MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 55—58

DIFFÉRENCES DIVISÉES GÉNÉRALISÉES ET FONCTIONNELLES DE FORME SIMPLE

par

MIRCEA IVAN

(Cluj-Napoca)

Dans ce travail nous essayons, dans le cadre général de l'interpolation dans les espaces abstraits, de généraliser la notion de différence divisée, pour l'appliquer à l'étude de la théorie de la convexité.

On attachera à chaque opérateur d'interpolation une différence divisée et on utilisera les résultats obtenus à l'étude des fonctionnelles linéaires de forme simple.

Au commencement nous allons présenter quelques définitions des travaux [1] et [2]. Nous allons établir aussi un système de notations valables au cours de tout ce travail.

Considérons un espace linéaire X et un sous-espace Y de X. Soit S un sous-espace maximal de Y et y_0 un élément de l'ensemble $Y \backslash X$. Considérons un opérateur linéaire U défini sur X aux valeurs en X.

DÉFINITION 1. *L'opérateur U est dit opérateur d'interpolation par rapport au sous-espace S si les conditions suivantes sont remplies :*

1) $Ux \in S \quad \forall x \in X$;

2) $Us = s, \ \forall s \in S$.

Convenons les notations suivantes :

$\mathcal{U}$, un ensemble d'opérateurs d'interpolation par rapport au sous-espace Y;

$\mathcal{V}$, l'ensemble d'opérateurs d'interpolation par rapport au sous-espace S.

On a défini sur l'ensemble d'opérateurs d'interpolation la relation d'ordre $V < U$, à l'aide des égalités $UV = VU = V$ [1].

DÉFINITION 2. *On dira que la fonctionnelle linéaire F est une différence divisée attachée à l'opérateur $U \in \mathcal{U}$ si les conditions suivantes sont remplies :*

a) $F(Ux) = F(x), \quad \forall x \in X$;
b) $F(s) = 0, \quad \forall s \in S$;
c) $F(y_0) = 1$.

Relatif à cette définition deux question s'imposent :

1) existe-t-il une fonctionnelle F qui vérifie les conditions a, b, c?
2) les conditions a, b, c déterminent-elles de manière unique une fonctionnelle F?

Compte tenu de la réponse affirmative que nous allons donner aux questions antérieures, la notation $[U; .]$ par laquelle nous allons désigner la différence divisée attachée à l'opérateur U, est justifiée.

Présentons maintenant le théorème principal du travail.

THÉORÈME 1. *Si l'opérateur U appartient à $\mathcal{U}$ alors les conditions suivantes sont remplies :*

1) *il existe une différence divisé attachée à l'opérateur U et elle est unique;*

2) *il existe un opérateur $V \in \mathcal{V}$, $V < U$ tel que $Ux = Vx + y_0[U; x]$ $\forall x \in X$;*

3) *quel que soit $W \in \mathcal{V}$, $W < U$, la relation d'égalité $Ux = Wx + (y_0 - Wy_0)\ [U; x]$, est remplie $\forall x \in X$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Vu que $y_0 \notin S$ on peut écrire l'égalité $Y = S \oplus \operatorname{span}(y_0)$. On peut donc écrire $Ux = s + ky$, ou $s \in S$ et k scalaire, la représentation de Ux sous cette forme étant unique. Nous définissons un opérateur V et une fonctionnelle F par les égalités : $Vx = s$; $F(x) = k$. Du fait que l'opérateur U est linéaire et que la représentation dans $S \oplus \operatorname{span}(y_0)$ est unique il s'ensuit que l'opérateur V et la fonctionnelle F sont linéaires.

Les égalités :

$$Vx + y_0F(x) = Ux = UUx = VUx + y_0F(Ux),$$

impliquent les égalités :

$$Vx = VUx; \quad F(x) = F(Ux).$$

En observant que $Vx \in Y$ on obtient la relation $Vx = VUx$.

Les égalités :

$$Vx = VUx = VVx + y_0F(Vx),$$

impliquent les égalités :

$$Vx = VVx; \quad F(Vx) = 0.$$

Du fait que $s = Vs$ $\forall s \in S$, il s'ensuit que $F(s) = F(Vs) = 0$ $\forall s \in S$.

Nous avons donc démontré les égalités :

$$VV = V;\ UV = VU = V;$$
$$F(Ux) = F(x);\ F(s) = 0,\ \forall x \in X,\ \forall s \in S.$$

On a prouvé donc l'existence d'une différence divisée F et d'un opérateur $V \in \mathcal{V}$, $V < U$ tels que l'égalité $Ux = Vx + y_0F(x)$ soit remplie $\forall x \in X$.

Supposons maintenant qu'il existe une autre différence divisée G, attachée à l'opérateur U. On peut écrire :

$$G(x) = G(Ux) = 0 + G(y_0)F(x) = F(x), \quad \forall x \in X,$$

c'est à dire $G = F$. On a démontré les deux premières affirmations du théorème.

Soit l'opérateur $W \in \mathcal{V}$, $W < U$. Considérons la relation $Ux = Wx + (y_0 - Wy_0)\ [U; x] + s$, où $s = Vx - Wx + Wy_0\ [U; x]$ à laquelle on applique l'opérateur W. On obtient :

$$Wx = WUx = WWx + (Wy_0 - WWy_0)\ [U; x] + Ws.$$

Vu que $WW = W$ et $Ws = s$ il s'ensuit que $s = 0$ et donc :

$$Ux = Wx + (y_0 - Wy_0)\ [U; x].$$

Le théorème est complètement démontré.

Remarque. Il existe des opérateurs qui possèdent une différence divisée, mais qui ne sont pas des opérateurs d'interpolation.

Exemple. Soit $X = Y = C$ l'espace des nombres complexes et $S = R$ l'espace des nombres réels. Soit $z \in C$, $z = a + ib$. On désigne par U l'opérateur linéaire $Uz = a + b + ib$. On voit que $F(z) = b$ définit une différence divisée attachée à U et pourtant $UU \neq U$.

Considérons les particularisations :

X, l'espace des fonctions réeles ;
Y, l'espace des polynômes de degré n, $\mathcal{P}_n$;
S, l'espace des polynômes de degré $n - 1$, $\mathcal{P}_{n-1}$;
Uf, le polynôme de Lagrange, attaché à la fonction f sur les points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $L(x_0, x_1, \ldots, x_n; f)$;
$[U; f]$, la différence divisée $[x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$.

Dans ces conditions les résultats du théorème 1 deviennent :

1) si la fonctionnelle linéraire F vérifie les conditions suivantes :
a) $F(L(x_0, x_1, \ldots, x_n; f)) = F(f)$, $\forall f \in X$;
b) $F(P) = 0$, $\quad \forall P \in \mathcal{P}_{n-1}$;
c) $F(x^n) = 1$,

alors $F(f) = [x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$ $\forall f \in X$.

2) il existe les points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tels que :

$$L(x_0, \ldots, x_n; f)(x) = L(t_1, \ldots, t_n; f)(x) + (x - t_1) \ldots (x - t_n)[x_0, \ldots, x_n; f].$$

3) quels que soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ points distincts des points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et quel que soit $P \in \mathcal{P}n$, un polynôme dont le coefficient de x^n est 1, l'égalité suivante sera remplie :

$L(x_0, x_1, \ldots, x_n; f)(x) = L(t_1, t_2, \ldots, t_n; f)(x) + (P(x) - L(t_1, t_2, \ldots, t_n; P)(x))[x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$ (Voir aussi [1]).

DEFINITION 3. *L'élément $x \in X$ est dit du type $\mathcal{U}$ si quel que soit $U \in \mathcal{U}$, $[U; x] \neq 0$.*

DÉFINITION 4. *L'élément $x \in X$ est dit $\mathcal{U}$-convexe si quel que soit $U \in \mathcal{U}$, $Ux \notin S[2]$.*

THÉORÈME 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'élément x soit $\mathcal{U}$-convexe est qu'il soit du type $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Conformément à la condition 2 du théorème 1 la relation $Ux = Vx \in S$ est équivalente à l'égalité $[U\,;\,x] = 0$, le théorème étant complètement démontré.

Soit A une fonctionnelle linéaire définie sur X.

DÉFINITION 5. *La fonctionnelle A est dite S-exacte si pour n'importe quel $s \in S$, $A(s) = 0$* [2].

DÉFINITION 6. *La fonctionnelle A est dite $\mathcal{U}$-simple si elle est S-exacte et si $A(x) \neq 0$ quel que soit x $\mathcal{U}$-convexe.*

THÉORÈME 3. *Il y a un scalaire k, tel que $\forall x \in X$ et $\forall U \in \mathcal{U}$, la fonctionnelle S-exacte A vérifient l'égalité $A(Ux) = k[U\,;\,x]$.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et $U \in \mathcal{U}$. Conformément au théorème 1 il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $Ux = Vx + y_0[U\,;\,x]$. Remarquant que $Vx \in S$ et appliquant la fonctionnelle A à l'égalité précédente, on obtient l'égalité $A(Ux) = A(y_0)[U\,;\,x]$.

Si on désigne par k le scalaire $A(y_0)$ le théorème est complètement démontré.

THÉORÈME 4. *Si A est $\mathcal{U}$-simple alors il existe un scalair k qui possède la propriété suivante: quel que soit $x \in X$ il existe un opérateur $U \in \mathcal{U}$ tel que l'égalité $A(x) = k[U\,;\,x]$ soit remplie.*

Démonstration. Soit $x \in X$. L'élément $z = y_0A(x) - xA(y_0)$ n'est pas $\mathcal{U}$-convexe parce que $A(z) = 0$. Conformément au théorème 2 il existe un opérateur $U \in \mathcal{U}$ tel que $[U\,;\,z] = 0$. En désignant par k le scalaire $A(y_0)$ on obtient l'égalité de l'énoncé du théorème.

Nous mentionnons que ce théorème est une généralisation d'un bien connu théorème de la moyenne du TIBERIU POPOVICIU [3].

COROLLAIRE. *Si A est $\mathcal{U}$-simple alors quel que soit $x \in X$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $A(x) = A(Ux)$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Conformément aux théorèmes 3 et 4 on obtient les égalités :

$$A(x) = k[U\,;\,x] = A(Ux),$$

ce qui était à démontrer.

Ce résultat se trouve dans le travail [2] (Théorème 5.5.1).

Nous mentionnons que le théorème 4 contient comme cas particulier le théorème de représentation des fonctionnelles linéaires définies sur un espace de Hilbert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ivan, M., *Opérateurs d'interpolation dans des espaces abstraits.* Mathematica, Cluj, 4, 1, 19–28 (1975).

[2] Popoviciu, E., *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării.* Ed. Dacia, Cluj 1972.

[3] Popoviciu, T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IX). Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sci., **43**, *1–2*, 85–141 (1941).

Reçu le 20. XII. 1979