

## SUR D'AXIOMATIQUE DES ESPACES À CONVEXITÉ

par  
 RADU PRECUP  
 (Cluj-Napoca)

1. Dans cette note on compare l'axiomatique des espaces à convexité au sens de V.W. Bryant et R.J. Webster [3], [4], [5] à l'axiomatique de la géométrie (plane) d'après Hilbert. On constate que le système d'axiomes de l'espaces à convexité est l'adaptation au cas infini dimensionnel du système formé des deux premiers groupes d'axiomes: d'incidence et d'ordre. Les espaces à convexité peuvent être regardés comme espaces non-éuclidiens infini dimensionnés.

### 2. Préliminaires

Soit  $X$  un ensemble non vide et soit  $\cdot : X \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , une opération binaire multivoque définie sur  $X$ , et  $/ : X \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , une opération inverse de l'opération  $\cdot$ , définie par

$$x/y = \{z \mid x \subset y \cdot z\}.$$

Les opérations  $\cdot$  et  $/$  peuvent être définies sur  $\mathcal{P}(X)$ , si on pose

$$A \cdot B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \cdot b, \quad A/B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a/b, \quad A, C \subset X.$$

On appelle *espace à convexité* [3], [4], [5], le couple  $(X, \cdot)$ , pour lequel les axiomes suivants sont vérifiés:

- (i)  $x \cdot y \neq \emptyset \neq x/y$
- (ii)  $x \cdot x = x = x/x$
- (iii)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- (iv)  $x/y \approx u/v \Rightarrow x \cdot v \approx y \cdot u$
- (v)  $x \cdot y \approx x \cdot z \Rightarrow y = z$ , ou  $y \subset x \cdot z$ , ou  $z \subset x \cdot y$ ,

où la notation  $A \approx B$  signifie  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Dans un espace à convexité  $(X, \cdot)$  un ensemble  $A \subset X$  s'appelle *convexe*, si  $A \cdot A = A$ , et *linéaire*, si  $A/A = A$ ; on définit l'*enveloppe convexe* et l'*enveloppe linéaire* de  $A$  par

$$[A] = \bigcap_{A \subset B=B \cdot B} B, \quad \{A\} = \bigcap_{A \subset B=B/B} B.$$

L'enveloppe convexe de deux points  $x, y$  est

$$[x, y] = x \cup x \cdot y \cup y,$$

et l'enveloppe linéaire des points  $x, y, x \neq y$  (la droite déterminée par  $x, y$ ) est  $\{x, y\} = x/y \cup x \cup x \cdot y \cup y/x$ .

Les notations sont celles de [3]; le signe  $\cdot$  est supprimé quand il n'y a pas de confusion; les règles de calcul dans les espaces à convexité que nous employons sont également celles de [3].

Nous présentons ci-dessous les axiomes d'incidence et d'ordre pour la géométrie plane:

**Groupe 1 (axiomes d'incidence)** - constitué d'axiomes qui définissent la relation d'incidence pour points et droites:

- (I) Deux points sont situés au moins sur une droite.
- (II) Deux points distincts sont situés simultanément au plus sur une droite.
- (III) Il existe au moins deux points sur une droite.  
Il existe au moins trois points qui ne sont pas situés sur une même droite.

Si trois points  $x, y, z$  sont situés sur une droite, nous écrivons  $xyz = 0$ ; si  $y$  "est entre"  $x$  et  $z$ , nous écrivons  $xyz \sim 0$ .

**Groupe 2 (axiomes d'ordre)** - constitué d'axiomes qui définissent la relation "est entre" ( $\sim$ ):

- (IV) Si  $xyz \sim 0$ , alors:  $1^0 xyz = 0$ ,  
 $2^0 x \neq y, x \neq z, y \neq z$ ,  
 $3^0 zyx \sim 0$ .
- (V) Si  $x \neq y$ , alors il existe au moins un point  $z$ , tel que  $xyz \sim 0$ .
- (VI) Si  $xyz = 0$ , alors une au plus des relations  $xyz \sim 0, yzx \sim 0, zxy \sim 0$  est valable.

On appelle *segment* (ouvert) d'extrémités  $x, z, x \neq z$ , l'ensemble de points  $y$  pour lequel  $xyz \sim 0$ . On appelle *triangle*, tout système de trois points  $x, y, z$  pour lesquels  $xyz \neq 0$ .

- (VII) (PASCH) Si une droite qui ne passe pas par les sommets d'un triangle coupe un côté du triangle (transversale), alors elle coupe encore au moins un des deux autres.

REMARQUE. La deuxième exigence comprise en (III) impose à  $X$  une dimension  $> 1$  perdant que (VII) assigne 2 comme dimension de  $X$ .  $\square$

Considérons une forme plus faible de l'axiome (VII) qui n'imposera plus la dimension 2 à  $X$ :

(VII\*) *Si une droite qui ne passe pas par les sommets d'un triangle coupe au moins deux des trois droites déterminées par les sommets et coupe au moins un côté du triangle (transversale\*), alors elle coupe encore un, au moins, des deux autres.*

La liste suivante contient quelques conséquences des groupes 1 et 2\* d'axiomes (le groupe 2\* est constitué par (IV), (V), (VI), (VII\*)) (pour démonstrations voir [1]):

- (C1) Deux points distincts  $x, y$  déterminent une seule droite, dénoté par  $\{x, y\}$ .
- (C2) Deux droites distinctes ont au plus un point commun.
- (C3) Si  $x \neq y$ , il existe un  $z$  tel que  $xzy \sim 0$ .
- (C4) Si  $xyz = 0, x \neq y, x \neq z, y \neq z$ , alors une seulement des relations suivantes a lieu:  $xyz \sim 0, yzx \sim 0, zxy \sim 0$ .
- (C5) Si une transversale\* coupe un côté d'un triangle, alors elle en coupe encore un et seulement un.
- (C6) Si  $x, y, z, u$  sont quatre, points colinéaires et  $xyz \sim 0, yzu \sim 0$ , alors  $xyu \sim 0$  et  $xzu \sim 0$ .
- (C7) Si  $x, y, z, u$  sont quatre points distincts, colinéaires et  $xyz \sim 0, xzu \sim 0$ , alors  $xyu \sim 0$  et  $yzu \sim 0$ .

**3.** Soient  $X$  un ensemble organisé d'après les axiomes (I)–(VI), (VII\*); nous définissons l'opération "segment" par:

$$(1) \quad \begin{aligned} x \cdot y &= (z \mid xzy \sim 0), & x \neq y, \\ x \cdot x &= x. \end{aligned}$$

On a:

$$(2) \quad \begin{aligned} x/y &= (z \mid yxz \sim 0), & x \neq y, \\ x/x &= x. \end{aligned}$$

Démontrons que  $(X, \cdot)$  est un espace à convexité:

- (i) découle de (C3), (V), (1), (2),
- (ii) découle de (1), (2);
- (iii) il suffit de démontrer que  $(x \cdot y) \cdot z \subset x \cdot (y \cdot z)$  ([2]); on a les cas:
  - a)  $x = y = z$ , cas évident,
  - b)  $x = y \neq z$ ; soit  $u \subset (xy)z = xz, xuz \sim 0$  et soit  $v$ , ayant la propriété que  $uvz \sim 0$  ( $v$  existe à cause de (C3)); on a

$$\begin{aligned} zvu &\sim 0 \\ zux &\sim 0, \end{aligned}$$

d'où, à cause de (C7),  $zvx \sim 0$  et  $vux = 0$ , donc  $u \subset x(xz)$ .

- c)  $x \neq y = z$ ; soit  $u \subset (xy)y$ ; il existe un  $v$  tel que

$$\begin{aligned} yuv &\sim 0 \\ yvx &\sim 0, \end{aligned}$$

d'où  $yux \sim 0$ , ainsi  $u \subset xy = x(yz)$ .

d)  $y \neq x = z$ ; on a

$$(xy)z = (yx)z = (yx)x = x(yx) = x(yz).$$

e) Supposons  $x, y, z$  distincts et  $xyz = 0$ ; en appliquant (C4) on a, ou  $xyz \sim 0$ , ou  $yzx \sim 0$ , ou  $zxy \sim 0$ ; considérons le cas  $xyz \sim 0$ , alors  $(xy)z \subset xz \subset x(yz)$ ; en effet si  $u \subset (xy)z$ , il existe un  $v$  tel que:  $xvy \sim 0$  et  $vuz \sim 0$ ;  $xvy \sim 0$  et  $xyz \sim 0$  impliquent  $xvz \sim 0$ , ou bien  $zvx \sim 0$ , ce qui, avec  $vuz \sim 0$ , nous fournit  $zux \sim 0$ , donc  $u \subset xz$ . Si  $u \subset xz$  alors une des relations suivantes  $xuy \sim 0$ ,  $yuz \sim 0$ ,  $u = y$  a lieu. Si la première a lieu, soit  $v$  tel que  $zvy \sim 0$ ; à cause de  $xyz \sim 0$  nous avons  $xyv \sim 0$ , ce qui, avec  $xuy \sim 0$ , implique  $xuv \sim 0$ , donc  $u \subset x(yz)$ .

Si la deuxième relation a lieu, de  $xyz \sim 0$  et  $yuz \sim 0$  il résulte  $xyu \sim 0$ , ce qui avec  $yuv \sim 0$ , où  $uvz \sim 0$ , nous donne  $xuv \sim 0$  ((C6)).

Si, en fin,  $u = y$ , soit  $yvz \sim 0$ ; alors à cause de  $xyz \sim 0$ , on a  $xyv \sim 0$ , donc  $u \subset x(yz)$ . Les cas  $yzx \sim 0$  et  $zxy \sim 0$  se traitent de la même façon.

f) supposons  $x, y, z$  distincts et  $xyz \neq 0$ ; soient  $u \subset (xy)z$  et  $v$ , tels que  $vuz \sim 0$  et  $xvy \sim 0$ ; on a  $zvy \neq 0$ , parce que dans le cas contraire,  $v$  serait situé simultanément sur les droites  $\{y, z\}$  et  $\{x, y\}$ , ce qui est exclu par (C2) et par le fait que  $v \neq y$ . La droite  $\{x, u\}$  est une transversale\* du triangle  $yzv$  et alors il existe un  $w \subset yz$ , tel que,  $ywz \sim 0$  (à cause de (C5)), donc  $xuw \sim 0$ , car la transversale\*  $\{z, v\}$  dans le triangle  $xyw$  coupe  $xw$  en  $u$ .

(iv) Considérons les cas:

a)  $x = y$ ,  $u = v$ ; la conclusion est immédiate.

b)  $x = y$ ,  $u \neq v$ ;  $x = x/x \subset u/v$  implique  $xuv \sim 0$ ;

Soit  $z$  tel que  $xzu \sim 0$ ; alors  $xzv \sim 0$  et par conséquent,  $xv \approx xu = yu$ .

c)  $x \neq y = u \neq v$ ; de  $x/y \approx y/v$  il résulte qu'il existe un  $u$ , avec les propriétés  $uxy \sim 0$  et  $uyv \sim 0$ , donc  $xyv \sim 0$ , c'est-à-dire  $xv \approx yy = y$ .

d)  $x \neq y = v \neq u$ ; il existe un  $z$ , tel que  $zxy \sim 0$ ,  $zuy \sim 0$ , d'où  $xuy = 0$ ; si  $xuy \sim 0$ , ou  $yxu \sim 0$ , alors  $xv = xy \approx yu$ ; le cas  $uyx \sim 0$  n'est pas possible, parce que avec  $zxy \sim 0$ , il implique  $zyu \sim 0$ , ce qui contredit  $zuy \sim 0$ .

e)  $y \neq x = u \neq v$ ;  $x/y \approx x/v$  entraîne qu'il existe un  $u$  tel que  $uxy \sim 0$ ,  $uxv \sim 0$ , d'où  $xyv = 0$ ; si  $xyv \sim 0$ , ou  $yvx \sim 0$ , alors  $xv \approx xy$ ; le cas  $vxy \sim 0$  n'est pas possible.

f) Supposons  $x, y, u, v$ , distincts et colinéaires; de l'ensemble des cas de situation ordonnée de nos quatre points, il faut exclure les cas:  $xyvu \sim 0$ ,  $xvyu \sim 0$ ,  $vxyu \sim 0$ ,  $xvuy \sim 0$ ,  $vxyu \sim 0$ , pour lesquels  $x/y \approx u/v$  ( $xyuv \sim 0$  signifie:  $xyu \sim 0$  et  $yuv \sim 0$ ). Restent les cas  $xyuv \sim 0$ ,  $xuyv \sim 0$ ,  $xuvy \sim 0$ ,  $uxyv \sim 0$ ,  $uxvy \sim 0$ ,  $uvxy \sim 0$ ,  $vuxy \sim 0$ , dans lesquels  $xv \approx yu$  a lieu.

g) Supposons  $x, y, u, v$  distincts, noncolinéaires,  $xyu = 0$ , ou  $xyv = 0$ : de  $x/y \approx u/v$  il résulte qu'il existe un  $w$ , tel que  $wxy \sim 0$ ,  $wuv \sim 0$ ; si  $xyu = 0$ , alors, à cause de  $wxy \sim 0$ , il résulte que  $x, y, u, w$  sont colinéaires

et tenant compte que  $wuv \sim 0$ , on obtient que les points  $x, y, u, v$  sont colinéaires, ce qui est exclu; de la même façon,  $xyv = 0$  ne peut pas avoir lieu.

h) Supposons  $x, y, u, v$  distincts et quelsque soient trois de ces points, ils sont noncolinéaires; soit  $z$ , tel que  $zxy \sim 0, zuv \sim 0$ ;  $z, y, u$  déterminent un triangle et la droite  $\{x, v\}$  est une transversale\* qui coupe  $zy$  en  $x$  et ne coupe pas  $zu$ ; de (C5) il résulte qu'il existe un  $w$  sur la droite  $\{x, v\}$  et avec la propriété  $uwy \sim 0$ ; soit le triangle  $xzv$  et la transversale\*  $\{y, u\}$ ; on obtient que  $xwv \sim 0$  et par conséquent,  $xv \approx yu$ .

Les autres cas s'obtiennent des cas antérieurs par symétrie.

(v) Supposons  $x, y, z$  distincts;  $xy \approx xz$  implique qu'il existe un  $u$  tel que  $xuy \sim 0$  et  $xuz \sim 0$ , donc  $x, y, z, u$  sont colinéaires; on a, ou  $xyz \sim 0$ , c'est-à-dire  $y \subset xz$ , ou  $yzx \sim 0$ , c'est-à-dire  $z \subset xy$ , ou  $zxy \sim 0$ , cas impossible, car avec  $xuz \sim 0$ , il implique  $uxy \sim 0$  qui contredit  $xuy \sim 0$ . Au cas au quel  $x, y, z$  ne sont pas tous distincts, la conclusion est immédiate.

Soit maintenant  $(X, \cdot)$ , un espace à convexité; démontrons que si  $\dim X > 1$ , alors  $X$  vérifie les axiomes (I)–(VI), (VII\*).

(I), (II) et la première affirmation de (III) sont évidemment vérifiés, si  $\dim X \geq 1$ ; si  $\dim X > 1$ , alors (III) intégralement vérifié.

Nous définissons la relation "est entre" par:

$$(3) \quad xyz \sim 0 \Leftrightarrow x \neq z \quad \text{et} \quad y \subset x \cdot z.$$

Si  $x, y, z$  sont trois points distincts, nous définissons:

$$(4) \quad xyz = 0 \Leftrightarrow xyz \sim 0, \quad \text{ou} \quad yzx \sim 0, \quad \text{ou} \quad zxy \sim 0.$$

(IV), (V), (VI) sont vérifiés pour les relations " $\sim$ " et " $=$ " définies par (3) et (4).

(VII\*) Considérons  $x, y, z$  trois points distincts, noncolinéaires; on a

$$(5) \quad \{x, y, z\} = \{\{x, y\}, z\} = \{x, y\} \cup \{x, y\}/z \cup z\{x, y\}/\{x, y\}$$

(l'ordre d'application des opérations  $\cdot$  et  $/$  est:  $\cdot, /$ )

En effet, la première égalité résulte de  $(x, y, z) \subset (\{x, y\}, z) \subset \{x, y, z\}$ .

Pour la deuxième égalité de (5) nous remarquerons que

$$(\{x, y\}, z) \subset \{x, y\} \cup \{x, y\}/z \cup z\{x, y\}/\{x, y\} \subset \{\{x, y\}, z\}, \quad \text{et}$$

$\{x, y\}/z\{x, y\} \subset \{x, y\}/z$ ; à cause du théorème 9[3] en déduit que l'ensemble du deuxième membre de (5) est linéaire.

Soit  $\{u, v\}$ , ( $u \neq v$ ) une transversale\* du triangle  $xyz$  qui coupe  $x \cdot y$  en  $u$ ;  $\{u, v\}$  étant une transversale\* il résulte que  $v \subset \{x, y, z\}$ ; nous pouvons supposer que  $v \subset \{x, y\}/z$ ; en effet,  $v \not\subset \{x, y\}$ , parce que  $u \subset \{x, y\}$ , et si  $v \subset z\{x, y\}/\{x, y\}$ , alors on peut prendre à sa place  $v' \subset u/v \subset \{x, y\}/(z\{x, y\}/\{x, y\}) \subset \{x, y\}/z$ .

Donc  $\{x, y\} \approx v \cdot z$  (dans un point  $a$ );  $a \neq u$ , car au cas contraire  $z \subset \{u, v\}$ ;  
 mais  $\{x, y\} = u/x \cup u/y \cup u$ .

En effet, du fait que  $u \subset x \cdot y$ , il résulte:

$$(6) \quad u/y \subset u/(u/x) \subset u \cdot x/u = x \cup u \cdot x \cup x/u,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} x/u &\subset (u/y)/u = u/y \cdot u = u/y, \\ x \cdot u &\subset (u/y) \cdot u \subset u/y, \\ x &\subset u/y, \end{aligned}$$

où, pour déduire (6) et (7), nous avons fait appel aux théorèmes 3, 9 [3].

Ainsi,  $x/u \cup x \cdot u \cup x = u/y$ , et par conséquent

$$\{x, y\} = u/x \cup u \cup x/u \cup x \cdot u \cup x = u/x \cup u/y \cup u.$$





Si  $a \subset u/x$ , alors  $u \subset a \cdot x$  et du fait que  $a \subset v \cdot z$  et  $(v \cdot z) \cdot z \subset v \cdot (z \cdot x)$ ,  
 il résulte qu'il existe un  $u' \subset z \cdot x$  tel que  $u \subset v \cdot u'$ , d'où  $u' \subset \{u, v\} \cap z \cdot x$ .  
 Le cas  $a \subset u/y$  se traite de manière analogue.

Nous avons, donc, démontré le théorème suivant:

**THÉORÈME.** <sup>10</sup> *Le couple  $(X, \cdot)$ , constitué d'un ensemble  $X$  structuré à l'aide des axiomes (I) - (VI), (VII\*) et de l'opération  $\cdot$ , définie par (1), est un espace à convexité.*

<sup>20</sup> *Un espace à convexité,  $(X, \cdot)$  de la dimension  $> 1$  vérifie les axiomes (I) - (VI), (VII\*), la relation "est entre" étant celle définie par (3).*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Barbilian, *Opera didactică*, vol. III, Ed. Tehnică, București, 1976.
- [2] W.V. Bryant, *Independent axioms for convexity*. Journal of Geometry, **5**, 1, 95–99 (1974). 
- [3] V.W. Bryant, R.J. Webster, *Convexity spaces I. The basic properties*. J. Math. Anal. Appl., **37**, 1, 206–213 (1972). 
- [4] V.W. Bryant, R.J. Webster, *Convexity spaces II. Separation*. J. Math. Anal. Appl. **43**, 2, 321–327 (1973). 
- [5] V.W. Bryant, R.J. Webster, *Convexity spaces III. Dimension*. J. Math. Anal. Appl., **57**, 2, 382–392 (1977). 
- [6] A. Ghika, *Separarea mulțimilor convexe în spații lineare non-vectoriale*. Acad. R.P.R. Bul. Ști. Sect. Mat. Fiz., **7**, 287–296 (1955).
- [7] W. Prenowitz, *A contemporary approach to classical geometry*. Amer. Math. Monthly, **68**, Appendix, 1–67 (1961).

Reçu le 17.IX.1980