MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE N QUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 10, N° 2, 1981, pp. 211—215

FONCTIONNELLES P_n— EXACTES ET FONCTIONNELLES P_n — SIMPLES

par

I. RASA

(Cluj-Napoca)

1. Considérons l'intervalle $[a, b]$ et le nombre entier $n \geqslant -1$. Soit P_n l'espace des polynômes de degré $\leqslant n (P_{-1} = \{0\})$. Notons $p_i(t) = t^i$, $t \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots$ Soit M un sous-espace linéaire de $C[a, b]$ qui contient les polynômes. Une fontionnelle linéaire $L : M \to R$ est dite P_n — — exacte si $L(p_0) = L(p_1) = \ldots = L(p_n) = 0$, $L(p_{n+1}) \neq 0$. La fonctionnelle L est dite P_n—simple si $L(p_{n+1}) > 0$ et si quelle que soit $f \in M$ on peut trouver les points $t_1, \ldots, t_{n+2}$ distincts dans $[a, b]$ tels que

$$(1) \qquad L(f) = L(p_{n+1})[t_1, \ldots, t_{n+2}; f]$$

Une fonctionnelle linéaire $L : M \to \mathbf{R}$ est P_n—simple si et seulement si $L(s) > 0$ quelle que soit $s \in M$, s P_n—convexe ([4]).

Soit $t \in [a, b]$. Notons $w(t) = 1$ si $t \in (a, b)$ et $w(t) = 1/2$ si $t \in \{a, b\}$. Soient $x_1, \ldots, x_m$ des points distincts dans $[a, b]$, et $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Considérons la fonctionnelle

$$(2) \qquad A : C[a, b] \to \mathbf{R}, \ A(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i f(x_i), \ f \in C[a, b]$$

Soit $\mathfrak{L}_{n+1}$ l'ensemble des fonctionnelles de la forme (2) pour lesquelles $\sum_{i=1}^{m} w(x_i) \leqslant \frac{n+1}{2}$ $(\mathfrak{L}_0 = \{0\})$.

THÉORÈME 1 ([2]). *Si T est une fonctionnelle linéaire et positive sur $C[a, b]$, alors il existe $L \in \mathfrak{L}_{n+1}$ telle que $T|_{P_n} = L|_{P_n}$.*

THÉORÈME 2 ([7]). *Soient X, Y, Z des espaces de Banach, $U : X \to Y$, $V : X \to Z$ des opérateurs linéaires et bornés, U surjectif, $V|_{\ker U} = 0$. Alors il existe un opérateur linéaire et borné $T : Y \to Z$ tel que $V = T \circ U$.*

Dans l'espace linéaire $C^k[a, b]$ nous allons considérer la norme donnée par $\|f\|_k = \max\{\|f\|, \|f'\|, \ldots, \|f^{(k)}\|\}$, $\|\cdot\|$ étant la norme uniforme.

2. T. POPOVICIU [5, §4] a étudié les fonctionnelles P_n-exactes $L : M \to R$ pour lesquelles on peut trouver les fonctionnelles P_n-simples L_1, $L_2 : M \to R$ telles que $L = L_1 - L_2$. Dans cette note nous envisagerons une classe de fonctionnelles qui jouissent de cette propriété. Nous construirons aussi une fonctionnelle qui n'a pas la propriété en question.

THÉORÈME 3. *Soit $0 \leqslant k \leqslant n+1$ et soit $L : C^k[a, b] \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle linéaire, bornée, P_n-exacte. Alors on peut trouver deux fonctionnelles L_1, $L_2 : C^k[a, b] \to \mathbf{R}$ linéaires et bornées, chacune étant P_n-simple or nulle, telles que $L = L_1 - L_2$.*

Démonstration. Soit dans le théorème 2, $X = C^k[a, b]$, $Y = C[a, b]$, $Z = \mathbf{R}$, $U(f) = f^{(k)}$, $V = L$. Alors il existe une fonctionnelle $T : C[a, b] \to \mathbf{R}$ linéaire et bornée, telle que

$$L(f) = T(f^{(k)}), f \in C^k[a, b]. \tag{3}$$

La fonctionnelle L étant P_n-exacte, on déduit que T est P_{n-k}-exacte. Soient T_1, T_2 des fonctionnelles linéaires et positives sur $C[a, b]$ telles que $T = T_1 - T_2$. En appliquant le théorème 1 on déduit qu'il existe $A \in \mathfrak{L}_{n-k+1}$ telle que $T_1|_{P_{n-k}} = T_2|_{P_{n-k}} = A|_{P_{n-k}}$.

Supposons que $T_1 - A$ soit nonnulle. Soit $s \in C[a, b]$ P_{n-k}-convexe. Si $T_1(s) = A(s)$, alors T_1 et A coincident sur le système de Tchebycheff $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-k}, s\}$; mais alors $T_1 = A$ ([3]). Donc, si $T_1 - A$ est nonnulle, alors $(T_1 - A)(s) \neq 0$ quelle que soit $s \in C[a, b]$ P_{n-k}-convexe. Il en résulte que $T_1 - A$ est nulle, or $T_1 - A$ est P_{n-k}-simple, or $-(T_1 - A)$ est P_{n-k}-simple. Les mêmes conclusions sont valables pour $T_2 - A$. Compte tenant que $T = (T_1 - A) - (T_2 - A)$, on déduit que $T = A_1 - A_2$ où A_1 et A_2 sont des fonctionnelles linéaires et bornées sur $C[a, b]$, chacune étant P_{n-k}-simple or nulle. Soient $L_1 = A_1 \circ U$, $L_2 = A_2 \circ U$. Alors L_1 et L_2 sont linéaires et bornées sur $C^k[a, b]$. Soit $A_1 \neq 0$, donc A_1 est P_{n-k}-simple. Alors $L_1 \neq 0$. Si $g \in C^k[a, b]$ est P_n-convexe, alors $g^{(k)} \in C[a, b]$ est P_{n-k} — convexe, donc $L_1(g) = A_1(g^{(k)}) > 0$. On en déduit que L_1 este P_n-simple or nulle, le même conclusion étant valable pour L_2. Compte tenant de (3) on obtient $L(f) = T(f^{(k)}) = A_1(f^{(k)}) - A_2(f^{(k)}) = L_1(f) - L_2(f)$ quelle que soit $f \in C^k[a, b]$. Donc $L = L_1 - L_2$.

REMARQUE. Une certaine propriété de minimalité pour la représentation $L = L_1 - L_2$ est étudié dans [5], [6].

3. Exemples et applications

a). Il y a des fonctionnelles P_n-exactes qui ne sont pas représentables sous la forme d'une différence de fonctionnelles P_n-simples. Voici un exemple.

Soit M l'espace de tous les polynômes sur $[0, 1]$. Considérons la fonctionnelle linéaire $L : M \to \mathbf{R}$ pour laquelle $L(p_0) = L(p_1) = \ldots = L(p_n) = 0$, $L(p_k) = kC_k^{n+1}$, $k \geqslant n+1$. Supposons que $L = L_1 - L_2$, où les fonctionnelles L_1, $L_2 : M \to \mathbf{R}$ sont linéaires, chacune étant P_n-simple or nulle. Compte tenant de (1), pour chaque $k \geqslant n+1$ on peut trouver $s, t \in (0, 1)$ tels que

$$kC_k^{n+1} = L(p_k) = L_1(p_k) - L_2(p_k) = L_1(p_{n+1})C_k^{n+1}s^{k-n-1} - L_2(p_{n+1})C_k^{n+1}t^{k-n-1} \leqslant L_1(p_{n+1})C_k^{n+1}.$$

Donc $L_1(p_{n+1}) \geqslant k$ quel que soit $k \geqslant n+1$, ce qui est impossible.

b). Considérons la formule de quadrature de Hardy

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = H(f) + R_H(f)$$

où $H(f) = 0{,}28[f(0) + f(6)] + 1{,}62[f(1) + f(5)] + 2{,}2f(3)$. La fonctionnelle R_H, définie sur $C[0, 6]$, est P_5-exacte mais n'est pas P_5-simple ([5]). Soit G la fonctionnelle qui intervient dans la formule de quadrature de Gauss, avec trois noeuds, sur l'intervalle $[0, 6]$, donc

$$G(f) = \frac{5}{3}f\left(3 - \frac{3}{5}\sqrt{15}\right) + \frac{8}{3}f(3) + \frac{5}{3}f\left(3 + \frac{3}{5}\sqrt{15}\right) \tag{4}$$

Conformément au théorème 3, $R_H = L_1 - L_2$ où L_1 et L_2 sont des fonctionnelles P_5-simples sur $C[0, 6]$; on trouve

$$L_1(f) = \int_0^6 f(x)\mathrm{d}x - G(f), \quad L_2(f) = H(f) - G(f)$$

$$L_1(p_6) = 17496/175, \quad L_2(p_6) = 2268/25$$

Donc, quelle que soit $f \in C[0, 6]$ il existe $s_1, \ldots, s_7$ distincts dans $[0, 6]$ et $t_1, \ldots, t_7$ distincts dans $[0, 6]$ tels que

$$R_H(f) = \frac{17496}{175}[s_1, \ldots, s_7; f] - \frac{2268}{25}[t_1, \ldots, t_7; f] \tag{5}$$

Si $f \in C^6[0, 6]$, alors il existe $s, t \in (0, 6)$ tels que

$$R_H(f) = \frac{243}{1750}f^{(6)}(s) - \frac{63}{500}f^{(6)}(t) \tag{6}$$

Si $f \in C^8[0, 6]$ on sait ([8]) que

$$R_H(f) = \frac{9}{700}\left(f^{(6)}(a) - \frac{1}{2} f^{(8)}(b)\right), \quad a, b \in (0, 6). \tag{7}$$

T. POPOVICIU ([5]) a obtenu pour $f \in C^8[0, 6]$:

$$R_H(f) = \frac{9}{700}\left(f^{(6)}(c) - \frac{35}{72} f^{(8)}(d)\right), \quad c, d \in (0, 6) \tag{8}$$

En appliquant les résultats de G. ALLASIA et M. ALLASIA [1] on obtient, pour $f \in C^6[0, 6]$:

$$R_H(f) = \frac{1944}{35} f^{(6)}(t) - \frac{5553}{100} f^{(6)}(t')\ ;, \quad t, t' \in (0, 6) \tag{9}$$

c). Considérons maintenant la formule de quadrature de Weddle

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = W(f) + R_w(f)$$

où $\quad W(f) = 0{,}3[f(0) + f(2) + f(4) + f(6)] + 1{,}5[f(1) + f(5)] + 1{,}8f(3).$

La fonctionnelle R_w, définie sur $C[0, 6]$, est P_5-exacte mais n'est pas P_5-simple ([5]). Conformément au théorème 3, $R_w = L_1 - L_2$ où les fonctionnelles P_5-simples L_1 et L_2 sont données par

$$L_1(f) = \int_0^6 f(x)\mathrm{d}x - G(f), \quad L_2(f) = W(f) - G(f)$$

Puis $L_1(p_6) = 17496/175$, $L_2(p_6) = 2628/25$.

Donc, quelle que soit $f \in C[0, 6]$ il existe $s_1, \ldots, s_7$ distincts dans $[0,6]$ et $t_1, \ldots, t_7$ distincts dans $[0, 6]$ tels que

$$R_w(f) = \frac{17496}{175}[s_1, \ldots, s_7; f] - \frac{2628}{25}[t_1, \ldots, t_7; f] \tag{10}$$

Si $f \in C^6[0, 6]$, alors il existe s, $t \in (0, 6)$ tels que

$$R_w(f) = \frac{243}{1750} f^{(6)}(s) - \frac{73}{500} f^{(6)}(t) \tag{11}$$

Si $f \in C^8[0, 6]$ on sait ([8]) que

$$R_w(f) = -\frac{1}{140}\left(f^{(6)}(a) + \frac{9}{10} f^{(8)}(b)\right), \quad a, b \in (0, 6). \tag{12}$$

T. POPOVICIU ([5]) a obtenu pour $f \in C^8[0, 6]$:

$$R_w(f) = -\frac{1}{140}\left(f^{(6)}(c) + \frac{1}{5} f^{(8)}(d)\right), \quad c, d \in (0, 6), \tag{13}$$

et pour $f \in C^{10}[0, 6]$:

$$R_w(f) = -\frac{1}{140}\left(f^{(6)}(r) - \frac{61}{1815} f^{(10)}(s)\right), \quad r, s \in (0, 6). \tag{14}$$

En appliquant les résultats de G. ALLASIA et M. ALLASIA [1] on obtient pour $f \in C^6[0, 6]$:

$$R_w(f) = \frac{1944}{35} f^{(6)}(t) - \frac{3777}{140} f^{(6)}(t'), \quad t, t' \in (0, 6) \tag{15}$$

REFERENCES

[1] Allasia, G., Allasia, M., *Una rappresentazione del resto delle formule di quadratura* Atti Acc. Scienze Torino **110**, 353–358 (1975–76).

[2] Karlin, S., Studden, W., *Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics*, New York 1966.

[3] Micchelli, C. A., *Chebyshev subspaces and convergence of positive linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **40**, 448–452 (1973).

[4] Popoviciu, E., *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj 1972.

[5] Popoviciu, T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica, Cluj, **1** (24) 95–142 (1959).

[6] Rasa, I., *Asupra descompunerii minimale a funcţionalelor cu grad de exactitate dat*, Sem. itinerant de ec. funct. aprox. şi conv., Timişoara 7–8 noiembrie 1980, pp. 155–160.

[7] Sard, A., *Integral representations of remainders*, Duke Math. Journal **15**, 333–345 (1948).

[8] Steffensen, J. F., *Interpolation*, 1927.

Reçu le 10.V.1981.

Institutul Politechnic
Catedra de matematică
Cluj-Napoca