{S}_{R_1}(0)$, où $\bar{S}_{R_1}(0) = \{y \in Y \mid ||y||_Y \leq R_1\}$. Puisque l'application T est bornée, il existe une constante $k(R_1)$ telle que pour chaque $y_\lambda \in \bar{S}_{R_1}(0)$ on a un $y_\lambda^* \in Ty_\lambda \cap \bar{S}_{k(R_1)}(0)$. Ici $\bar{S}_{k(R_1)} = \{y^* \in Y^* \mid ||y^*|| \leq k(R_1)\}$. En vertu de la continuité finie de T, il y a un $\tilde{y}_\lambda^* \in Tv_0 \cap \bar{S}_{k(R_1)}(0)$ tel qu'on ait $y_\lambda^* - \tilde{y}_0^*$.

L'application T étant monotone, on a

$$\langle y_\lambda^* - w_n^*,\ y_\lambda - v_n \rangle \geq 0,\quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

et $\forall \lambda$ suffisamment petit. En passant à la limite par rapport à n on obtiendra

$$\langle y_\lambda^* - w_0^*,\ y_\lambda - v_0 \rangle \geq 0,$$

ou, après avoir remplacé y_λ dans cette inégalité et après l'avoir simplifiée avec λ, on trouvera

$$\langle y_\lambda^* - w_0^*,\ v - v_0 \rangle \geq 0.$$

Enfin, après un dernier passage à la limite, pour $\lambda \to 0$ on obtiendra l'inégalité

$$\langle \tilde{y}_0^* - w_0^*,\ v - v_0 \rangle \geq 0. \tag{3.12}$$

En guise de conclusion nous pouvons affirmer que pour chaque $v \in K(z_0)$ il existe un $\tilde{y}_0^* \in Tv_0 \cap \bar{S}_{k(R_1)}(0)$ tel qu'on ait l'inégalité (3.12). L'ensemble $K(z_0) - v_0$ étant convexe et fermé, et l'ensemble $Tv_0 \cap \bar{S}_{k(R_1)}(0) - w^*$ étant convexe et faiblement compact, moyennant le théorème 6.5 de [1] on obtient qu'il existe un élément $v_0^* \in Tv_0 \cap \bar{S}_{k(R_1)}(0)$ de sorte qu'on ait

$$\langle v_0^* - w_0^*,\ v - v_0 \rangle \geq 0,\qquad \forall v \in K(z_0). \tag{3.13}$$

Enfin en s'appuyant sur (3.11) et (3.13), en même temps que sur l'égalité

$$\langle v_0^* - h_0^*, v - v_0 \rangle = \langle v_0^* - w_0^*, v - v_0 \rangle + \langle w_0^* - h_0^*, v - v_0 \rangle,$$

il en résulte qu'il y a lieu aussi l'égalité (3.8) pour $v_0 \in K(z_0)$ et pour $v_0^* \in Tv_0$, quel que soit $v \in K(z_0)$ Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach Spaces*. Proc. of Symp. in Pure Mathematics, Vol. XVIII, Part 2, 1976.

[2] I. Ciorănescu, *Aplicații de dualitate în analiza funcționala neliniara*. Ed. Acad. R.S.R., București, 1974.

[3] C. Kalik, *Interpolating spline elements in Banach Spaces*. Mathematica **18(41)**, 2, 152–164 (1976).

Reçu le 7. I. 1980