MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tom 9, Nº 2, 1980, pp. 261—268

SUR LES FONCTIONNELLES DE LA FORME SIMPLE AU SENS DE T. POPOVICIU

par

I. RAŞA

(Cluj-Napoca)

1. T. POPOVICIU a introduit les fonctionnelles de la forme simple, en étudiant leurs propriétés et en indiquant leurs applications à l'évaluation du reste dans les formules linéaires d'approximation de l'analyse (voir [7], [8], [5], [6]). Nous allons envisager d'autres propriétés de ces fonctionnelles et leurs liaisons avec d'autres résultats.

Les notations que nous allons employer sont celles de [7], [6]. En particulier, soit n un nombre entier, $n \geqslant 0$; une fonction $f \in C[a, b]$ est dite P_n-nonconcave (P_n-convexe) si toutes ses différences divisées d'ordre $n+1$ sur $n+2$ points distincts de $[a, b]$ sont nonnégatives (positives).

2. Soit M un sous-espace de $C[a, b]$ qui contient les polynômes. Soit $A : M \to R$ une fonctionnelle linéaire telle que

(1) $\qquad A(f) \geqslant 0$ quelle que soit $f \in M$ P_n-nonconcave

(Ces fonctionnelles sont étudiées dans [4], chap. XI). En général, une telle fonctionnelle n'a pas la propriété

(2) $\qquad A(g) > 0$ quelle que soit $g \in M$ P_n-convexe.

Voici un *exemple*. Soit $M = C^2[-1, 1]$, $A(f) = f''(0)$. Alors $A(f) \geqslant 0$ si $f \in C^2[-1, 1]$ est P_1-nonconcave. Mais $g(t) = t^4$ est P_1-convexe et $A(g) = 0$.

Remarquons que si A possède la propreté (2), alors A est une fonctionnelle P_n-simple ([7], théorème 5). Le théorème 1 met en évidence une classe de fonctionnelles pour lesquelles la propriété (1) entraîne la propriété (2) (et donc la simplicité).

Nous allons considérer dans $C^k[a, b]$ la norme donnée par

$$\max\{\|f\|, \|f'\|, \ldots, \|f^{(k)}\|\}, \quad \text{où} \quad \|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$$

THÉORÈME 1. *Soit* $0 \leqslant k \leqslant n$, $A : C^k[a, b] \to \mathbf{R}$ *linéaire et continue,* $A \neq 0$. *Si*

(3) $A(f) \geqslant 0$ *quelle que soit* $f \in C^k[a, b]$ P_n*-nonconcave alors*

(4) $A(g) > 0$ *quelle que soit* $g \in C^k[a, b]$ P_n*-convexe.*

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ ce résultat est un corollaire d'un théorème de T. POPOVICIU ([7], théorème 15). Nous présenterons une nouvelle démonstration du théorème de T. Popoviciu, qui est appliquable aussi pour $k = n$ dans le théorème 1. L'exemple ci-dessus nous montre que pour $k > n$ la conclusion du théorème 1 n'est pas toujours vraie.

3. Pour $t \in [a, b]$ soit $f_{n+1,t} : [a, b] \to R$,

$$f_{n+1,t}(s) = \begin{cases} 0 & , \quad s \in [a, t] \\ (s-t)^n, & s \in [t, b] \end{cases}$$

Alors $f_{n+1,t}$ est une fonction P_n-nonconcave.

Nous dirons que la fonctionnelle A est P_n-exacte si $A(1) = A(x) = \ldots$ $\ldots = A(x^n) = 0$, $A(x^{n+1}) \neq 0$. Soit $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $A : C^k[a, b] \to \mathbf{R}$ linéaire, continue, P_n-exacte. Conformément aux résultats de PEANO, REMEZ et SARD (voir [9]) il existe une fonction u à variation bornée sur $[a, b]$, continue à gauche, $u(a) = 0$, telle que

(5) $$A(f) = \int_a^b f^{(k)}\, du, \; f \in C^k[a, b]$$

De plus, si nous notons $u_0 = u$, $u_j(x) = \int_a^x u_{j-1}(t)\, dt$, $j = 1, \ldots, n-k$, alors

(6) $$u_j(a) = u_j(b) = 0, \; j = 0, 1, \ldots, n-k$$

(7) $$u_j(t) = \frac{(-1)^{j-1}}{(k+j)!} A(f_{k+j+1,t}), \; t \in [a, b], \; j = 1, \ldots, n-k$$

(8) $$A(f) = (-1)^{j-1} \int_a^b u_j(t) f^{(k+j+1)}(t)\, dt, \; j = 0, 1, \ldots, n-k,$$

la formule (8) étant valable quelle que soit $f \in C^k[a, b]$ telle que $f^{(k+j)}$ est absolument continue sur $[a, b]$.

En particulier, soit $j = n - k$, et $\varphi = (-1)^{n-k-1} u_{n-k}$. Alors

(9) $$\varphi(t) = \frac{1}{n!} A(f_{n+1,t}), \; t \in [a, b]$$

(10) $$A(f) = \int_a^b f^{(n+1)} \varphi\, dt, \; f \in C^k[a, b] \text{ avec } f^{(n)} \text{ absolument continue.}$$

LEMME 1. *Soit* $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $A : C^k[a, b] \to \mathbf{R}$ *linéaire, continue,* P_n*-exacte. Si* $A(f_{n+1,t}) \geqslant 0$ *pour chaque* $t \in [a, b]$, *alors* $A(f) \geqslant 0$ *pour chaque* $f \in C^k[a, b]$ P_n*-nonconcave.*

Démonstration. Soit $f \in C^k[a, b]$ une fonction P_n-nonconcave. Si $B_m(f)$ est le polynôme de Bernstein de degré m, alors $B_m(f)$ est P_n-nonconcave et $(B_m(f))$ converge vers f au sens de la norme de l'espace $C^k[a, b]$. Donc $\lim\limits_m A(B_m(f)) = A(f)$.

D'autre part, la fonction φ donnée par (9) est nonnégative, et $(B_m(f))^{(n+1)}$ est aussi nonnégative. Donc, compte tenant de (10), $A(B_m(f)) \geqslant 0$. Il en résulte $A(f) \geqslant 0$, et le lemme est démontré.

LEMME 2. *Soit* $L : C[a, b] \to \mathbf{R}$, *linéaire, continue,* P_1*-exacte, telle que* $L(f_{2,t}) \geqslant 0$ *pour chaque* $t \in [a, b]$. *Alors on peut trouver* c, d, $a < c < d < b$, *tels que* $L(h) > 0$ *quelle que soit* $h \in C[a, b]$ P_1*-nonconcave sur* $[a, b]$ *et* P_1*-convexe sur* $[c, d]$.

Démonstration. Soit v une fonction à variation bornée, $v(a) = 0$, telle que

(11) $$L(g) = \int_a^b g(t)\, dv(t), \; g \in C[a, b].$$

L étant P_1-exacte, il est facile à vérifier que $v(b) = 0$, et $\int_a^b v(t)dt = 0$.

Alors il existe un point $x_0 \in (a, b)$ tel que v est continue au point x_0 et $v(x_0) > 0$, car dans le cas contraire $L = 0$, ce que contredit l'hypothèse $L(x^2) \neq 0$. Soit (c, d) un voisinage de x_0 tel que $a < c < d < b$ et

(12) $$v(t) > 0, \; t \in [c, d].$$

Soit $h \in C\,[a, b]$ P_1-nonconcave sur $[a, b]$ et P_1-convexe sur $[c, d]$. Notons $f(t) = h(t) - h'_g(d)t$, $t \in [a, b]$ (h'_g c'est la dérivée à gauche). Alors $L(h) = L(f)$ et nous montrerons que $L(f) > 0$.

La fonction f est P_1-nonconcave sur $[a, b]$ et P_1-convexe sur $[c, d]$. La dérivée à gauche f'_g est finie sur (a, b), nondécroissante sur (a, b) et croissante sur $[c, d]$. Comme $f'_g(d) = 0$, on a

$$f'_g(t) < 0, \quad t \in [c, d). \tag{13}$$

Soient maintenant

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, c] \\ f(c), & t \in [c, b] \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} f(d), & t \in [a, d] \\ f(t), & t \in [d, b] \end{cases}$$

En tenant compte de $f'_g(c) < 0$ et $f'_g(d) = 0$, il est facile à vérifier que f_1 et f_2 sont P_1-nonconcaves sur $[a, b]$. Le lemme 1 appliqué pour $n = 1$, $k = 0$ entraîne

$$L(f_1) \geqslant 0, \quad L(f_2) \geqslant 0. \tag{14}$$

Nous avons $L(f) = \int_a^c f dv + \int_d^b f dv + \int_c^d f dv$; en appliquant pour la dernière intégrale la formule d'intégration par parties on obtient

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2) - \int_c^d v f'_g dt \tag{15}$$

Compte tenant de (12), (13), (14), (15) on a $L(f) > 0$, et le lemme est démontré.

4. Le théorème 2 ci-dessous a été démontré par T. Popoviciu à l'aide de la théorie des différences divisées et des fonctions convexes d'ordre supérieur. La démonstration que nous allons présenter ici est fondée sur les résultats de Peano, Remez, Sard et sur les lemmes 1 et 2.

THÉORÈME 2. (T. POPOVICIU [7]). *Soit $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $A : C^k[a, b] \to \mathbf{R}$ linéaire, continue, P_n-exacte. Si $A(f_{n+1,t}) \geqslant 0$ pour chaque $t \in [a, b]$, alors $A(g) > 0$ quelle que soit $g \in C^k[a, b]$ P_n-convexe.*

Démonstration. Considérons les fonctions $u_0, \ldots, u_{n-k}$ avec les propriétés (5), (6), (7), (8). Si nous notons $v = (-1)^{n-k-1} u_{n-k-1}$ alors v est à variation bornée. Soit $L : C[a, b] \to \mathbf{R}$, $L(f) = \int_a^b f dv$. Si $f \in C^{n-1}[a, b]$, montrons que

$$A(f) = L(f^{(n-1)}). \tag{16}$$

En effet, si $n - k - 1 = 0$, alors compte tenant de (5) on a

$$A(f) = \int_a^b f^{(k)} du = \int_a^b f^{(n-1)} du_0 = \int_a^b f^{(n-1)} dv = L(f^{(n-1)}).$$

Si $n - k - 1 > 0$, alors $j = n - k - 2 \geqslant 0$ et compte tenant de (8),

$$A(f) = (-1)^{j-1} \int_a^b u_j f^{(k+j+1)} dt = (-1)^{n-k-1} \int_a^b f^{(n-1)} du_{j+1} =$$

$$= (-1)^{n-k-1} \int_a^b f^{(n-1)} du_{n-k-1} = \int_a^b f^{(n-1)} dv = L(f^{(n-1)}).$$

Donc l'égalité (16) est établie. Soit maintenant $g \in C[a, b]$ P_1-nonconcave, et soit $f \in C^{n-1}[a, b]$ telle que $f^{(n-1)} = g$. Alors f est P_n-nonconcave. Conformément au lemme 1, $A(f) \geqslant 0$. Alors $L(g) = L(f^{(n-1)}) = A(f) \geqslant 0$. Donc $L(g) \geqslant 0$ quelle que soit g P_1-nonconcave. Alors L est nulle sur tout polynôme de degré 1. Comme $L(x^2) = \frac{2}{(n+1)!} A(x^{n+1}) \neq 0$, il en résulte que L est P_1-exacte. En résumé, L vérifie les hypothèses du lemme 2 ($f_{2,t}$ étant P_1-nonconcave). Soit donc $a < c < d < b$ tels que (17) $L(h) > 0$ si h est P_1-nonconcave sur $[a, b]$, P_1-convexe sur $[c, d]$. Soit $g \in C^k[a, b]$ P_n-convexe. Il faut démontrer que $A(g) > 0$. La dérivée $g^{(n-1)}$ existe sur (a, b), étant continue et P_1-convexe sur (a, b). Désignerons par $g^{(n)}$ la dérivée à gauche de $g^{(n-1)}$, qui existe sur (a, b). Considérons les polynômes p, q de degré n tels que

$$p^{(j)}(c) = g^{(j)}(c), \quad q^{(j)}(d) = g^{(j)}(d), \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{18}$$

Soit f la fonction qui coincide avec p sur $[a, c]$, avec g sur $[c, d]$ et avec q sur $[d, b]$. Alors $f \in C^{n-1}[a, b]$, $f^{(n-1)}$ est P_1-nonconcave sur $[a, b]$ et P_1-convexe sur $[c, d]$. Compte tenant de (17), $L(f^{(n-1)}) > 0$. Mais alors, en vertu de (16), $A(f) > 0$. Soit $h = g - f$. Il est facile à vérifier que $h^{(n-1)}$ est continue sur (a, b) et P_1-nonconcave. Donc h est P_n-nonconcave sur (a, b). Mais $h \in C^k[a, b]$, donc h est P_n-nonconcave sur $[a, b]$. Conformément au lemme 1, $A(h) \geqslant 0$. Alors $A(g) = A(f) + A(h) > 0$, et le théorème est démontré.

5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.

a) Soit $0 \leqslant k \leqslant n - 1$. Si $A(f) \geqslant 0$ quelle que soit $f \in C^k[a, b]$ P_n-nonconcave, alors $A(1) = A(x) = \ldots = A(x^n) = 0$. Supposons $A(x^{n+1}) = 0$. Soit p un polynôme quelconque sur $[a, b]$. L'ensemble de ses différences divisées d'ordre $n + 1$ est borné ; soient m et M ses bornes. Alors $f_1 = p - mx^{n+1}$ et $f_2 = Mx^{n+1} - p$ sont P_n-nonconcaves, donc $A(f_1) \geqslant 0$, $A(f_2) \geqslant 0$. On déduit facilement $A(p) = 0$, et alors $A = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $A(x^{n+1}) \neq 0$ et la fonctionnelle A est P_n-exacte. De plus, $A(f_{n+1,t}) \geqslant 0$ car $f_{n+1,t} \in C^{n-1}[a, b]$ est P_n-nonconcave pour chaque $t \in [a, b]$. En appliquant le théorème 2 on obtient $A(g) > 0$ quelle que soit $g \in C^k[a, b]$ P_n-convexe.

b) Soit maintenant $k = n$. En utilisant la représentation intégrale de la fonctionnelle linéaire et bornée $A : C^n[a, b] \to \mathbf{R}$ et les conditions $A(1) = A(x) = \ldots = A(x^{n-1}) = 0$ il est facile à vérifier qu'il existe une fonction u à variation bornée sur $[a, b]$, continue à gauche, $u(a) = 0$, telle que

$$A(f) = \int_a^b f^{(n)}du, \; f \in C^n\,[a, b]. \tag{19}$$

On a aussi $A(x^n) = 0$, d'où $u(b) = 0$. Soit $h \in C[a, b]$ nondécroissante, et soit $H \in C^n[a, b]$ telle que $H^{(n)} = h$. Alors H est P_n-nonconcave, donc $\int_a^b hdu = \int_a^b H^{(n)}du = A(H) \geqslant 0$. Puisque $\int_a^b hdu = -\int_a^b udh$, on a

$$\int_a^b udh \leqslant 0, \text{ quelle que soit } h \in C[a, b] \text{ nondécroissante.} \tag{20}$$

Compte tenant de (20), la continuité à gauche de u entraîne $u \leqslant 0$ sur $[a, b]$. Comme $A \neq 0$, il existe un point $t \in (a, b)$ de continuité pour u, tel que $u(t) < 0$. Alors on peut trouver $r \in (a, t)$ et $c \in R$ tels que

$$u(s) \leqslant c < 0, \quad \text{si} \quad s \in [r, t]. \tag{21}$$

Soit $g \in C^n[a, b]$ P-convexe. Alors $g^{(n)} \in C[a, b]$ est croissante.

$$A(g) = \int_a^b g^{(n)}du = -\int_a^b udg^{(n)} \geqslant -\int_r^t udg^{(n)} \geqslant -c(g^{(n)}(t) - g^{(n)}(r)) > 0.$$

Donc $A(g) > 0$ et le théorème est démontré.

6. Soit n un nombre entier, $n \geqslant 0$, et soit $A : C[a, b] \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle P_n-simple. Donc $A(x^{n+1}) \neq 0$ et pour chaque $f \in C[a, b]$ on peut trouver les points $t_1, \ldots, t_{n+2}$ distincts tels que

$$A(f) = A(x^{n+1})[t_1, \ldots, t_{n+2}; f]. \tag{22}$$

Pour que la fonctionnelle A soit P_n-simple il faut et il suffit que $A(g) \neq 0$ quelle que soit g P_n-convexe (voir [7]).

En particulier, soit $n = 0$, et soit $A : C[a, b] \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle linéaire. Alors pour chaque $f \in C[a, b]$ on peut trouver les points distincts $t, s \in [a, b]$ tels que $A(f) = A(x)\dfrac{f(s) - f(t)}{s - t}$ si et seulement si $A(g) \neq 0$ quelle que soit $g \in C[a, b]$ croissante.

Il est intéressant de comparer le résultat ci-dessus au suivant.

THÉORÈME 3. (FARNUM et WHITLEY [3]). *Soit* $A : C\,[a, b] \to \mathbf{R}$, $A \neq 0$, $\|A\| \leqslant 2$, *donnée par* $A(f) = \int_a^b fdu$ *où la fonction* u *est à variation bornée, continue à gauche,* $u(a) = 0$. *Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour chaque* $f \in C[a, b]$ *on peut trouver* $s \neq t$ *tels que* $A(f) = f(s) - f(t)$.

(ii) $A(g) \neq 0$ *quelle que soit* $g \in C[a, b]$ *croissante*

(iii) $u(b) = 0$ *et* u *ne change pas le signe sur* $[a, b]$.

FARNUM et WHITLEY ont étudié un cas plus général (voir [3]). Remarquons que l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence du théorème 1, pour $k = n = 0$.

7. Considérons un nombre entier $n > 0$, et deux nombres a, b tels que $0 < a < b$. Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ où $a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant b$. Notons $A_n = A_n(\mathbf{x}) = (x_1 + \ldots + x_n)/n$, $G_n = G_n(\mathbf{x}) = (x_1 \ldots x_n)^{1/n}$, $S_n = S_n(\mathbf{x}) = \sum_{i<j} (x_j - x_i)^2$.

CARTWRIGHT and FIELD [2] ont démontré les inégalités

$$\frac{1}{2bn^2} S_n \leqslant A_n - G_n \leqslant \frac{1}{2an^2} S_n \tag{23}$$

On en déduit immédiatement

$$1 + \frac{S_n}{2b^2n^2} \leqslant \frac{A_n}{G_n} \leqslant 1 + \frac{S_n}{2a^2n^2}. \tag{24}$$

En utilisant (22) pour $n = 1$ nous obtiendrons des inégalités comparables à (24).

Soit $L : C[a, b] \to \mathbf{R}$ $L(f) = \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} - f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)$. En exceptant le cas banal $x_1 = \ldots = x_n$, la fonctionnelle L est P_1-simple et $L(x^2) = \dfrac{S_n}{n^2}$. Considérons la fonction ln sur $[a, b]$. Alors on peut trouver t_1, t_2, t_3 distincts dans l'intervalle $[a, b]$ tels que

$$L(\ln) = L(x^2)[t_1, t_2, t_3; \ln] \tag{25}$$

Mais $L(\ln) = \ln G_n - \ln A_n$, et $-\frac{1}{2a^2} \leqslant [t_1, t_2, t_3; \ln] \leqslant -\frac{1}{2b^2}$.

Alors (25) nous donne $-\frac{S_n}{2a^2n^2} \leqslant \ln \frac{G_n}{A_n} \leqslant -\frac{S_n}{2b^2n^2}$, ou bien

$$\exp \frac{S_n}{2b^2n^2} \leqslant \frac{A_n}{G_n} \leqslant \exp \frac{S_n}{2a^2n^2} \tag{26}$$

Compte tenant de l'inégalité $1 + \frac{S_n}{2b^2n^2} \leqslant \exp \frac{S_n}{2b^2n^2}$ nous retenons de (24) et (26) les meilleures délimitations

$$\exp \frac{S_n}{2b^2n^2} \leqslant \frac{A_n}{G_n} \leqslant 1 + \frac{S_n}{2a^2n^2}. \tag{27}$$

Les inégalités (27) sont aussi comparables à celles de BULLEN [1].

8. Dans un autre ouvrage le théorème 1 sera appliqué à l'étude de la représentation des fonctionnelles d'un degré d'exactitude donné.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bullen, P. S., *The inequalities of Radó and Popoviciu.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math. Fiz. No 330—No. 337, 23—33 (1970).

[2] Cartwright, D. I., FIELD, M. J., *A refinement of the arithmetic mean-geometric mean inequality.* Proc. Amer. Math. Soc. 71, 36—38 (1978).

[3] Farnum, N., Whitley, R., *Functionals on real C(S).* Canadian J. Math. **30**, 490—498(1978).

[4] Karlin, S., Studden, W., *Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics.* Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1966.

[5] Popoviciu, E., *Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires,* Mathematica, Cluj, **6** (**29**), 145—155 (1964).

[6] — , *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării.* Ed. Dacia, Cluj 1972.

[7] Popoviciu, T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica, Cluj, **1** (**24**), 95—142 (1959).

[8] — , *La simplicité du reste dans certaines formules de quadrature.* Mathematica, Cluj, **6** (**29**), 157—184 (1964).

[9] Sard, A., *Integral represenтons of remainders.* Duke Math. Journal **15**, 333—345 (1948).

Reçu le 17. IX. 1980