MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 59–63

DAS PRINZIP DER KONDENSATION DER SINGULARITÄTEN PRÄKONVEXER FUNKTIONEN

von

I. KOLUMBÁN

(Cluj-Napoca)

Es sei M eine konvexe Teilmenge eines reellen linearen Raumes X. Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, wenn für alle $a \in [0, 1]$ und alle $x, y \in M$ die Ungleichung

(1) $$f[(1-a)x + ay] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

gilt.

In der Literatur (vgl. z.B. [9]) wird meistens behauptet, daß der Begriff der quasikonvexen Funktion auf DE FINETTI [5] und FENCHEL [6] zurückgeht. In Wirklichkeit wurden aber für den Fall $X = \mathbb{R}$ Funktionen mit der Eigenschaft (1) viel früher von TIBERIU POPOVICIU [8] untersucht.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es Eigenschaften einer Klasse von Funktionen zu untersuchen, die umfangreicher ist als die Klasse der quasikonvexen Funktionen. Das Hauptergebnis wird durch Satz 5 ausgedrückt und stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Banach-Steinhaus über die Kondensation der Singularitäten dar.

Im folgenden bezeichnet $\overline{\mathbb{R}}$ die Menge $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und A eine im Intervall $[0, 1]$ dichte Menge.

DEFINITION 1. *Eine Funktion* $f: M \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt präkonvex, wenn es eine reelle Zahl* $c \in [1, +\infty[$ *gibt, so daß die Ungleichung*

(2) $$f[(1-a)x + ay] \leq c \max\{f(x), f(y)\}$$

für alle $a \in [0, 1]$ *und alle* $x, y \in M$ *gilt.*

Offensichtlich ist jede quasikonvexe Funktion, und demnach auch jede konvexe Funktion, präkonvex. Die von W. W. BRECKNER [2] eingeführten s-konvexen Funktionen sind ebenfalls präkonvex. Insbesondere ist, für alle $p > 0$, die auf dem Raum l^p durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ für alle } x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l^p$$

erklärte Funktion f präkonvex.

DEFINITION 2. *Eine Funktion* $f: M \to \overline{\mathbf{R}}$ *heißt* A-*präkonvex, wenn es eine reelle Zahl* $c \in [1, +\infty[$ *gibt, so daß die Ungleichung* (2) *für alle* $a \in A$ *und alle* $x, y \in M$ *gilt.*

Jede rational s-konvexe Funktion im Sinne von W. W. BRECKNER [2] ist A-präkonvex, wenn man $A = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ wählt.

DEFINITION 3. *Es sei* $f: M \to \overline{\mathbf{R}}$ *eine* A-*präkonvexe Funktion. Die Menge*

$$D(f) = \{x \in M : f(x) < +\infty\}$$

heißt effektiver Definitionsbereich von f.

Aus (2) folgt sofort, daß der effektive Definitionsbereich einer präkonvexen Funktion eine konvexe Menge ist.

DEFINITION 4. *Es sei* $f: M \to \overline{\mathbf{R}}$ *eine* A-*präkonvexe Funktion. Ein Punkt* $x \in M$ *heißt singular* (oder Singularität), *falls* $f(x) = +\infty$. *Die Menge der singulären Punkte von* f *wird mit* $S(f)$ *bezeichnet.*

In unseren weiteren Ausführungen setzen wir voraus, daß X ein reeller normierter linearer Raum ist und $M = X$ gilt. Außerdem benutzen wir die Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$, die auf X durch

$$\underline{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y), \quad \overline{f}(x) = \limsup_{y \to x} f(y)$$

für alle $x \in X$ erklärt sind.

SATZ 1. *Ist* $f: \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ $(n \in \mathbf{N})$ *eine präkonvexe Funktion, dann gilt* $\overline{f}(x) < +\infty$ *für alle* $x \in \operatorname{int} D(f)$.

Beweis. Ist x_0 ein innerer Punkt von $D(f)$, dann gibt es ein Simplex V mit Ecken $x_1, \ldots, x_{n+1}$ aus $D(f)$, so daß $x_0 \in \operatorname{int} V$ gilt. Jedes $x \in V$ läßt sich aber in der Form

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}$$

mit $a_1 \geq 0, \ldots, a_{n+1} \geq 0$, $a_1 + \ldots + a_{n+1} = 1$ darstellen. Durch vollständige Induktion kann man dann für alle $x \in V$ die Ungleichung

$$f(x) \leq c^n \max \{f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})\}$$

beweisen, aus der $\overline{f}(x_0) < +\infty$ folgt.

Ist X ein unendlichdimensionaler normierter linearer Raum, dann gibt es ein lineares Funktional $f: X \to \mathbf{R}$, das in keinem Punkt von X lokal nach oben beschränkt ist. Für dieses Funktional f gilt dann $\overline{f}(x) = +\infty$ für alle $x \in X$. Demnach bleibt Satz 1 nicht mehr gültig, wenn der Raum $\mathbf{R}^n$ durch einen unendlichdimensionalen normierten linearen Raum ersetzt wird.

SATZ 2. *Es sei* $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ *eine* A-*präkonvexe Funktion. Gibt es ein* $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$ *mit* $\overline{f}(x_0) < +\infty$, *dann gilt* $\overline{f}(x) < +\infty$ *für alle* $x \in \operatorname{int} D(f)$.

Beweis. Es sei x ein innerer Punkt von $D(f)$. Weil A in $[0, 1]$ dicht ist, gibt es dann ein $y \in D(f)$ und ein $a \in A$, so daß $x = (1 - a)x_0 + ay$. O.B.d.A. kann angenommen werden, daß a dem offenen Intervall $]0, 1[$ angehört.

Wir machen nun die Annahme es sei $\overline{f}(x) = +\infty$. Dann gibt es in $D(f) \setminus \{x\}$ eine Folge (x_k) mit

$$\lim x_k = x \text{ und } \lim f(x_k) = +\infty.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl k_0, so daß

$$f(x_k) > cf(y) \quad \text{für alle } k > k_0$$

gilt.

Es sei nun

$$z_k = \frac{1}{1-a} x_k - \frac{a}{1-a} y \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt

$$x_k = (1 - a)z_k + ay \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N}.$$

Für $k > k_0$ haben wir also

$$f(x_k) \leq c \max \{f(z_k), f(y)\} = cf(z_k)$$

d.h. $\frac{1}{c} f(x_k) \leq f(z_k)$. Beachtet man nun, daß

$$\lim z_k = x_0,$$

so folgt hieraus $\overline{f}(x_0) = +\infty$, was unserer Voraussetzung widerspricht.

B e m e r k u n g. Satz 2 besagt, daß eine A-präkonvexe Funktion auf $\operatorname{int} D(f)$ lokal nach oben beschränkt ist, falls sie in einem Punkt aus $\operatorname{int} D(f)$ lokal nach oben beschränkt ist.

SATZ 3. *Es sei* $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ *eine* A-*präkonvexe Funktion. Gilt* $\overline{f}(x) < +\infty$ *für alle* $x \in \operatorname{int} D(f)$, *dann ist* $\overline{f}$ *auf* $\operatorname{int} D(f)$ *präkonvex.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß $f(x) \leq c\overline{f}(x)$ für alle $x \in \operatorname{int} D(f)$ gilt. In der Tat, aus $x_k \neq x$, $\lim x_k = x$, $\lim f(x_k) = \overline{f}(x)$ und $z_k = \frac{1}{a} x + \left(1 - \frac{1}{a}\right) x_k$ (mit $a \in A$), folgt

$$f(x) \leq c \max \{f(x_k), f(z_k)\} \to c\overline{f}(x).$$

Es seien nun x, y innere Punkte von $D(f)$ und b eine Zahl aus dem Intervall $]0, 1[$ (es wird nicht $b \in A$ vorausgesetzt!). Wir setzen $z = (1-b)x + by$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Kugel B_ε mit dem Mittelpunkt x, so daß $f(u) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon$ für alle $u \in B_\varepsilon$ gilt. O.B.d.A. kann angenommen werden, daß y nicht in B_ε liegt. Es sei C die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $B_\varepsilon \cup \{y\}$ und $B \subset C$ eine abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt z. Bezeichnet v ein beliebiges Element aus $\operatorname{int} B$, dann ist der Schnitt der durch v und y gehenden Geraden mit der Kugel B_ε eine Strecke von positiver Länge. Es gibt daher ein $a \in A$ und ein $u \in B_\varepsilon$ derart, daß $v = (1-a)u + ay$. Hieraus folgt

$$f(v) \leq c \max\{f(u), f(y)\} \leq c \max\{\bar{f}(x), f(y)\} + c\varepsilon \leq c^2 \max\{\bar{f}(x), \bar{f}(y)\} + c\varepsilon.$$

Weil v ein beliebiger Punkt von intB war, gilt also

$$\bar{f}(z) \leq c^2 \max\{\bar{f}(x), \bar{f}(y)\} + c\varepsilon.$$

Strebt ε gegen Null, so folgt die Behauptung des Satzes.

SATZ 4. *Es sei $f: X \to \bar{\mathbf{R}}$ eine A-präkonvexe Funktion und K eine offene konvexe Teilmenge von $D(f)$. Gilt $\underline{f}(x) > -\infty$ für alle $x \in X$, dann ist die Funktion $\underline{f}: K \to \mathbf{R}$ präkonvex.*

Beweis. Es sei $x, y \in K$ und $b \in]0, 1[$. Wir setzen $z = (1-b)x + by$. Die Folgen (x_k) und (y_k) seien aus K so gewählt, daß

$$\lim x_k = x, \quad \lim y_k = y, \quad \lim f(x_k) = \underline{f}(x), \quad \lim f(y_k) = \underline{f}(y)$$

gilt. Weiterhin sei (a_k) eine Folge aus A die gegen b konvergiert. Setz man $z_k = (1-a_k)x_k + a_k y_k$, so folgt

$$\lim z_k = z \text{ und } \underline{f}(z) \leq \liminf_{k\to\infty} f(z_k).$$

Wegen

$$f(z_k) \leq c \max\{f(x_k), f(y_k)\}$$

ergibt sich dann die Behauptung.

B e m e r k u n g. Spezialfälle der Sätze 1–4 haben F. BERNSTEIN und G. DOETSCH [1], E. MOHR [7], A. CSÁSZÁR [3] und E. DEÁK [4] bewiesen.

SATZ 5. *Es sei $f: X \to \bar{\mathbf{R}}$ eine nach unten halbstetige A-präkonvexe Funktion. Gilt $\operatorname{int} D(f) = \emptyset$ oder gibt es ein $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$ mit $\bar{f}(x_0) = +\infty$, dann ist $S(f)$ der Durchschnitt abzählbar vieler offener und in X dichter Mengen. Ist X ein Banach-Raum und ist $\operatorname{int} D(f) \neq \emptyset$, dann gilt $\bar{f}(x) < +\infty$ für alle $x \in \operatorname{int} D(f)$.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist $X_n = \{x \in X : f(x) > n\}$ eine offene Menge und es gilt $S(f) = \bigcap\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$. Wir zeigen, daß die Mengen X_n in X dicht sind. Wäre X_{n_0} nicht dicht, dann müßte es ein $y_0 \in X$ und eine abgeschlossene Kugel B mit dem Mittelpunkt y_0 geben, so daß $B \cap X_{n_0}$ leer ist. Also würde $f(x) \leq n_0$ für alle $x \in B$ gelten. Demnach wäre $\operatorname{int} D(f)$ nicht leer und nach Satz 2 müßte $\bar{f}(x) < +\infty$ für alle $x \in \operatorname{int} D(f)$ sein, was der Voraussetzung widersprechen würde.

Ist X ein Banach-Raum und gilt $\bar{f}(x_0) = +\infty$ für ein $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$, dann ergibt eine Anwendung des Baireschen Lemmas, daß die Menge $S(f) = \bigcap\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ in X dicht ist. Demnach müßte $\operatorname{int} D(f)$ leer sein, was der Annahme $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$ widerspricht.

LITERATUR

[1] B e r n s t e i n, F. — G. D o e t s c h, *Zur Theorie der konvexen Funktionen.* Math. Ann., **76**, 514–526 (1914).

[2] B r e c k n e r, W. W., *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen.* Publ. Inst. Mat. (Beograd) **23(37)**, 13–20 (1978).

[3] C s á s z á r, Á., *Konvex halmazokról és függvényekről.* Mat. Lapok, **9**, 273–282 (1958).

[4] D e á k, E., *Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden.* Annales Univ. Sci. Budapestinensis, **5**, 109–154. (1962).

[5] d e F i n e t t i, B., *Sulle stratificazioni convesse.* Ann. Mat. Pura Appl., **30**, 173–183 (1949).

[6] F e n c h e l, W., *Convex Cones, Sets and Functions.* Princeton Univ. Press, New Jersey, 1953.

[7] M o h r, E., *Beitrag zur Theorie der konvexen Funktionen.* Math. Nachr., **8**, 133–148 (1952).

[8] P o p o v i c i u, T., *Doux remarques sur les fonctions convexes, Bull. Sc. Acad. Roumaine.* **20**, 45–49 (1938).

[9] R o b e r t s, A. W. — D. E. V a r b e r g, *Convex Functions.* Academic Press, 1973.

Eingegangen am 24. I. 1980