MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 9, Nº 2, 1980, pp. 255—260

SUR L'AXIOMATIQUE DES ESPACES À CONVEXITÉ

par
RADU PRECUP
(Cluj-Napoca)

1. Dans cette note on compare l'axiomatique des espaces à convexité au sens de V.W. BRYANT et R.J. WEBSTER [3], [4], [5] à l'axiomatique de la géométrie (plane) d'après HILBERT. On constate que le système d'axiomes de l'espace à convexité est l'adaptation au cas infini dimensionnel du système formé des deux premiers groupes d'axiomes : d'incidence et d'ordre. Les espaces à convexité peuvent être regardés comme espaces non-euclidiens infini dimensionnés.

2. Préliminaires

Soit X un ensemble non vide et soit $\cdot : X \times X \to \mathcal{P}(X)$, une opération binaire multivoque définie sur X, et $/ : X \times X \to \mathcal{P}(X)$, une opération inverse de l'opération $\cdot$, définie par

$$x/y = (z \mid x \subset y \cdot z).$$

Les opérations $\cdot$ et $/$ peuvent être définies sur $\mathcal{P}(X)$, si on pose

$$A \cdot B = \bigcup_{\substack{a \subset A \\ b \subset B}} a \cdot b, \quad A/B = \bigcup_{\substack{a \subset A \\ b \subset B}} a/b, \quad A,\ B \subset X.$$

On appelle *espace à convexité* [3], [4], [5], le couple $(X, \cdot)$, pour lequel les axiomes suivants sont vérifiés :

(i) $x \cdot y \neq \emptyset \neq x/y$
(ii) $x \cdot x = x = x/x$
(iii) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(iv) $x/y \approx u/v \Rightarrow x \cdot v \approx y \cdot u$
(v) $x \cdot y \approx x \cdot z \Rightarrow y = z$, ou $y \subset x \cdot z$, ou $z \subset x \cdot y$,

où la notation $A \approx B$ signifie $A \cap B \neq \emptyset$.

Dans un espace à convexité $(X, \cdot)$ un ensemble $A \subset X$ s'appelle *convexe*, si $A \cdot A = A$, et *linéaire*, si $A/A = A$; on définit *l'enveloppe convexe* et *l'enveloppe linéaire* de A par

$$[A] = \bigcap_{A \subset B = B \cdot B} B, \quad \{A\} = \bigcap_{A \subset B = B/B} B.$$

L'enveloppe convexe de deux points x, y est

$$[x, y] = x \cup x \cdot y \cup y,$$

et l'enveloppe linéaire des points $x, y, x \neq y$ (la droite déterminée par x, y) este $\{x, y\} = x/y \cup x \cup x \cdot y \cup y \cup y/x$.

Les notations sont celles de [3] ; le signe $\cdot$ est supprimé quand il n'y a pas de confusion ; les règles de calcul dans les espaces à convexité que nous employons sont également celles de [3].

Nous présentons ci-dessous les axiomes d'incidence et d'ordre pour la géométrie plane :

Groupe 1 (axiomes d'incidence)-constitué d'axiomes qui définissent la relation d'incidence pour points et droites :

(I) *Deux points sont situés au moins sur une droite.*

(II) *Deux points distincts sont situés simultanément au plus sur une droite.*

(III) *Il existe au moins deux points sur une droite.*

Il existe au moins trois points qui ne sont pas situés sur une même droite.

Si trois points x, y, z sont situés sur une droite, nous écrivons $xyz = 0$; si y "est entre" x et z, nous écrivons $xyz \sim 0$.

Groupe 2 (axiomes d'ordre) — constitué d'axiomes qui définissent la relation "est entre" $(\sim)$:

(IV) Si $xyz \sim 0$, alors : 1° $xyz = 0$,
2° $x \neq y, x \neq z, y \neq z$,
3° $zyx \sim 0$.

(V) Si $x \neq y$, alors il existe au moins un point z, tel que $xyz \sim 0$.

(VI) Si $xyz = 0$, alors une au plus des relations $xyz \sim 0$, $yzx \sim 0$, $zxy \sim 0$ est valable.

On appelle *segment* (ouvert) *d'extrémités* $x, z, x \neq z$, l'ensemble de points y pour lequel $xyz \sim 0$. On appelle *triangle*, tout système de trois points x, y, z pour lesquels $xyz \neq 0$.

(VII) (PASCH) *Si une droite qui ne passe pas par les sommets d'un triangle coupe un côté du triangle* (transversale), *alors elle coupe encore au moins un des deux autres.*

Remarque. La deuxième exigence comprise en (III) impose à X une dimension > 1 pendant que (VII) assigne 2 comme dimension de X.

Considérons une forme plus faible de l'axiome (VII) qui n'imposera plus la dimension 2 à X :

(VII*) *Si une droite qui ne passe pas par les sommets d'un triangle coupe au moins deux des trois droites déterminées par les sommets et coupe, au moins un côté du triangle* (transversale*), *alors elle coupe encore un, au moins, des deux autres.*

La liste suivante contient quelques conséquences des groupes 1 et 2* d'axiomes (le groupe 2* est constitué par (IV), (V), (VI), (VII*)) (pour démonstrations voir [1]) :

(C1) *Deux points distincts x, y déterminent une seule droite, dénoteé par $\{x, y\}$.*
(C2) *Deux droites distinctes ont au plus un point commun.*
(C3) *Si $x \neq y$, il existe un z tel que $xzy \sim 0$.*
(C4) *Si $xyz = 0$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, alors une seulement des relations suivantes a lieu : $xyz \sim 0$, $yzx \sim 0$, $zxy \sim 0$.*
(C5) *Si une transversale* coupe un côté d'un triangle, alors elle en coupe encore un et seulement un.*
(C6) *Si x, y, z, u sont quatre points colinéaires et $xyz \sim 0$, $yzu \sim 0$, alors $xyu \sim 0$ et $xzu \sim 0$.*
(C7) *Si x, y, z, u sont quatre points distincts, colinéaires et $xyz \sim 0$, $xzu \sim 0$, alors $xyu \sim 0$ et $yzu \sim 0$.*

3. Soit X un ensemble organisé d'après les axiomes (I)—(VI), (VII*) ; nous définissons l'opération „*segment*" par :

(1)
$$x \cdot y = (z \mid xzy \sim 0), \qquad x \neq y,$$
$$x \cdot x = x.$$

On a :

(2)
$$x/y = (z \mid yxz \sim 0), \qquad x \neq y,$$
$$x/x = x.$$

Démontrons que $(X, \cdot)$ est un espace à convexité :
(i) découle de (C3), (V), (1), (2),
(ii) découle de (1), (2) ;
(iii) il sufit de démontrer que $(x \cdot y) \cdot z \subset x \cdot (y \cdot z)$ ([2]) ; on a les cas : a) $x = y = z$, cas évident,

b) $x = y \neq z$; soit $u \subset (xy)z = xz$, $xuz \sim 0$ et soit v, ayant la propriété que $uvz \sim 0$ (v existe à cause de (C3)) ; on a

$$zvu \sim 0$$
$$zux \sim 0,$$

d'où, à cause de (C7), $zvx \sim 0$ et $vux = 0$, donc $u \subset x(xz)$.

c) $x \neq y = z$; soit $u \subset (xy)y$; il existe un v tel que

$$yuv \sim 0$$
$$yvx \sim 0,$$

d'où $yux \sim 0$, ainsi $u \subset xy = x(yz)$.

d) $y \neq x = z$; on a
$$(xy)z = (yx)z = (yx)x = x(yx) = x(yz).$$

e) Supposons x, y, z distincts et $xyz = 0$; en appliquant (C4) on a, ou $xyz \sim 0$, ou $yzx \sim 0$, ou $zxy \sim 0$; considérons le cas $xyz \sim 0$, alors $(xy)z \subset \subset xz \subset x(yz)$; en effet si $u \subset (xy)z$, il existe un v tel que: $xvy \sim 0$ et $vuz \sim 0$; $xvy \sim 0$ et $xyz \sim 0$ impliquent $xvz \sim 0$, ou bien $zvx \sim 0$, ce qui, avec $vuz \sim 0$, nous fournit $zux \sim 0$, donc $u \subset xz$. Si $u \subset xz$ alors une des relations suivantes $xuy \sim 0$, $yuz \sim 0$, $u = y$ a lieu. Si la première a lieu, soit v tel que $zvy \sim 0$; à cause de $xyz \sim 0$ nous avons $xyv \sim 0$, ce qui, avec $xuy \sim 0$, implique $xuv \sim 0$, donc $u \subset x(yz)$.

Si la deuxième relation a lieu, de $xyz \sim 0$ et $yuz \sim 0$ il résulte $xyu \sim 0$, ce qui avec $yuv \sim 0$, où $uvz \sim 0$, nous donne $xuv \sim 0$ ((C6)).

Si, en fin, $u = y$, soit $yvz \sim 0$; alors à cause de $xyz \sim 0$, on a $xyv \sim 0$, donc $u \subset x(yz)$. Les cas $yzx \sim 0$ et $zxy \sim 0$ se traitent de la même façon.

f) supposons x, y, z distincts et $xyz \neq 0$; soient $u \subset (xy)z$ et v, tels que $vuz \sim 0$ et $xvy \sim 0$; on a $zvy \neq 0$, parce que dans le cas contraire, v serait situé simultanément sur les droites $\{y, z\}$ et $\{x, y\}$, ce qui est exclu par (C2) et par le fait que $v \neq y$. La droite $\{x, u\}$ est une transversale* du triangle yzv et alors il existe un $w \subset yz$, tel que $ywz \sim 0$ (à cause de (C5)), donc $xuw \sim 0$, car la transversale* $\{z, v\}$ dans le triangle xyw coupe xw en u.

(iv) Considérons les cas:

a) $x = y$, $u = v$; la conclusion est immédiate.

b) $x = y$, $u \neq v$; $x = x/x \subset u/v$ implique $xuv \sim 0$;

Soit z tel que $xzu \sim 0$; alors $xzv \sim 0$ et par conséquent, $xv \approx xu = = yu$.

c) $x \neq y = u \neq v$; de $x/y \approx y/v$ il résulte qu'il existe un u, avec les propriétés $uxy \sim 0$ et $uyv \sim 0$, donc $xyv \sim 0$, c'est-à-dire $xv \approx yy = y$.

d) $x \neq y = v \neq u$; il existe un z, tel que $zxy \sim 0$, $zuy \sim 0$, d'où $xuy = = 0$; si $xuy \sim 0$, ou $yxu \sim 0$, alors $xv = xy \approx yu$; le cas $uyx \sim 0$ n'est pas possible, parce que avec $zxy \sim 0$, il implique $zyu \sim 0$, ce qui contredit $zuy \sim 0$.

e) $y \neq x = u \neq v$; $x/y \approx x/v$ entraine qu'il existe un u tel que $uxy \sim \sim 0$, $uxv \sim 0$, d'où $xyv = 0$; si $xyv \sim 0$, ou $yvx \sim 0$, alors $xv \approx xy$; le cas $vxy \sim 0$ n'est pas possible.

f) Supposons x, y, u, v, distincts et colinéaires; de l'ensemble des cas de situation ordonnée de nos quatre points, il faut exclure les cas: $xyvu \sim 0$, $xvyu \sim 0$, $vxyu \sim 0$, $xvuy \sim 0$, $vxuy \sim 0$, pour lesquels $x/y \not\approx u/v$ ($xyuv \sim 0$ signifie: $xyu \sim 0$ et $yuv \sim 0$). Restent les cas $xyuv \sim 0$, $xuyv \sim 0$, $xuvy \sim 0$, $uxyv \sim 0$, $uxvy \sim 0$, $uvxy \sim 0$, $vuxy \sim 0$, dans lesquels $xv \approx yu$ a lieu.

g) Supposons x, y, u, v distincts, noncolinéaires, $xyu = 0$, ou $xyv = = 0$; de $x/y \approx u/v$ il résulte qu'il existe un w, tel que $wxy \sim 0$, $wuv \sim 0$; si $xyu = 0$, alors, à cause de $wxy \sim 0$, il résulte que x, y, u, w sont coli-

néaires et tenant compte que $wuv \sim 0$, on obtient que les points x, y, u, v sont colinéaires, ce qui est exclu; de la même façon, $xyv = 0$ ne peut pas avoir lieu.

h) Supposons x, y, u, v distincts et quelsque soient trois de ces points, ils sont noncolinéaires; soit z, tel que $zxy \sim 0$, $zuv \sim 0$; z, y, u déterminent un triangle et la droite $\{x, v\}$ est une transversale* qui coupe zy en x et ne coupe pas zu; de (C5) il résulte qu'il existe un w sur la droite $\{x, v\}$ et avec la propriété $uwy \sim 0$; soit le triangle xzv et la transversale* $\{y, u\}$; on obtient que $xwv \sim 0$ et par conséquent, $xv \approx yu$.

Les autres cas s'obtiennent des cas antérieurs par symétrie.

(v) Supposons x, y, z distincts; $xy \approx xz$ implique qu'il existe un u tel que $xuy \sim 0$ et $xuz \sim 0$, donc x, y, z, u sont colinéaires; on a, ou $xyz \sim 0$, c'est-à-dire $y \subset xz$, ou $yzx \sim 0$, c'est-à-dire $z \subset xy$, ou $zxy \sim 0$, cas imposible, car avec $xuz \sim 0$, il implique $uxy \sim 0$ qui contredit $xuy \sim 0$. Au cas au quel x, y, z ne sont pas tous distincts, la conclusion est immédiate.

Soit maintenant $(X, \cdot)$, un espace à convexité; demontrons que si $\dim X > 1$, alors X vérifie les axiomes (I)—(VI), (VII*).

(I), (II) et la première affirmation de (III) sont évidamment vérifiés, si $\dim X \geqslant 1$; si $\dim X > 1$, alors (III) est intégralement vérifié.

Nous définissons la relation „*est entre*" par:

(3) $$xyz \sim 0 \Leftrightarrow x \neq z \quad \text{et} \quad y \subset x \cdot z.$$

Si x, y, z sont trois points distincts, nous définissons:

(4) $$xyz = 0 \Leftrightarrow xyz \sim 0, \text{ ou } yzx \sim 0, \text{ ou } zxy \sim 0.$$

(IV), (V), (VI) sont vérifiés pour les relations „$\sim$" et „$=$" définies par (3) et (4).

(VII*) Considérons x, y, z trois points distincts, noncolinéaires; on a

(5) $$\{x, y, z\} = \{\{x, y\}, z\} = \{x, y\} \cup \{x, y\}/z \cup z\{x, y\}/\{x, y\}$$

(l'ordre d'application des opérations $\cdot$ et / est: $\cdot$, /)

En effet, la première égalité résulte de
$$(x, y, z) \subset (\{x, y\}, z) \subset \{x, y, z\}.$$

Pour la deuxième égalité de (5) nous remarquerons que
$$(\{x, y\}, z) \subset \{x, y\} \cup \{x, y\}/z \cup z\{x, y\}/\{x, y\} \subset \{\{x, y\}, z\}, \quad \text{et}$$

$\{x, y\}/z\{x, y\} \subset \{x, y\}/z$; à cause du théorème 9[3] en déduit que l'ensemble du deuxième membre de (5) est linéaire.

Soit $\{u, v\}$, $(u \neq v)$ une transversale* du triangle xyz qui coupe $x \cdot y$ en u; $\{u, v\}$ étant une transversale* il résulte que $v \subset \{x, y, z\}$; nous pouvons supposer que $v \subset \{x, y\}/z$; en effet, $v \not\subset \{x, y\}$, parce que $u \subset \subset \{x, y\}$, et si $v \subset z\{x, y\}/\{x, y\}$, alors on peut prendre à sa place $v' \subset \subset u/v \subset \{x, y\}/(z\{x, y\}/\{x, y\}) \subset \{x, y\}/z$.

Donc $\{x, y\} \approx v \cdot z$ (dans un point a); $a \neq u$, car au cas contraire $z \subset \{u, v\}$; mais $\{x, y\} = u/x \cup u/y \cup u$.

En effet, du fait que $u \subset x \cdot y$, il résulte:

$$u/y \subset u/(u/x) \subset u \cdot x/u = x \cup u \cdot x \cup x/u, \tag{6}$$

$$x/u \subset (u/y)/u = u/y \cdot u = u/y, \tag{7}$$

$$x \cdot u \subset (u/y) \cdot u \subset u/y,$$

$$x \subset u/y,$$

où, pour déduire (6) et (7), nous avons fait appel aux théorèmes 3, 9 [3].

Ainsi, $x/u \cup x \cdot u \cup x = u/y$, et par conséquent

$$\{x, y\} = u/x \cup u \cup x/u \cup x \cdot u \cup x = u/x \cup u/y \cup u.$$

Si $a \subset u/x$, alors $u \subset a \cdot x$ et du fait que $a \subset v \cdot z$ et $(v \cdot z) \cdot x \subset \subset v \cdot (z \cdot x)$, il résulte qu'il existe un $u' \subset z \cdot x$ tel que $u \subset v \cdot u'$, d'où $u' \subset \{u, v\} \cap z \cdot x$. Le cas $a \subset u/y$ se traite de manière analogue.

Nous avons, donc, démontré le théorème suivant:

THÉORÈME. 1° *Le couple $(X, \cdot)$, constitué d'un ensemble X structuré à l'aide des axiomes* (I)—(VI), (VII*) *et de l'opérations* $\cdot$, *définie par* (1), *est un espace à convexité.*

2° *Un espace à convexité, $(X, \cdot)$ de la dimension > 1 vérifie les axiomes* (I)—(VI), (VII*), *la relation* „est entre" *étant celle définie par* (3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barbilian, D., *Opera didactică*, vol. III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1976.

[2] Bryant, W. V., *Independent axioms for convexity*. Journal of Geometry, **5**, *1*, 95—99 (1974).

[3] Bryant, V. W., Webster, R.J., *Convexity spaces* I. *The basic properties*. J. Math. An., Applic., **37**, 1, 206—213 (1972).

[4] Bryant, V. W., Webster, R.J., *Convexity spaces* II. *Separation*. J. Math. An., Applic. **43**, *2*, 321—327 (1973).

[5] Bryant, V. W., Webster, R. J., *Convexity spaces* III. *Dimension*. J. Math. An. Applic., **57**, *2*, 382—392 (1977).

[6] Ghika, A., *Separarea mulţimilor convexe în spaţii lineate non-vectoriale*. Acad. R.P.R. Bul. Sti. Sect. Mat. Fiz., **7**, 287—296 (1955).

[7] Prenowitz, W., *A contemporary approach to classical geometry*. Amer. Math. Monthly, **68**, Appendix, 1—67 (1961).

Reçu le 17. IX. 1980