MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, N° 1, 1980, pp. 65–73

EINIGE SATURATIONSSÄTZE FÜR n-PARAMETRIGE HALBGRUPPEN VON OPERATOREN

von

WALTER KÖHNEN

(Neuss)

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung des Approximationsverhaltens von stark stetigen n-parametrigen Halbgruppen von Operatoren an die Identität gewidmet. Gewisse Resultate, die von P. L. BUTZER und H. BERENS [2], [1] für einparametrige Halbgruppen erhalten worden sind, sollen auf n-parametrige Halbgruppen ausgedehnt werden. Durch die Resultate für die einparametrigen Halbgruppen wird das Anfangswertverhalten von Lösungen gewisser abstrakter Differentialgleichungen beschrieben. Entsprechend charakterisieren die hier erzielten Ergebnisse das Anfangswertverhalten von Lösungen gewisser Systeme von abstrakten Differentialgleichungen, wie sie in den Arbeiten von A. HAIMOVICI [5] und N. GRĂDINARU [3], [4] betrachtet werden.

Es sei E_n der n-dimensionale reelle euklidische Raum mit den Elementen $t, s, \ldots$. Wir schreiben $t = (t_1, \ldots, t_n)$ und setzen $|t| = (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2}$ sowie $E_n^+ = \{t \in E_n\,;\, t_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ t \neq (0, 0, \ldots, 0)\}$. Es sei ferner $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine Funktion T von E_n^+ in die Banachalgebra der Endomorphismen von X heißt gleichmäßig beschränkte n-parametrige Halbgruppe von Operatoren der Klasse C_0 (im folgenden kurz n-parametrige Halbgruppe genannt), wenn gilt: 1. $T(t + s) = T(t)T(s)$ für alle $t,\ s \in E_n^+$. 2. $s \cdot \lim\limits_{|t| \to 0} T(t)f = f$ für alle $f \in X$. 3. $\|T(t)\| \leq C$ [1] für alle $t \in E_n^+$. Wir setzen die Theorie der ein- und mehrparametrigen Halbgruppen, wie sie in [1], [6] und [7] dargestellt ist, als bekannt voraus: Jede n-parametrige Halbgruppe T ist das

[1] Mit C sollen im folgenden stets positive Konstanten bezeichnet werden, die nicht notwendig gleich sein müssen.

Produkt von n einparametrigen, untereinander kommutativen Halbgruppen $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Den infinitesimalen erzeugenden Operator von T_i bezeichnen wir mit A_i und seinen Definitionsbereich mit $D(A_i)$. Für jedes n-tupel $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ von nicht negativen ganzen Zahlen ist das Produkt $A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n}$ abgeschlossen, und $D(A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n})$ bildet unter der Graphennorm einen Banachraum. Ist für auch nur eine Folge (t_k) mit $t_k = (t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk})$ und $\lim\limits_{k\to\infty} |t_k| = 0$

$$s.\lim_{k\to\infty} \frac{[T_1(t_{1k}) - I]^{j_1} [T_2(t_{2k}) - I]^{j_2} \ldots [T_n(t_{nk}) - I]^{j_n} f}{t_{1k}^{j_1}\, t_{2k}^{j_2} \ldots t_{nk}^{j_n}} = g,$$

dann gehört f zu $D(A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n})$ und es ist $A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n} f = g$. Ist andererseits $f \in D(A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n})$ und $A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n} f = g$, so gilt für jede Folge (t_k) mit $t_k = (t_{1k}, \ldots, t_{nk})$ und $\lim\limits_{k\to\infty} |t_k| = 0$

$$s \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{[T_1(t_{1k}) - I]^{j_1} \ldots [T_n(t_{nk}) - I]^{j_n} f}{t_{1k}^{j_1} \ldots t_{nk}^{j_n}} = g.$$

Ferner sind die Faktoren $A_i^{j_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, in dem Produkt $A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n}$ beliebig untereinander vertauschbar und für alle $f \in D(A_1^{j} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n})$ gilt die Intergralformel

$$(1) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} [T_i(t_i) - I]^{j_i}\right) f =$$

$$= \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_2} \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_n} \prod_{i=1}^{n} T_i(\xi_{i1} + \xi_{i2} + \ldots + \xi_{ij_i}) A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (d\xi_{i1}\, d\xi_{i2} \ldots d\xi_{ij_i}).$$

Der Terminologie von H. TRIEBEL [14] folgend, setzen wir für eine beliebige natürliche Zahl m

$$K^m = \bigcap_{j_1+j_2+\ldots+j_n=m} D(A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n}),$$

wobei die j_i nicht negative ganze Zahlen sind. Unter der Norm

$$||f||_{K^m} = \sum_{0 \le j_1+\ldots+j_n \le m} ||A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f||$$

bildet K^m einen Banachraum.

Bevor wir unsere Saturationssätze formulieren können, benötigen wir noch den Begriff der relativen Vervollständigung, dessen Bedeutung für das Saturationsproblem von H. BERENS [1] erkannt wurde:

Ist $(Y, ||\cdot||_Y)$ ein Banacharum mit $Y \subseteq X$ und $||f|| \le ||f||_Y$ für alle $f \in Y$, so besteht die Vervollständigung von Y relativ zu X aus der Menge aller Elemente $f \in X$, die in der X-Abschließung irgendeiner Kugel von Y liegen. Wir bezeichnen die Vervollständigung von Y relativ zu X mit $\widetilde{Y}$.

2. Saturationssätze. Unser erster Satz lautet:

SATZ 1. *Ist T eine n-parametrige Halbgruppe und m eine natürliche Zahl, dann gilt:*

a) *Aus* $||[T(t) - I]^m f|| = o(|t|^m)(|t| \to 0)$ *folgt* $f \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i^m)$ *und* $A_i^m f = 0$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$.

b) *Aus* $f \in \widetilde{K^m}$ *folgt* $||[T(t) - I]^m f|| = O(|t|^m)$ $(|t| \to 0)$.

c) *Aus* $||[T(t) - I]^m f|| = O(|t|^m)$ $(|t| \to 0)$ *und* $D(A_n) \subseteq D(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *folgt* $f \in \widetilde{K^m}$ *und* $f \in K^m$, *falls* X *reflexiv ist.*

Vor dem Beweis von Satz 1 noch zwei Bemerkungen:

1. Im Rahmen der Theorie der intermediären Räume bewies H. TRIEBEL [14, S. 88], [13] einen sehr allgemeinen Satz über nicht-optimale Approximation für n-parametrige Halbgruppen. Die von ihm benutzte Beweismethode läßt sich jedoch nicht zum Beweis von Satz 1 heranziehen. O. A. IVANOVA [10] zeigte: Ist T^* die adjungierte Halbgruppe von T und A_i^* der adjungierte Operator von A_i, dann gilt $||T^*(t)f^* - f^*|| = O(|t|)$ $(|t| \to 0)$ genau dann, wenn $f^* \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i^*)$ ist.

2. Sätze, in denen das Approximationsverhalten von Produkten der Form $[T_1(t_1) - I]^{j_1} [T_2(t_2) - I]^{j_2} \ldots [T_n(t_n) - I]^{j_n}$ beschrieben wird, findet man in Arbeiten von O. A. IVANOVA [8], [9] und in einer Arbeit des Autors [11]. Es ist interessant, Zusammenhänge zwischen diesen Arbeiten und der Arbeit [12] von A. LEONTE herzustellen.

Beweis von Satz 1: a) Aus $||[T(t) - I]^m f|| = o(|t|^m)$ folgt $||[T(\tau) - I]^m f|| = o(\tau^m)$ $(\tau \to 0)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$; d.h. $f \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i^m)$ und $A_i^m f = 0$.

b) Gehört f zu $\widetilde{K^m}$, dann gibt es eine Folge (f_k) in K^m, für die $||f_k||_{K^m} \le C$ gilt und die in der Norm des Raumes X gegen f konvergiert. Für alle $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in E_n^+$ läßt sich nun schreiben:

$$T(t) - I = T_1(t_1) - I + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{\nu=1}^{i-1} T_\nu(t_\nu)\right) [T_i(t_i) - I].$$

Durch Anwendung des Polynominallehrsatzes erhalten wir daraus

$$(2) \qquad [T(t) - I]^m =$$

$$= \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_n=m} \frac{m!}{j_1!\, j_2! \ldots j_n!} (T_1(t_1) - I)^{j_1} (T_1(t_1)[T_2(t_2) - I])^{j_2} \ldots$$

$$\ldots \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} T_\nu(t_\nu)[T_n(t_n) - I] \right)^{j_n} .$$

Wenden wir nun Formel (1) an, so ergibt sich für $k = 1, 2, \ldots$ und alle $t \in E_n^+$

$$||[T(t) - I]^m f_k|| \le C \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \ldots t_n^{j_n} ||A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f_k|| \le$$

$$\le C|t|^m \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} ||A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f_k|| \le C|t|^m ||f_k||_{K^m} \le C|t|^m .$$

Da (f_k) im Raum X gegen f konvergiert, folgt ; wenn wir k gegen Unendlich streben lassen, für alle $t \in E_n^+$

$$||[T(t) - I]^m f|| \le C|t|^m ,$$

also $||[T(t) - I]^m f|| = O(|t|^m)$ $(|t| \to 0)$.

c) Durch vollständige Induktion beweisen wir zunächst, daß

$$(3) \qquad D(A_n^m) \subseteq D(A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n})$$

für beliebige n-tupel $(j_1, \ldots, j_n)$ von nicht negativen ganzen Zahlen gilt, für die $j_1 + j_2 + \ldots + j_n = m$ ist: Für $m = 1$ ist diese Aussage wegen $D(A_n) \subseteq D(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sicher richtig. Gelte sie nun für $m = l$!

Aus $f \in D(A_n^{l+1})$ folgt dann nacheinander $f \in D(A_n^l A_n)$, $f \in D(A_1^{j_1} \ldots \ldots A_n^{j_n} A_n)$,

$$j_1 + \ldots + j_n = l,\ f \in D(A_n A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n}),\ f \in D(A_i A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Also erhalten wir $f \in D(A_1^{r_1} \ldots A_n^{r_n})$ für jedes n-tupel $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ von nicht negativen ganzen Zahlen mit $r_1 + \ldots + r_n = l + 1$.

Aus (3) folgt $K^m = D(A_n^m)$. Für alle $f \in K^m$ haben wir also $||f|| + ||A_n^m f|| \le ||f||_{K^m}$. Mit dem Satz von Banach über die Beschränktheit des inversen Operators folgt somit für alle $f \in K^m$

$$||f||_{K^m} \le C(||f|| + ||A_n^m f||).$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich: Gehört f zu $\widetilde{D(A_n^m)}$, so gehört f auch zu $\widetilde{K^m}$. Aus der Vorsussetzung $||[T(t) - I]^m f|| = O(|t|^m)$ folgt nun

$||[T_n(\tau) - I]^m f|| = O(\tau)$ $(\tau \to 0)$, und aus der letzten Aussage erhalten wir $f \in \widetilde{D(A_n^m)}$ (s. [1, S. 28]). Also haben wir bewiesen, daß f zu $\widetilde{K^m}$ gehört.

Es sei nun insbesondere X reflexiv. Aus $f \in \widetilde{K^m}$ folgt, daß f auch zur Vervollständigung von $D(A_1^{j_1} \ldots A_n^{j_n})$ relativ zu X für alle n-tupel $(j_1, \ldots, j_n)$ von nicht negativen ganzen Zahlen mit $j_1 + \ldots + j_n = m$ gehört. Daraus ergibt sich wegen der Abgeschlossenheit der Operatoren $A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n}$ und der Reflexivität von X mit Hilfe von Satz 2.2 in [1], daß f zu K^m gehört. Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet.

Wir bemerken, daß Satz 1c) insbesondere dann gilt, wenn

$$D(A_1) = D(A_2) = \ldots = D(A_n)$$

ist.

Setzt man in Satz 1a) ebenfalls $D(A_n) \subseteq D(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, voraus und fordert zusätzlich noch, daß A_n eine beschränkte Inverse besitzt, dann ergibt sich $A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f = 0$, $j_1 + j_2 + \ldots + j_n = m$, sowie

$$[T(t) - I]^m f = 0 \text{ für alle } t \in E_n^+ .$$

Denn da A_n^{-1} existiert und beschränkt ist, existiert auch $(A_n^m)^{-1}$ und ist beschränkt. Zusammen mit (3) und dem Graphensatz ergibt sich daraus, daß $A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n}$ dem Operator A_n^m untergeordnet ist, d.h. daß für alle $f \in D(A_n^m)$ gilt

$$||A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f|| \le C||A_n^m f||.$$

Damit folgt wegen $A_n^m f = 0$ die Aussage $A_1^{j_1} A_2^{j_2} \ldots A_n^{j_n} f = 0$. Mit (1) und (2) folgt daraus $[T(t) - I]^m f = 0$ für alle $t \in E_n^+$.

Für $m = 1$ und $m = 2$ können wir Satz 1 verschärfen. Insbesondere kann in diesen Fällen auf die Bedingung $D(A_n) \subseteq D(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, verzichtet werden.

SATZ 2. *Ist T eine n-parametrige Halbgruppe, dann gilt:*

a) *Aus* $||[T(t) - I]f|| = o(|t|)$ $(|t| \to 0)$ *folgt* $T(t)f = f$ *für alle* $t \in E_n^+$.

b) *Für ein* $f \in X$ *sind die folgenden Aussagen untereinander äquivalent:*

1. $||[T(t) - I]f|| = O(|t|)$ $(|t| \to 0)$; 2. $f \in \widetilde{K^1}$; 3. $f \in K^1$, *falls X reflexiv ist.*

Beweis. a) Wie bereits gezeigt, folgt aus $||[T(t) - I]f|| = o(|t|)$ $f \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i)$ und $A_i f = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Mit (1) und (2) ergibt sich daraus $T(t)f = f$ für alle $t \in E_n^+$.

b) Wegen Satz 1 genügt es zu zeigen, daß aus $\|[T(t) - I]f\| = O(|t|)$ folgt: $f \in \tilde{K}^1$. Wir erhalten zunächst $\|[T_i(\tau) - I]f\| = O(\tau)$ $(\tau \to 0)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Bilden wir nun die Folge

$$f_k = k^n \int_0^{\frac{1}{k}} \ldots \int_0^{\frac{1}{k}} T_1(\xi_1) \ldots T_n(\xi_n) f \, d\xi_1 \ldots d\xi_n \quad k = 1, 2, \ldots,$$

dann ist $f_k \in K^1$ und wir haben für $k = 1, 2, \ldots$

$$\|f_k\|_{K^1} \le C\left(\|f\| + \sum_{i=1}^{n} \left\|k\left[T_i\left(\frac{1}{k}\right) - I\right]f\right\|\right) \le C_f.$$

Da ferner $s \cdot \lim_{k\to\infty} f_k = f$ gilt, gehört somit f zu $\tilde{K}^1$.

SATZ 3. *Ist T eine n-parametrige Halbgruppe, dann gilt:*

a) *Aus* $\|[T(t) - I]^2 f\| = o(|t^2|)$ $(|t| \to 0)$ *folgt* $A_i A_j f = 0$ *für* $i, j = 1, \ldots, n$ *sowie* $[T(t) - I]^2 f = 0$ *für alle* $t \in E_n^+$.

b) *Für ein $f \in X$ sind die folgenden Aussagen untereinander äquivalent.*

1. $\|[T(t) - I]^2 f\| = O(|t|^2)$ $(|t| \to 0)$; 2. $f \in \tilde{K}^2$; 3. $f \in K^2$, *falls X reflexiv ist.*

Beweis. a) Wie bereits gezeigt, folgt aus $\|[T(t) - I]^2 f\| = o(|t|^2)$ $f \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i^2)$ und $A_i^2 f = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mit (1) ergibt sich daraus für alle $\tau \ge 0$

$$[T_i(\tau) - I]^2 f = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Aus $\|[T(t) - I]^2 f\| = o(|t|^2)$ folgt ferner $\|[T_i(\tau) T_j(\tau) - I]^2 f\| = o(\tau^2)$ $(\tau \to 0)$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Mit Hilfe der leicht zu verifizierenden Formel

$$2T_i(\tau)[T_i(\tau) - I][T_j(\tau) - I] =$$
$$= [T_i(\tau)T_j(\tau) - I]^2 - T_i(2\tau)[T_j(\tau) - I]^2 - [T_i(\tau) - I]^2$$

erhalten wir somit

$$\|T_i(\tau)[T_i(\tau) - I][T_j(\tau) - I]f\| = o(\tau^2) \qquad (\tau \to 0). \tag{5}$$

Aus (4), (5) und der für alle $\tau \ge 0$ gültigen Beziehung

$$[T_i(\tau) - I][T_j(\tau) - I] = -[T_j(\tau) - I][T_i(\tau) - I]^2 +$$
$$+ T_i(\tau)[T_i(\tau) - I][T_j(\tau) - I]$$

schließen wir $\|[T_i(\tau) - I][T_j(\tau) - I]f\| = o(\tau^2)$ $(\tau \to 0)$, was $f \in D(A_i A_j)$ und $A_i A_j f = 0$ nach sich zieht. Mit (1) und (2) folgt daraus

$$[T(t) - I]^2 f = 0 \text{ für alle } t \in E_n^+.$$

b) Wegen Satz 1 ist nur noch zu zeigen, daß aus $\|[T(t) - I]^2 f\| = O(|t|^2)$ folgt: $f \in \tilde{K}^2$. Aus unserer Voraussetzung erhalten wir analog wie im Beweis von a)

$$\|[T(\tau) - I]^2 f\| = O(\tau^2) \text{ und } \|[T_i(\tau) - I][T_j(\tau) - I]f\| = O(\tau^2).$$

Wir betrachten nun die Folge

$$f_k = k^{2n} \int_0^{\frac{1}{k}} \ldots \int_0^{\frac{1}{k}} T_1(\xi_1 + \eta_1) \ldots T_n(\xi_n + \eta_n) f \, d\xi_1 \ldots d\xi_n d\eta_1 \ldots d\eta_n.$$

Es ist $f_k \in K^2$ für $k = 1, 2, \ldots$ sowie

$$\|f_k\|_{K^2} \le C\left(\|f\| + \sum_{i=1}^{n} \left\|k\left[T_i\left(\frac{1}{k}\right) - I\right]f\right\| + \right.$$
$$\left. + \sum_{i,j=1,2,\ldots,n} \left\|k^2\left[T_i\left(\frac{1}{k}\right) - I\right]\left[T_j\left(\frac{1}{k}\right) - I\right]f\right\|\right) \le C_f.$$

Weil darüber hinaus $s \cdot \lim_{k\to\infty} f_k = f$ gilt, erhalten wir $f \in \tilde{K}^2$.

3. Beispiele. Aus der Vielzahl der Anwendungsbeispiele für die Sätze 1, 2 und 3 greifen wir zwei typische heraus:

1. Mit $C[-\infty, \infty]$ bezeichnen wir den Raum der auf E_1 definierten, reellwertigen, stetigen Funktionen f, für die $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existieren, mit der Norm $\|f\| = \sup_{x \in E_1} |f(x)|$. Auf $C[-\infty, \infty]$ sei die folgende zweiparametrige Halbgruppe T definiert:

$$[T(t)f](x) = [T(t_1, t_2)f](x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t_2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x + t_1 - u) \exp\left(-\frac{u^2}{4t_2}\right) du & t_2 > 0 \\ f(x + t_1) & t_2 = 0. \end{cases}$$

Es ist $T(t_1, t_2) = T_1(t_1) T_2(t_2)$, wobei T_1 die Halbgruppe der Rechtstranslationen und T_2 die Gauß-Weierstraß Halbgruppe ist. Bekanntlich gilt

$$D(A_1) = \{f \in C[-\infty, \infty]; \quad f' \text{ existiert auf } E_1 \text{ und } f' \in C[-\infty, \infty]\}$$

sowie $A_1 f = f'$, ferner

$$D(A_2) = D(A_1^2) \quad \text{und} \quad A_2 f = A_1^2 f.$$

Die Voraussetzungen von Satz 1 sind somit für T erfüllt. Es ist $K^m = D(A_2^m)$ und also $\widetilde{K^m} = \widetilde{D(A_2^m)}$. Für $\widetilde{D(A_2^m)}$ ist berechnet worden:

$$\widetilde{D(A_2^m)} = \{f \in C[-\infty, \infty]\,;\ f', f'', \ldots, f^{(m-1)} \in C[-\infty, \infty],\ f^{(m-1)}$$

ist lokal absolut stetig und $f^{(m)}$ wesentlich beschränkt auf $E_1\}$. Damit ergibt sich nun aus Satz 1: a) Aus $\|[T(t) - I]^m f\| = o(|t|^m)$ folgt: f ist m-mal differenzierbar auf E_1 und für alle $x \in E_1$ gilt $f^{(m)}(x) = 0$.

b) Für ein $f \in C[-\infty, \infty]$ sind äquivalent:

$$\|[T(t) - I]^m f\| = O(|t|^m) \quad \text{und} \quad f \in \widetilde{D(A_2^m)}.$$

2. Für ein beliebiges, aber festes p, $1 < p < \infty$, sei $L_p(E_n)$ der Raum der auf E_n definierten, reellwertigen zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen f mit der Norm $\|f\|_p = \left(\int\limits_{E_n} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$. Die Räume $L_p(E_n)$ sind reflexiv. Für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $f \in L_p(E_n)$ setzen wir

$$[T_i(\tau) f](x) = [T_i(\tau) f](x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_i - u_i)^2}{4\tau}\right) f(x_1, \ldots, x_{i-1}, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, du_i.$$

Dann ist $T(t) = T(t_1, \ldots, t_n) = T_1(t_1) T_2(t_2) \ldots T_n(t_n)$ eine n-parametrige Halbgruppe und

$D(A_i) = \{f \in L_p(E_n)\,;\ f$ ist lokal absolut stetig in der Variablen x_i, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_p(E_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist lokal absolut stetig in der Variablen x_i und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in L_p(E_n)\}$

sowie

$$A_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Anwendung von Satz 2 ergibt: a) Aus $\|[T(t) - I] f\|_p = o(|t|)$ folgt $f \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ fast überall für $i = 1, 2, \ldots, n$ sowie $T(t) f = f$ für alle $t \in E_n^+$. b) Für ein $f \in L_p(E_n)$ sind äquivalent:

$$\|[T(t) - I] f\|_p = O(|t|) \quad \text{und} \quad f \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i).$$

Entsprechend wendet man Satz 3 an.

LITERATUR

[1] H. Berens, *Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen au Banachräumen*. Lecture Notes in Mathematics, **64**, Berlin, 1968.

[2] P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*. Grundl. d. math. Wiss. **145**, Berlin, 1967.

[3] N. Grădinaru, *Approximating difference schemes of Cauchy problems for evolution systems and approximation of twoparameter semigroups of linear operators*. An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Ser. I, Matematică, **19**, 161–173 (1973).

[4] N. Grădinaru, The type of a n-parameter semigroup of linear operators. Bul. Inst. Politehn. Iaşi Sect. I, **24** **(28)**, 57–59 (1978).

[5] A. Haimovici, *Sur une generalisation du probleme de Cauchy*. Ann. Univ. Mariae Curie-Skledowska, Sect. A, **17**, 123–131 (1963).

[6] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. **31**, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1948.

[7] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups* (rev. ed.). Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. **31**, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1957.

[8] O. A. Ivanova, *n-parameter semi-groups of bounded linear operators and their connection with approximation theory* (Ukrainian, Russian summary). Visnik L'viv Derz. Univ. Ser. Meh.-Mat. **2**, 44–52 (1965).

[9] O. A. Ivanova, *Certain theorems on n-parameter semi-groups of linear bounded operators and their applications to function theory* (Russian). Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i. Prilozen., **2**, 35–41 (1966).

[10] O. A. Ivanova, *The adjoint n-parameter semi-group of operators* (Ukrainian, Russian summary). Visnik L'viv Politehn. Inst. **44**, 114–118 (1970).

[11] W. Köhnen, *n-parametrige Halbgruppen von Operatoren in der Approximationstheorie*. In Approximation Theory, Z. Ciesielski and J. Musielak (eds.) Polish Scientific Publishers, Warszawa 1975, 121–128.

[12] A. Leonte, *Semi-groups of operatos in bidimensional analysis* (Romanian, English summary). Stud. Cerc. Mat., **23**, 191–199 (1971).

[13] H. Triebel, *Interpolation theory for function spaces of Besov type defined in domains*, I. Math. Nachr., **57**, 51–85 (1973).

[14] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Mathematical Library, vol. 1, Amsterdam 1978.

Eigegangen am 16. XII. 1979