MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 10, N° 2, 1981, pp. 149—154

SUR UN THÉORÈME DE TIBERIU POPOVICIU

par

ADRIAN DADU

(Cluj-Napoca)

Dans le travail [1], TIBERIU POPOVICIU introduit les fonctions

$$\mathfrak{L}_n(x) + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \, \varphi_{p+1, \lambda_\nu}(x) \tag{1}$$

où n est un nombre naturel,

$$\varphi_{p+1, \lambda_\nu}(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda_\nu \\ (x - \lambda_\nu)^p, & x \geqslant \lambda_\nu \end{cases}$$

et $\mathfrak{L}_n$ est un polynôme de degré p, les λ_ν sont des points donnés tel que $a < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < b$ et les c_ν sont des constantes quelconques. Les fonctions de la forme (1) sont appeléès, [1], fonctions élémentaires d'ordre p sur $[a, b]$. Nons avons le théorème suivant, démontré dans le travail [1].

THÉORÈME (TIBERIU POPOVICIU) *Pour $p > 1$, toute fonction $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ et non-concave d'ordre p est indéfiniment et uniformément approximable, sur $[a, b]$ par des fonctions de la forme* (1) *avec des coefficients c_ν non-négatifs.*

Une autre démonstration du théorème, on trouve dans [5].

Dans le présent travail, nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème antérieur, utilisant la propriété suivante:

Une fonction $f_1: [a, b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ est la limite d'une suite uniformément convergente sur $[a, b]$ des fonctions de la forme suivante:

(2)

$$\psi_n(x) = f_1(\lambda_0) + [\lambda_0, \lambda_1; f_1](x - a) + 2h \sum_{\nu=0}^{n-2} [\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; f_1] \cdot \varphi_{2,\lambda_{\nu+1}}(x)$$

où

$$\lambda_\nu = a + \nu h,\ h = \frac{b-a}{n},\ \nu = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Nous désignerons par $[z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}; f]$ la différence divisée d'ordre k de la fonction f sur les $k+1$ noeuds $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$. Le graphe de fonction (2) est la ligne polygonale inscrite dans la courbe $y = f_1(x)$ et dont les sommets sont les points $(\lambda_\nu, f_1(\lambda_\nu))$. [2] On sait, [4], que

$$|f_1(x) - \psi_n(x)| \leqslant 2\ \omega_{f_1}\left(\frac{b-a}{n}\right),\ x \in [a, b],\ n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

et $\omega_{f_1}(\delta)$ est le module de continuité de la fonction f_1.

Ensuite, pour fixer les idées, on va se situer dans l'intervalle $[0, 1]$; le cas général on obtient par une simple substitution.

Soit $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $(p-1)$-fois dérivable sur $[0, 1]$ et $p > 1$, $g^{(p-1)}$ est continue sur $[0, 1]$. Soit

$$T_{p-1}(g, x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) \tag{5}$$

le polynôme de Taylor, attaché à la fonction g. Nous avons.

LEMME

$$g(x) = T_{p-1}(g, x) + \frac{1}{p!}[\lambda_0, \lambda_1; g^{(p-1)}] \cdot x^p +$$
$$+ \frac{2}{n \cdot p!} \sum_{\nu=0}^{n-2} [\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; g^{(p-1)}] \cdot \varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x) + R_n(g, x)$$

et

$$|R_n(g, x)| \leqslant \frac{2}{p-1}\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbf{N}$$

quelque soit $x \in [0, 1]$ et les λ_ν étant les noeuds (3) pour l'intervalle $[0, 1]$.

Démonstration.

On sait que

$$g(x) = T_{p-1}(g, x) + \frac{1}{(p-2)!}\int_0^1 (x-t)_+^{p-2}(g^{(p-1)}(t) - g^{(p-1)}(0))dt, \tag{6}$$

quelque soit $x \in [0, 1]$ et $(x-t)_+^{p-2} = \varphi_{p-1,t}(x)$.

En mettant $f_1 = g^{(p-1)}$ dans la formule (2) et tenant compte de la délimitation (4) nous avons

$$\left| g^{(p-1)}(t) - g^{(p-1)}(0) - [\lambda_0, \lambda_1; g^{(p-1)}] \cdot t - \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; g^{(p-1)}] \times \right.$$
$$\left. \times\ \varphi_{2, \lambda_{\nu+1}}(t) \right| \leqslant 2\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right),\ t \in [0, 1],\ n \in \mathbf{N}$$

Donc

$$g^{(p-1)}(t) - g^{(p-1)}(0) = [\lambda_0, \lambda_1; g^{(p-1)}] \cdot t +$$
$$+ \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; g^{(p-1)}] \cdot \varphi_{2, \lambda_{\nu+1}}(t) + \varepsilon_n(g, t)$$

avec

$$|\varepsilon_n(g, t)| \leqslant 2\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right),\ t \in [0, 1],\ n \in \mathbf{N}.$$

Donc nous avons

$$\int_0^1 (x-t)_+^{p-2}(g^{(p-1)}(t) - g^{(p-1)}(0))\,dt = [\lambda_0, \lambda_1; g^{(p-1)}] \cdot \int_0^1 (x-t)_+^{p-2} \cdot t\,\mathrm{dt} +$$
$$+ \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; g^{(p-1)}] \cdot \int_0^1 (x-t)_+^{p-2}\varphi_{2, \lambda_{\nu+1}}(t)\,dt +$$
$$+ \int_0^1 (x-t)_+^{p-2}\varepsilon_n(g, t)\,dt = \frac{1}{p(p-1)}[\lambda_0, \lambda_1; g^{(p-1)}] \cdot x^p +$$
$$+ \frac{2}{n \cdot p(p-1)}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; g^{(p-1)}] \cdot \varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x) +$$
$$+ \int_0^1 (x-t)_+^{p-2}\varepsilon_n(g, t)\,dt.$$

En introduisant ce dernier résultat dans la formule (6), on obtient

$$g(x) = T_{p-1}(g, x) + \frac{1}{p!}[\lambda_0, \lambda_1; g^{(p-1)}] \cdot x^p +$$
$$+ \frac{2}{n \cdot p!}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}; g^{(p-1)}] \cdot \varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x) + R_n(g, x)$$

où

$$R_n(g, x) = \int_0^1 (x-t)_+^{p-2}\varepsilon_n(g, t)\,dt$$

et

$$|R_n(g, x)| = \left|\int_0^1 (x-t)_+^{p-2}\varepsilon_n(g, t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 (x-t)_+^{p-2}|\varepsilon_n(g, t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\int_0^1 (x-t)_+^{p-2}\,dt = 2\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^x (x-t)^{p-2}\,dt =$$

$$= 2\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{x^{p-1}}{p-1} \leqslant 2\omega_{g^{(p-1)}}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{p-1}.$$

Q.E.D.

Pour démontrer le théorème de TIBERIU POPOVICIU énoncé tout au début, on utilise la lemme ci-dessus, où, au lieu de g on met le polynôme de S. N. Bernstein.

$$B_m(f, x) = \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k},$$

avec $m \geqslant p + 1$ et on obient

(7) $$B_m(f, x) = T_{p-1}(B_m(f, \cdot), x) + \frac{1}{p!}[\lambda_0, \lambda_1;\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\cdot x^p +$$
$$+ \frac{2}{n\cdot p!}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2};\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x) + R_n(B_m(f, \cdot), x)$$

et

(8) $$|R_n(B_m(f, \cdot), x)| \leqslant \frac{2}{p-1}\omega_{B_m^{(p-1)}(f, \cdot)}\left(\frac{1}{n}\right),\quad x \in [0, 1],\ n \in \mathbf{N}.$$

Posons

$$\psi_{m,n}(x) = T_{p-1}(B_m(f, \cdot), x) + \frac{1}{p!}[\lambda_0, \lambda_1;\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\cdot x^p +$$
$$+ \frac{2}{n\cdot p!}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2};\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\,\varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x).$$

Mais

$$T_{p-1}(B_m(f, \cdot), x) = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}B_m^{(k)}(f, 0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; f]\cdot x^k.$$

Donc

(9) $$\psi_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; f]\, x^k +$$
$$+ \frac{1}{p!}[\lambda_0, \lambda_1;\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\, x^p + \frac{2}{n\cdot p!}\sum_{\nu=0}^{n-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2};\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\times$$
$$\times\ \varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x).$$

En ce qui suit on va démontrer que la fonction f est uniformément approximable sur [0, 1], par la fonction $\psi_{m,n}$.

Conformément a (7), (8), (9) on aura

$$|B_m(f, x) - \psi_{m,n}(x)| \leqslant \frac{2}{p-1}\,\omega_{B_m^{(p-1)}(f, \cdot)}\left(\frac{1}{n}\right),\quad x \in [0, 1]$$

et

$$|f(x) - \psi_{m,n}(x)| \leqslant |f(x) - B_m(f, x)| + |B_m(f, x) - \psi_{m,n}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \frac{2}{p-1}\,\omega_{B_m^{(p-1)}(f, \cdot)}\left(\frac{1}{n}\right),\quad x \in [0, 1].$$

Donc, en choisissant tout d'abord m très grand, ainsi que $\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$ soit petit, et ensuite choisir n aussi très grand, de sorte que $\omega_{B_m^{(p-1)}(f, \cdot)}\left(\frac{1}{n}\right)$ soit petit, on voit que toute fonction f continue sur [0, 1] est indéfiniment et uniformément approximable sur [0, 1].

Maintenant, la propriété de la fonction f d'être non-concave d'ordre p sur [0, 1] implique $B_m^{(p+1)}(f, x) \geqslant 0$, quelque soit $x \in [0, 1]$, d'où résulte que $B_m^{(p-1)}(f, \cdot)$ est non-concave d'ordre 1 sur [0, 1]: donc, par la définition de non-concavité d'ordre 1, résulte que $[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2};\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)] \geqslant 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-2$.

REMARQUE. Si $f \in C^{p-1}_{[0,1]}$, alors $\lim\limits_{m\to\infty} B_m^{(p-1)}(f, x) = f^{(p-1)}(x)$, uniformément sur [0, 1], ([3]). En ces conditions on prend dans la formule (9) $m = n$ et on obtient

$$\psi_m(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; f]\, x^k +$$
$$+ \frac{1}{p!}[\lambda_0, \lambda_1;\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\, x^p + \frac{2}{m\cdot p!}\sum_{\nu=0}^{m-2}[\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2};\ B_m^{(p-1)}(f, \cdot)]\times$$
$$\times\ \varphi_{p+1, \lambda_{\nu+1}}(x)$$

et

$$|f(x) - \psi_m(x)| \leqslant \frac{3}{2}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \frac{2}{p-1}\,\omega_{B_m^{(p-1)}(f, \cdot)}\left(\frac{1}{m}\right),\quad x \in [0, 1].$$

Mais f, $B_m^{(p-1)}(f, \cdot)$ sont continues sur [0, 1], donc uniforme continues, alors

$$\lim_{m\to\infty}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{m\to\infty}\omega_{B_m^{(p-1)}(f, \cdot)}\left(\frac{1}{m}\right) = 0.$$

Donc (ψ_m) converge uniformément vers f sur [0, 1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Popoviciu, Tiberiu, *Notes sur les functions convexex d'ordre superieur* (IX), BULL. MATH. de la SOC. ROUMAINE des SCI., **43**, Nr. 1–2, 85–141 (1941).
[2] Popoviciu, Tiberiu, *Sur une généralisation des fonctions „Spline"*, Mathematical Structures-Computational mathematics-Mathematical Modelling, (Sofia), 405–410, (1975).
[3] Popoviciu, Tiberiu, *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame*, Cluj 1937.
[4] Popoviciu, Elena, *Analiză matematică*, Curs litografiat, 1974.
[5] Roulier, J., Bojanic, R., *Approximation of convex functions by convex splines and convexity, preserving continous linear operators*, Revue d'analyse numerique et de la Theorie de l'approximation, **3** (2), 143–150 (1974).

Reçu le 2.VI.1981.

Universitatea Babeș-Bolyai
Facultatea de matematică
Str. Kogălniceanu nr. 1
Cluj-Napoca