MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 10, N° 2, 1981, pp. 155—178

UNE NOTION DE CONVEXITÉ POUR LES FONCTIONS OPÉRATORIELLES

par
A. TIDJANE DIALLO
(Cluj-Napoca)

0. Introduction

Soit f une fonction réelle définie et continue dans l'intervalle $[0, 1]$. Désignons par

$$(1) \qquad B_m(f)(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k(1-t)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

le polynôme de S. N. Bernstein de degré m correspondant à cette fonction et à l'intervalle $[0, 1]$

Il est bien connu que si f est continue dans $[0, 1]$, la suite $(B_m(f))_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f.

Dans l'article [1], OLEG ARAMĂ a montré que si $f \in C[0, 1]$ est non-concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$, alors la suite $(B_m(f))_{m=1}^{\infty}$ des polynômes de S. N. Bernstein est non-croissante. La réciproque de ce théorème a été établie dans la note [10] par ELENA POPOVICIU

Par conséquent le résultat suivant a lieu

THEOREME A: *Une fonction $f \in C[0, 1]$ est non-concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$ si et seulement si la suite $(B_m(f))_{m=1}^{\infty}$ des polynômes de S. N. Bernstein est non-croissante.*

Soit X un espace de Banach réel doté d'un cône K et d'une relation d'ordre partiel définie à l'aide de ce cône. Désignons par $L(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéraires et continus $U : X \to X$. Désignons par E un sous-ensemble de E et par $t \to T(t)$ une fonction opératiorielle définie sur E, à valeurs dans $L(X)$.

Le but du présent travail est d'introduire une notion de non-concavité d'ordre 1 pour les fonctions opératorielles $T(t)$ fortement continues sur

[0, 1] en partant de la caractérisation fournie par le théorème A; ensuite, en généralisant la notion de différence divisée, de définir la notion de fonction opératorielle $T(t)$ non-concave d'ordre n sur un sous-ensemble $E \subset R$; enfin, d'étendre certains résultats dus à TIBERIU POPOVICIU [13] à l'approximation des fonctions opératorielles non-concaves d'ordre n sur un intervalle $[a, b]$.

1. Preliminaires

Nous employerons la terminologie ci-aprés exposée dans le livre [9].

Dans tout ce qui suit X désignera un espace de Banach réel.

DEFINITION 1.1. *Un sous — ensemble $K \subset X$ est appelé cône si les conditions suivantes sont remplies :*

a) *K est un sous-ensemble fermé de X*

b) *Pour tous $x, y \in K$ et pour tous nombres réels non negatifs α et β, l'élément $\alpha x + \beta y \in K$.*

c) *Si x et $-x$ appartiennent à K, alors $x = \theta$ où θ est l'élément nul de l'espace X.*

$K \subset X$ est appelé clin si les conditions a) *et* b) *sont remplies.* Remarquons que K est un sous-ensemble convexe et fermé contenant l'élément θ

DEFINITION 1.2. *Un cône $K \subset X$ est dit* générateur si *pour tout $x \in X$, il existe $u, v \in K$ tels que $x = u - v$.*

DEFINITION 1.3. *Soit $K \subset X$ un cône et x, y deux éléments de X. On dit que $x \underset{k}{\leqslant} y$ si $y - x \in K$.*

Avec cette relation d'ordre partiel, X devient un espace ordonné. On dit qu'un élément z est le suprémum d'un couple d'éléments $x, y \in X$ si $x \underset{k}{\leqslant} z$, $y \underset{k}{\leqslant} z$ et si des inégalités $x \underset{k}{\leqslant} z_1$, $y \underset{k}{\leqslant} z_1$ il résulte que $z \underset{k}{\leqslant} z_1$.

On définit de facon analogue l'infimum d'un couple d'éléments.

DEFINITION 1.4. *Un cône $K \subset X$ est dit miniédral si tout couple d'éléments x, y de X possède un suprémum*

Remarquons si un couple d'éléments $x, y \in X$ possède un sup (x, y) alors il possède aussi un inf (x, y).

Si le cône K est miniédral, alors toute famille finie $x_1, x_2, \ldots, x_m$ d'éléments de X possède un $\sup(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et un $\inf(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

DEFINITION 1.5. *Un cône $K \subset X$ est dit normal s'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in K$ vérifiant la condition $||x|| = ||y|| = 1$, ait lieu la relation $||x + y|| \geqslant \delta$.*

DEFINITION 1.6. *Une fonctionnelle linéaire $f: X \to R$ est dite positive par rapport au cône $K \subset X$ si :*

$$\forall x \in K \Rightarrow f(x) \geqslant 0$$

DEFINITION 1.7. *Un opérateur linéaire $U: X \to X$ est dit positif par rapport au cône $K \subset X$ si :*

$$\forall x \in K \Rightarrow Ux \in K$$

Au cours de ce travail nous nous servirons souvent des deux résultats suivants :

LEMA 1.1. [3] *Si $f: X \to R$ est une fonctionnelle linéaire et positive par rapport à un cône générateur $K \subset X$, alors elle est continue.*

Considérons un sous-ensemble $K \subset X$ satisfaisant aux conditions b) et c) de la définition 1.1.

LEMA 1.2. [8] *Pour que l'ensemble K soit fermé il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : si $x_0 \in X$ et $f(x_0) \geqslant 0$ pour toute fonctionnelle linéaire, positive et continue f, alors $x_0 \in X$.*

Démonstration.

La condition est nécessaire. Soit $x_0 \notin K = \bar{K}$. En vertu du théorème de MAZUR [14], il existe une fonctionnelle linéaire réelle continue g_0 définie sur l'espace X tout entier telle que $g_0(x_0) > 1$ et $g_0(x) \leqslant 1$ sur K. K étant un cône, de $x \in K$ il résulte que $nx \in K$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par suite $g_0(nx) = ng_0(x) \leqslant 1$. Par conséquent $g_0(x) \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc $g_0(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in K$.

Notons par $f_0 = -g_0$. La fonctionnelle linéaire réelle et continue f_0 satisfait aux conditions suivantes :

$$f_0(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in K$$
$$f_0(x_0) < -1$$

La condition est suffisante. Si la condition du lemme est remplie, alors $K = \bigcap\{x : f(x) \geqslant 0\}$ où l'intersection est prise par rapport à toutes les fonctionnelles lineaires, positives et continues f.

Nous noterons par X' l'espace des fonctionnelles linéaires et continues $f: X \to R$ et par K^* le clin des fonctionnelles linéaires et positives par rapport au cône K.

2. Propriété de Non-Convavité d'ordre 1 pour les fonctions opératorielles

Dans tout ce qui suit, X désignera un espace de Banach réel doté d'un cône générateur $K \subset X$ et de la relation d'ordre partiel engendrée par ce cône, $L(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires et continus $U: X \to X$.

Considérons les deux fonctions opératorielles

$$T_1: [0, 1] \to X, \quad T_2: [0, 1] \to L(X)$$

DEFINITION 2.1. *On dit que* $T_1 \leqslant T_2$ *si pour tout* $t \in [0, 1]$ *et tout* $x \in K$, *est remplie la condition*

$$T_2(t)x - T_1(t)x \in X.$$

Cette relation este une relation d'ordre partiel dans l'espace vectoriel réel $F\{[0, 1], L(X)\}$ des fonctions opératorielles définies sur $[0, 1]$.

Soit $T : [0, 1] \to L(X)$ une fonction opératorielle continue dans l'intervalle $[0, 1]$ dans la topologie opératorielle forte.

P. L. BUTZER et H. BERENS ont défini dans l'ouvrage [6] l'analogue du polynôme de S. N. Bernstein de degré m par

$$t \in [0, 1], \; x \in X$$

$$B_m(T)(t)x = \left\{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}\, T\left(\frac{k}{m}\right)\right\} x \tag{2}$$

Ils ont démontré aussi que pour tout $x \in X$

$$\lim_{m\to\infty} \|B_m(T)(t)x - T(t)x\| = 0,$$

la convergence étant uniforme par rapport à $t \in [0, 1]$.

Tenant compte du théorème A, nous pouvons introduire :

DEFINITION 2.2. *Une fonction opératorielle* $T : [0, 1] \to L(X)$ *continue sur* $[0,1]$ *dans la topologie opératorielle forte est dite nonconcave d'ordre* 1 *sur* $[0, 1]$ *si la suite* $(B_m(T))_{m=1}^{\infty}$ *est non-croissante c'est-à-dire quel que soit* $m \in \mathbf{N}$, *quel que soit* $t \in [0, 1]$ *et quel que soit* $x \in X$, *la relation suivante este satisfaite :*

$$B_m(T)(t)x - B_{m+1}(T)(t)\, x \in K \tag{3}$$

THEOREME 2.1. *Soit* $T : [0, 1] \to L(X)$ *une fonction opératorielle continue sur l'intervalle* $[0, 1]$ *dans la topologie opératorielle forte.*

Alors $T(t)$ *est non-concave d'ordre* 1 *sur* $[0, 1]$ *si et seulement si quelle que soit* $f \in K^*$ *et quel que soit* $x \in K$, *la fonction réelle* $f(T(t)x)$ *est non-concave d'ordre* 1 *sur* $[0, 1]$.

Démonstration. Remarquons que si $x \in X$ et $t \in [0, 1]$ alors pour toute $f \in X'$

$$f(B_m(T)(t)\, x) = f\left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}\, T\left(\frac{k}{m}\right) x\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} f\left(T\left(\frac{k}{m}\right) x\right) = B_m[f(T(\cdot)x)](t)$$

C'est-à-dire

$$f(B_m(T)(t)x) = B_m[f(T(\cdot)x)](t) \tag{4}$$

Nécessité de la condition du théorème. Soit $x \in K$, $t \in [0, 1] \cdot T(t)$ étant non-concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$ nous avons

$$\forall m \in \mathbf{N} \quad B_m(T)(t)x - B_{m+1}(T)(t)x \in K$$

c'est pourquoi pour toute $f \in K^*$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$

$$f[B_m(T)(t)x - B_{m+1}(T)(t)x] \geqslant 0 \tag{5}$$

De (4), il découle que pour tout $m \in N$

$$B_m[f(T(\cdot)x)](t) - B_{m+1}[f(T(\cdot)x)](t) \geqslant 0$$

Ce qui signifie que la suite $\{B_m f(T(\cdot)x)\}_{m=1}^{\infty}$ des polynômes de S. N. Bernstein est non-croissante. Comme la fonctionnelle $f \in K^*$ est continue sur X (lemme 1.1.) et la fonction opératorielle $T(t)$ est continue sur $[0, 1]$ dans la topologie opératorielle forte, la fonction réelle $f(T(t)x)$ est continue par rapport à $t \in [0, 1]$.

En vertu du théorème A, $f(T(t)x)$ est non-concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$.

Suffisance de la condition du théorème. Pour $x \in K$ et $f \in K^*$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ continue sur $[0, 1]$ est non-concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$. En vertu du théorème A la suite $\{B_m[f(T(\cdot)x)]\}_{m=1}^{\infty}$ est non-croissante.

De la relation (4), il résulte que

$$\forall f \in K^*, \; \forall m \in N, \; f[B_m(T)(t)x - B_m(T)(t)x] \geqslant 0$$

Comme le cône K est fermé, il découle du lemme 1.2. que

$$B_m(T)(t)x - B_{m+1}(T)(t)x \in K$$

$x \in K$ et $t \in [0, 1]$ étant quelconques, $T(t)$ est non — concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$ selon la définition 2.2.

Soit $T(t)$ une fonction opératorielle définie et fortement continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors pour toute $f \in X'$ et pour tout $x \in X$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ est continue sur $[0, 1]$. Selon un résultat de OLEG ARAMĂ [1], il existe trois points distincts t_1, t_2, t_3 (dépendant de $T(t)$, f et x) tels que la relation suivante ait lieu :

$$f(T(t)x) - B_m(f(T(\cdot)x))(t) = -\frac{t(1-t)}{m}[t_1, t_2, t_3 ; f(T(\cdot)x]$$

De (4), il découle

$$f[T(t)x - B_m(T)(t)x] = -\frac{t(1-t)}{m}[t_1, t_2, t_3 ; f(T(\cdot)x)] \tag{6}$$

Désignons par $L_2(0, \infty)$ l'espace de Hilbert réel de toutes les fonctions réelles définies sur $[0, \infty)$ et de carré sommable dans cet intervalle.

Si y est un élément fixé de $L_2(0, \infty)$, alors $f(x) = \int_0^\infty x(s)y(s)ds$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $L_2(0, \infty)$. Considérons $\{T(t)\ t \in [0, \infty)\}$ le semi-groupe des translations sur $L_2(0, \infty)$.

$$(T(t)x)(s) = x(t + s).$$

Ce semi — groupe est de classe C_0.

Supposons que $t \in [0, 1]$. Alors il existe trois points distincts $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ tels que

$$\int_0^\infty \left[x(t+s) - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} x\left(\frac{k}{m} + s\right)\right] y(s)ds = \tag{7}$$

$$= -\frac{t(1-t)}{m}\left[t_1, t_2, t_3;\ \int_0^\infty x(\cdot + s)\, y(s) ds\right]$$

3. Propriété de Non-Concavité d'ordre n pour les fonctions opératorielles

Dans ce paragraphe X désignera un espace de Banach réel, $L(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires et continus $U: X \to X$, E un sous — ensemble de l'axe réel R, $t \to T(t)$ une fonction opératorielle definie sur E, à valeurs dans $L(X)$.

Supposons que l'ensemble E contienne au moins n + 1 points distincts. Soit $x \in X$.

DEFINITION 3.1. *On appelle différence divisée généralisée d'ordre* n *attachée au point* $x \in X$, *de la fonction opératorielle* $T(t)$ *pour les points distincts* $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in E$, *l'expression définie par les relations*

$$[t_1;\ T(\cdot)x] = T(t_1)x \tag{8}$$

$$[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1};\ T(\cdot)\, x] = \frac{[t_2, t_3, \ldots, t_{n+1};\ T(\cdot)x] - [t_1, t_2, \ldots, t_n;\ T(\cdot)x]}{t_{n+1} - t_1}$$

Désignons par $\mathfrak{D}_{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}}$ l'espaces vectoriel réel de toutes les fonctions opératorielles $t \to T(t) \in L(X)$ définies sur les points distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$. Alors les relations (8) definissent un opérateur :

$$A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}}: \mathfrak{D}_{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}} \to X$$

par

$$A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}}(T) = [t_1, t_2, \ldots, t_{n+1};\ T(\cdot)\, x] \in X \tag{9}$$

Montrons par récurrence que $A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}}$ est un opérateur linéaire. Pour $n = 1$, $A_x^{t_1,t_2}(T) = [t_1, t_2;\ T(\cdot)x] = \dfrac{T(t_2)x - T(t_1)x}{t_2 - t_1}$

Soient $T, S \in \mathfrak{D}_{t_1,t_2}$, alors

$$A_x^{t_1,t_2}(T + S) = [t_1, t_2;\ (T + S)(\cdot)\, x)] = \frac{[(T + S)(t_2)]x - [(T + S)(t_1)]x}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{[T(t_2) + S(t_2)]x - [T(t_1) + S(t_1)]x}{t_2 - t_1} = \frac{T(t_2)x - T(t_1) + S(t_2)x - S(t_1)x}{t_2 - t_1} =$$

$$= A_x^{t_1,t_2}(T) + A_x^{t_1,t_2}(S)$$

De façon analogue, on montre que si $\alpha \in R$, $T \in \mathfrak{D}_{t_1,t_2}$, alors

$$A_x^{t_1,t_2}(\alpha T) = \alpha A_x^{t_1,t_2}(T).$$

Supposons que pour $k < n$ les relations suivantes soient justes

$$S, T \in \mathfrak{D}_{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}},\ A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}}(S + T) = A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}}(S) + A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}}(T)$$

$$\alpha \in R \quad A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}}(\alpha T) = \alpha A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}}(T)$$

Montrons que des relations similaires ont lieu pour m = k + 1.

$$S, T \in \mathfrak{D}_{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}},\ A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}}(S + T) = [t_1, t_2, \ldots, t_{k+2};$$

$$(S + T)(\cdot)\, x] = \frac{[t_2, t_3, \ldots, t_{k+2};\ (S + T)(\cdot)x] - [t_1, t_2, \ldots, t_{k+1};\ (S + T)(\cdot)x]}{t_{k+2} - t_1}$$

$$= \frac{[t_2, t_3, \ldots, t_{k+2};\ S(\cdot)\, x] - [t_1, t_2, \ldots, t_{k+1};\ S(\cdot)x]}{t_{k+2} - t_1} +$$

$$+ \frac{[t_2, t_3, \ldots, t_{k+2};\ T(\cdot)\, x] - [t_1, t_2, \ldots, t_{k+1};\ T(\cdot)\, x]}{t_{k+2} - t_1} =$$

$$= [t_1, t_2, \ldots, t_{k+2};\ S(\cdot)x] + [t_1, t_2, \ldots, t_{k+2};\ T(\cdot)x] =$$

$$= A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}}(S) + A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}}(T).$$

De même pour $\alpha \in R$, $T \in \mathfrak{D}_{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}}$, nous avons

$$A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}}(\alpha T) = \alpha A_x^{t_1, t_2, \ldots, t_{k+2}}(T)$$

LEMME 3.1. *Pour toute* $f \in X'$, *nous avons*

$$f\{[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1};\ T(\cdot)x]\} = [t_1, t_2, \ldots, t_{n+1};\ f(T(\cdot)x)] \tag{10}$$

On démontre la lemme 3.1. par récurence sur le nombre des points n + 1 en utilisant les relations (8).

Dans le reste de cet article X désignera un espace de Banach réel doté d'un cône K et de la relation d'ordre partiel déterminée par ce cône. On supposera aussi que E contient au moins $n + 2$ points distincts.

DEFINITION 3.2. *Une fonction opératorielle $t \to T(t)$ définie sur E est dite non — concave d'ordre n sur E si pour tout système de $n + 2$ points distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} \in E$, la condition suivante est remplie :*

$$\forall x \in K \Rightarrow [t_1, t_2, \ldots, t_{n+2};\ T(\cdot)x] \in K \tag{11}$$

PROPOSITION 3.1. *Une fonction opératorielle $t \to T(t)$ définie sur E est non — concave d'ordre n sur E si et seulement si pour toute $f \in K^* \cap X'$ et tout $x \in K$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ est non-concave d'ordre n sur E.*

Démonstration. La nécessité de la condition de l'énoncé résulte de la définition 3.2 et du lemme 3.1. ; sa suffisance des lemmes 3.1. et 1.2.

Tenant compte de ce résultat, le théorème 2.1. peut être énoncé de la façon suivante.

THEOTEME 2.1. *Supposons que le cône $K \subset X$ soit générateur et que $t \to T(t)$ soit une fonction opératorielle définie sur $[0, 1]$ et continue dans cet intervalle dans la topologie opératorielle forte.*

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) $T(t)$ est non-concave d'ordre 1 sur $[0, 1]$ au sens de la définition 3.2.

b) La suite $\{B_m(T)\}_{m=1}^{\infty}$ est non-croissante.

Ce résultat constitue une généralisation du théorème A.

Soit T une fonction opératorielle définie sur les points

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_m \text{ où } m \geqslant n + 2 \tag{12}$$

et soit $x \in X$.

PROPOSITION 3.2. *La différence divisée généralisée $[t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ T(.)x]$, $n \geqslant 1$ où $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1} \leqslant$ m est une moyenne arithmétique généralisée des différences divisées $[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{n+1};\ T(.)x]$, $j = i_1, i_2 + 1, \ldots, i_{n+1} - n$, construites sur tous les systèmes de $n + 1$ points consécutifs de la suite (12).*

Démonstration. Soit $f \in X'$. $f(T(t)x)$ est une fonction réelle de la variable réelle t définie sur les points (12). Du lemme 3.1. et du théorème de la moyenne pour les différences divisées établi par TIBERIU POPOVICIU [12], il découle que :

$$f\{[t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ T(.)x]\} = [t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ f(T(\cdot)x)] =$$

$$= \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j[t_j, t_{j+1}, \ldots, r_{j+n};\ f(T(\cdot)x)]$$ où les nombres A_j sont indépendants de $f(T(t)x)$ et satisfont aux conditions :

$$A_j \geqslant 0 \quad j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_{n+1} - n, \quad \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j = 1$$

De nouveau, du lemme 3.1. il résulte que

$$f\{[t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ T(\cdot)x]\} = \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j f\{[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x]\} =$$

$$= f\left\{\sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x]\right\}$$

Par suite, pour toute $f \in X'$ nous avons

$$f\left\{[t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ T(\cdot)x] - \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x]\right\} = 0 \tag{13}$$

En vertu d'un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il résulte de (13) que :

$$[t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ T(\cdot)x] - \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x] = \theta$$

La proposition 3.2. est ainsi démontrée.

Soit T une fonction opératorielle définie sur les points (12). Supposons que $m \geqslant n + 3$.

COROLLAIRE 3.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction T soit non-concave d'ordre $n \geqslant 0$ sur l'ensemble E_m des points (12) est qu'elle soit non-concave d'ordre n sur tous les systemes de $n + 2$ points consécutifs de l'ensemble E_m.*

COROLLAIRE 3.2. *Soit T une fonction opératorielle définie sur les points*

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_m \text{ où } m \geqslant n+2,\ n \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1} \leqslant m.$$

Si le cône $K \subset X$ est miniédral, alors pour tout $x \in X$, nous avons :

$$\inf_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_{n+1}-n} [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x] \underset{K}{\leqslant} [t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_{n+1}};\ T(\cdot)x] \underset{K}{\leqslant}$$

$$\underset{K}{\leqslant} \sup_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_{n+1}-n} [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x] \tag{14}$$

Démonstration. Le cône K étant miniédral,

$$G = \inf_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_{n+1}-n} [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x]$$ et

$$D = \sup_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_{n+1}-n} [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n};\ T(\cdot)x($$ existent et selon leur défi-

nition $G \underset{K}{\leqslant} [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n}; T(\cdot)x] \leqslant D$. Les nombres A_j étant $\geqslant 0$

$$\sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j G \underset{K}{\leqslant} \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n}; T(\cdot)x] \underset{K}{\leqslant}$$

$$\underset{K}{\leqslant} \sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j D$$

Puisque $\sum_{j=i_1}^{i_{n+1}-n} A_j = 1$, les rélations (14) découlent de la proposition 3.2.

Dans tout ce qui suit M désignera un sous-ensemble non vide de X. Généralisons la définition 3.2. de la manière suivante :

DEFINITION 3.3. *Une fonction opératorielle $t \to T(t)$ définie sur l'ensemble E est dite (M, K) — non-concave d'ordre n sur E si pour tout systéme de $n+2$ points distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} \in E$, la condition suivante este remplie :*

(15) $$\forall x \in M \Rightarrow [t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}; T(.)x] \in K$$

PROPOSITION 3.3. *Une fonction opératorielle $t \to T(t)$ définie sur E est (M, K) — non-concave d'ordre n sur E si et seulement si pour toute $f \in K^* \cap X'$ et tout $x \in M$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ est non-concave d'ordre n sur E.*

Cette affirmation se démontre de la même façon que la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.4. *Soient $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ une suite de fonctions operatorielles définies sur E et (M, K) — non-concaves d'ordre n sur E et $T: E \to L(X)$ une fonction opératorielle telle que pour tout $x \in M$ et tout $t \in E$ on ait :*

(16) $$\lim_{m \to \infty} ||T_m(t)x - T(t)x|| = 0$$

alors $T(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur E.

Démonstration. Soient $x \in M$ et $f \in K^* \cap X'$. De (16) il découle que $\forall t \in E$, $|f(T_m(t)x) - f(T(t)x)| = |f[T_m(t)x - T(t)x]| \leqslant ||f||\, ||T_m(t)x - T(t)x|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est pourquoi $\{fT_m(t)x)\}_{m=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions réelles non-concaves d'ordre n sur E qui converge ponctuellement vers une fonction réelle $f(T(t)x)$. Donc $f(T(t)x)$ est non-concave d'ordre n sur E. $x \in M$ et $f \in K^* \cap X'$ étant arbitraires, de la proposition 3.3., il découle que $T(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur E.

Désignons par $F([a, b], L(X))$ l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions opératorielles définies sur $[a, b]$ et muni de la topologie opératorielle forte. Alors l'ensemble de toutes les fonctions opératorielles (M, K)— — non-concaves d'ordre n sur $[a, b]$ forme un clin.

PROPOSITION 3.5. *Soit $T: E \to L(X)$ une fonction opératorielle (M,K)— — non-concave d'ordre n sur E. Alors les affirmations suivantes sont justes :*

(i) *$T(t)$ est $(M+M, K)$ — non-concave d'ordre n sur E.*

(ii) *Pour tout λ réel $\geqslant 0$, $T(t)$ est $(\lambda M, K)$ — non-concave d'ordre n sur E.*

(iii) *$T(t)$ est $(\overline{M}, K)$ — non-concave d'ordre n sur E où $\overline{M}$ est la fermeture de M.*

Démonstration (i) et (ii) découlent de la linéarité de $T(t)$.

(iii) Soit $x \in \overline{M}$. Il existe une suite $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m \in M$ telle que $\lim_{m\to\infty} ||x_m - x|| = 0$. Soit $f \in K^* \cap X'$. Considérons les fonctions réelles $g_m(t) = f(T(t)x_m)$ et $g(t) = f(T(t)x)$. Comme $T(t)$ est un opérateur linéaire et continu, nous avons :

$$|g_m(t) - g(t)| = |f(T(t)x_m) - f(T(t)x)| = |f(T(t)x_m - T(t)x)| =$$
$$= |f[T(t)(x_m - x)]| \leqslant ||f||\, ||T(t)||\, ||x_m - x||_{m\to\infty} \to 0$$

Par conséquent la suite $(g_m(t))_{m=1}^{\infty}$ des fonctions réelles non-concaves d'ordre n sur E converge ponctuellement vers la fonction réelle $g(t)$. Donc $g(t)$ est non-concave d'ordre n sur E. De la proposition 3.3., il résulte (iii).

COROLLAIRE 3.3. *Désignons par C le clin engendré par M. Si $T(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur E, alors $T(t)$ est (C, K) — non-concave d'ordre n sur E.*

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de R.

DÉFINITION 3.4. *On dit qu'une fonction opératorielle $T: [a, b] \to L(X)$ est à différence divisée d'ordre n bornée sur $[a, b]$, relativement à M, si*

(17) $$\forall x \in M, \sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \\ \text{distincts} \in [a,b]}} ||[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; T(\cdot)x]|| < +\infty$$

Pour $n = 0$, nous avons

$$\forall x \in M\ \exists L_x > 0 \text{ tel que } ||T(t)x|| \leqslant L_x\ \forall t \in [a, b]$$

Pour $n = 1$, nous avons

$$\forall x \in M\ \exists L'_x < 0 \text{ tel que } ||T(t_2)x - T(t_1)x|| \leqslant L'_x|t_2 - t_1|$$
$$\forall t_1, t_2 \in [a, b] \text{ et } t_1 \neq t_2.$$

Par suite pour $x \in M$, la fonction $x(t) = T(t)x$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.

PROPOSITION 3.6. *Une fonction opératorielle $T: [a, b] \to L(X)$ est à différence divisée d'ordre n bornée sur $[a, b]$, relativement à M, si et seulement si pour tout $x \in M$ et toute $f \in X'$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ est à différence divisée d'ordre n bornée sur $[a, b]$*

Démonstration. Nécessité de la condition de l'énoncé. Soient $x \in M$ et $f \in X'$. Rappellons que $[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; T(\cdot)x] \in X$. Nous avons, en vertu du lemme 3.1.

$$|[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; f(T(\cdot)x)]| = |f\{[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; T(\cdot)x]\}| \leqslant$$
$$\leqslant ||f||\, ||[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; T(\cdot)x]|| \leqslant ||f|| \sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \\ \text{distincts} \in [a,b]}} ||[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1};$$
$$T(\cdot)x]|| < +\infty$$

Par conséquent

$$\sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \\ \text{distincts} \in [a, b[}} |[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; f(T(\cdot)x]| < +\infty$$

Suffisance de la condition de l'énoncé, Soit $x \in M$. Si pour toute $f \in X'$.

$$\sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \\ \text{distincts} \in [a, a]}} |[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; f(T(\cdot)x]| < +\infty$$

alors

$$\sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \\ \text{distincts} \in [a, b]}} |f\{[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; T(\cdot)x]\}| < +\infty$$

En vertu du principe de la borne uniforme,

$$\sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \\ \text{distincts} \in [a, b]}} \|[t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}; T(\cdot)x]\| < +\infty$$

Soient $T: [a, b] \to L(X)$ et $T': [a, b] \to L(X)$ deux fonctions opératorielles à différence divisée d'ordre n bornée sur $[a, b]$, relativament à M. Alors $T + T'$ est à différence divisée d'ordre n bornée sur $[a, b]$, relativement à M; pout tout λ réel, λT est à différence divisée d'ordre n, bornée sur $[a, b]$, relativement à M.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_j$; $s_1, s_2, \ldots, s_j$; $t_{j+1} = s_{j+1}$, $t_{j+2} = s_{j+2}, \ldots, t_k = s_k$ $k + j$ points distincts de $[a, b]$ $1 \leqslant j \leqslant k$. Soit 1 une fonction réelle définie sur $[a, b]$. Dans l'articole [12]. TIBERIU POPOVICIU a montré que

$$[t_1, t_2, \ldots, t_k; 1] - [s_1, s_2, \ldots, s_k; 1] =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} (t_i - s_i) [t_1, t_2, \ldots, t_i, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k; 1]$$

Soient $T: [a, b] \to L(X)$ une fonction opératorielle et $x \in X$. Pour toute $f \in X'$ nous avons

$$f\{[t_1, t_2, \ldots, t_k; T(\cdot)x] - [s_1, s_2, \ldots, s_k, T(\cdot)x]\} =$$

$$= [t_1, t_2, \ldots, t_k; f(T(\cdot)x)] - [s_1, s_2, \ldots, s_k; f(T(\cdot)x)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} (t_i - s_i) [t_1, t_2, \ldots, t_i, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k; f(T(\cdot)x)] =$$

$$= f\left\{\sum_{i=1}^{j} (t_i - s_i) [t_1, t_2, \ldots, t_i, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k; T(\cdot)x]\right\}.$$

En vertu d'un corollaire du théorème de Hahn–Banach, des relations précédentes, il résulte que

$$(18) \quad [t_1, t_2, \ldots, t_k; T(\cdot)x] - [s_1, s_2, \ldots, s_k; T(\cdot)x] =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} (t_i - s_i) [t_1, t_2, \ldots, t_i, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k; T(\cdot)x]$$

PROPOSITION 3.7. *Si* $T: [a, b] \to L(X)$ *est une fonction opératorielle à difference divisée d'ordre* n *bornée sur* $[a, b]$, *relativement à* M, *alors elle est à différence divisée d'ordre* $n - 1$ *bornée sur* $[a, b]$, *relativement à* M.

Démonstration. De (18), il découle que pour $x \in M$

$$\|[t_1, t_2, \ldots, t_n; T(\cdot)x]\| \leqslant \|[s_1, s_2, \ldots, s_n; T(\cdot)x]\| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| \, \|[t_1, t_2, \ldots, t_i, s_i, \ldots, s_k; T(\cdot)x]\| \leqslant$$

$$\leqslant \|[s_1, s_2, \ldots, s_n; T(\cdot)x]\| + \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| L_x \leqslant$$

$$\leqslant \|[s_1, s_2, \ldots, s_n; T(\cdot)x]\| + n(b - a)L_x$$

par suite

$$\sup_{\substack{t_1, t_2, \ldots, t_n \\ \text{distincts} \in [a, b]}} \|[t_1, t_2, \ldots, t_n; T(\cdot)x]\| \leqslant \|[s_1, s_2, \ldots, s_n; T(\cdot)x]\| + n(b - a)L_x$$

COROLLAIRE 3.4. *Supposons que* $T: [a, b] \to L(X)$ *soit une fonction opératorielle à différence divisée d'ordre* $n (n \geqslant 1)$ *bornée sur* $[a, b]$, *relativement à* M, *alors*

$$\forall x \in M, \ \forall t_0 \in [a, b] \lim_{t \to t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0$$

En effet pour $x \in M$, la fonction $x(t) = T(t)x$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que le cône* $K \subset X$ *soit normal et que* $T: [a, b] \to L(X)$ *soit une fonction opératorielle* (M, K) — *non-concave d'ordre* n *sur* $[a, b]$ $(n \geqslant 1)$. *Alors*

$$\forall x \in M, \ \forall t_0 \in (a, b) \lim_{t \to t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0$$

Démonstration Soit $t_0 \in (a, b)$. Il existe un intervalle (c, d) tel que

$$t_0 \in (c, d) \subset [c, d] \subset (a, b)$$

Puisque K est normal, pour toute $g \in X'$, il existe f_1 et $f_2 \in K^* \cap X'$ telles que $g = f_1 - f_2$. Soit $x \in M$ quelconque; les fonctions $f_i(T(t)x)$ $i = 1,2$ sont non-concaves d'ordre $n (n \geqslant 1)$ sur $[a, b]$. Selon un résultat établi par TIBERIU POPOVICIU [12], elles sont à différences divisées d'ordre n bornées sur $[c, d] \subset (a, b)$. Par suite $g(T(t)x)$ est à différence divisée bornée sur $[c, d] \subset (a, b)$. En vertu de la proposition 3.6. $T(t)$ est à différence divisée d'ordre n bornée sur $[c, d]$, relativement à M. D'où, selon le corolaire 3.4.,

$$\forall x \in M,\ t_0 \in (c, d) \subset [c, d] \subset (a, b)$$

$$\lim_{t \to t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0$$

t_0 étant arbitraire dans (a, b), la démonstration est terminée. Si $M = \{x\}$, $x(t) = T(t)x$ est une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans l'espace de Banach X. Lorsque $n = 1$, le théorème 3.1. fournit un cas particulier d'un résultat établi par W. W. BRECKNER et G. ORBAN [5] (corollaire 5.2.2 page 82).

COROLLAIRE 3.5. *Supposons que le cône $K \subset X$ soit générateur et normal et que $T : [a, b] \to L(X)$ soit une fonction opératorielle nonconcave d'ordre n sur $[a, b]$ $(n \geqslant 1)$. Alors $T(t)$ est continue dans l'intervalle ouvert (a, b), dans la topologie opératorielle forte.*

Démonstration. Si $x \in X$, il existe $u, v \in K$ tels que $x = u - v$

Soit $t_0 \in (a, b)$. $\|T(t)x - T(t_0)x\| = \|T(t)(u - v) - T(t_0)(u - v)\| = \|T(t)u - T(t_0)u + T(t_0)v - T(t)v\| \leqslant \|T(t)u - T(t_0)u\| + \|T(t)v - T(t_0)v\|$

Selon le théorème 3.1.

$$\lim_{t \to t_0} \|T(t)u - T(t_0)u\| = \lim_{t \to t_0} \|T(t)v - T(t_0)v\| = 0$$

C'est pourquoi $\lim\limits_{t \to t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0$

4. Exemples

4.1. $X = R$ $K = \{a \in R | a \geqslant 0\}$. Une fonction réelle $1(t)$ définie sur E peut être considerée comme une fonction opératorielle $t \in E \to 1(t)$ $I \in L(R)$ oú I est l'opérateur identique sur R.

Pour $x \in R$ $1(t)Ix = 1(t)x$

Selon la définition 3.2., nous obtenons qu'une fonction réelle $1(t)$ définie sur E est non-concave d'ordre n sur E si pour tout $a \geqslant 0$ et pour tout système de $n + 2$ points distincts $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} \in E$

$$[t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}\,;\, 1(\cdot)a] \geqslant 0$$

Il en résulte que $[t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}\,;\, 1] \geqslant 0$. Nous retrouvons la définition donnée par Tiberiu Popoviciu [12] des fonctions réelles d'une variable réelle, non-concaves d'ordre n sur E.

4.2. Soit $U : X \to X$ un opérateur linéaire, positif par rapport au cône $K \subset X$ et continu. Alors le semi-groupe $T(t) = e^{tU}$ $t \in [0, \infty)$ est non-concave de n'importe quel ordre sur $[0, \infty)$.

4.3. Soient C un clin $\subset X$, $U : X \to X$ un opérateur linéaire tel que $UC \subseteq K$, $f : E \to R$ une fonction réelle non-concave d'ordre n sur E. Alors, de la définition 3.3., il découle que $T(t) = f(t)U$ est une fonction

opératorielle (C, K) — non-concave d'ordre n sur E. En effet pour tous $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}$ distincts de E et pour tout $x \in C$,

$$[t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}\,;\, f(\cdot)Ux] = [t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}\,;\, f]Ux \underset{K}{\geqslant} 0$$

Soit $T(t) = \sum\limits_{i=0}^{n+1} t^i A_i$ où $A_i \in L(X)$ $i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$

et A_{n+1} est un opérateur linéaire tel que $A_{n+1}C \subseteq K$. Alors $T(t)$ est (C, K) — non-concave d'ordre n sur E.

4.4. Désignons par $C[0, \infty]$ l'espace des fonctions réelles $x : [0, \infty) \to R$ bornées et uniformément continues sur $[0, \infty)$. Notons par

$$C = \{x \in C[0, \infty] | x \text{ non-concave d'ordre } n \text{ sur } [0, \infty)\}$$

$$K = \{x \in C[0, \infty] | x(s) \geqslant 0 \quad \forall s \in [0, \infty)\}$$

Considérons le semi-goupe des translations :

$$x \in C[0, \infty] \quad (T(t)x)(s) = x(t + s)$$

$T(t)$ est (C, K) — non-concave d'ordre n sur $[0, \infty)$.

4.5. Désignons par N l'ensemble des nombres naturels. Une suite $(L_m)_{m=1}^{\infty}$ d'opérateurs linéaires et continus $L_m : X \to X$ peut être considérée comme une fonction opératorielle définie sur N.

$$\text{Soit } \Delta^n L_m x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} L_{m+k}\, x.$$

De la définition 3.3. appliquée a ce cas, il résulte, compte tenu du corollaire 3.1., qu'une suite $(L_m)_{m=1}^{\infty}$ d'opérateurs linéaires et continus $L_m : X \to X$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur N si

$$\forall m \in N,\ \ \forall x \in M \Rightarrow \Delta^{n+1} L_m x \in K.$$

Si $n = -1$ et M est un clin, nous retrouvons la définition bien connue d'une suite $(L_m)_{m=1}^{\infty}$ d'opérateurs linéaires et continus $L_m : X \to X$ qui appliquent le clin M dans le cône $K : L_m M \subseteq K$ pour tout $m \in N$. Soit $X = C[0,1]$; $M = \{x \in C[0,1]$, x analytique sur $[0,1]$ et $x^{(k)}(s) \geqslant 0$ $k = 2, 3, \ldots\ \forall s \in [0,1]\}$

$$K = \{x \in C[0,1]\ x(s) \geqslant 0\ \forall s \in [0,1]\}$$

Considérons la suite $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ des opérateurs de S. N. Bernstein :

$$B_m : C[0, 1] \to C[0, 1]$$

$$(B_m x)(s) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} s^k (1 - s)^{m-k}\, x\left(\frac{k}{m}\right)$$

Le résultat principal de l'article d' OLEG ARAMĂ et de DUMITRU RIPIANU [2] peut être formulé de la façon suivante :

La suite $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ est (M, K) — non-concave d'ordre 1 sur N.

5. Approximation des fonctions operatorielles non-concaves d'ordre superieur

Dans l'article [13], TIBERIU POPOVICIU a montré que toute fonction $x: [a, b] \to R$ continue et non-concave d'ordre n sur $[a, b]$ est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires d'ordre n, non-concaves d'ordre n sur $[a, b]$. Dans [4] R. BOJANIC et J. ROULIER ont donné une nouvelle démonstration de ce théorème, basée sur les observations suivantes:

(*i*) Si $x \in C[0,1]$ alors $\lim\limits_{m \to \infty} \|B_m(x) - x\| = 0$

(*ii*) Si x est non-concave d'ordre n sur $[0,1]$, alors $B_m(x)$ est aussi non-concave d'ordre n sur $[0,1]$.

(*iii*) Si $x \in C^{n+1}[0,1]$, alors

$$x(t) = x(0) + \frac{t}{1!} x'(0) + \frac{t^2}{2!} x''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!} x^{(n)}(0) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \int_0^t (t - s)^n x^{(n+1)}(s)\, ds.$$

A l'aide d'une méthode similaire, nous allons étendre le résultat mentionné de Tiberiu Popoviciu au cas des fonctions opératorielles $T: [0,1] \to L(X)$ continues sur $[0,1]$, dans la topologie opératorielle forte, et (M, K) — non-concaves d'ordre n sur $[0,1]$.

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons des résultats relatifs à la dérivation et à l'intégration des fonctions de variable réelle à valeurs dans un espace de Banach (cf par exemple [9] pp. 81—94).

Soit $x: [a, b] \to X$. Nous dirons que la fonction $x(t)$ est fortement dérivable en un point $t_0 \in [a, b]$, s'il existe un élément $x'(t_0) \in X$ tel que

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} - x'(t_0) \right\| = 0$$

La fonction $x(t)$ est dite fortement dérivable sur tout l'intervalle $[a, b]$ si sa dérivée forte existe en tout point de cet intervalle.

Considérons la fonction operatorielle $T: [a, b] \to L(X)$.

LEMME 5.1. *Supposons que pour tout $x \in M$, la fonction $T(t)x$ à valeurs dans l'espace de Banach X possède des dérivées fortes sur $[a,b]$ jusqu' à l'ordre $n + 1$, $n \geqslant 0$. Alors pour que $T: [a, b] \to L(X)$ soit (M,K) — non-concave d'ordre n sur $[a, b]$ il faut et il suffit que:*

$$\forall t \in [a, b],\ \forall x \in M \Rightarrow \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} T(t)x \in K$$

Démonstration. Observons que pour toute $f \in K^* \cap X'$ et tout $x \in M$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ possède des dérivées jusqu' à l'ordre $n + 1$ sur

$[a, b]$ et

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(T(t)x) = f\left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} T(t)\, x\right) \tag{19}$$

Nécessité de la condition du lemme. Pour toute $f \in K^* \cap X'$ et tout $x \in M$, la fonction réelle $f(T(t)x)$ est non-concave d'ordre n sur $[a, b]$. Comme $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(T(t)x)$ existe sur $[a, b]$, alors selon un résultat de TIBERIU POPOVICIU [12], $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(T(t)x) \geqslant 0$ $\forall t \in [a, b]$. De (19) et de la proposition 3.1, il découle que

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} T(t)x \in K \qquad \forall t \in [a, b].$$

Suffisance de la condition du lemme. Elle découle de (19) et de la proposition 3.1.

LEMME 5.2. *Supposons que $T: [0,1] \to L(X)$ soit une fonction opératorielle (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$ $(n \geqslant -1)$. Alors le polynôme $t \to B_m(T)(t)$ de S. N. Bernstein défini par*

$$B_m(T)(t)x = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k (1 - t)^{m-k}\, T\left(\frac{k}{m}\right) x$$

est aussi (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$

Démonstration. Pour tout $x \in X$, $B_m(T)(t)x$ posséde des dérivées fortes de tous ordres sur $[0,1]$.

Comme dans [11], on peut montrer que:

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} B_m(T)(t)x = (n + 1)!\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{m}\right) \sum_{k=0}^{m-n-1} \times$$

$$\times \binom{m - n - 1}{k} t^k \cdot (1 - t)^{m-n-1} \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}, \ldots, \frac{k+n+1}{m}; T(\cdot)x\right]$$

Par suite,

$$\forall x \in M \Rightarrow \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} B_m(T)(t)x \in K$$

Du lemme 5.1, il découle que $B_m(T)(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$.

Soit

$$(t - c)_+^0 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [a, c) \\ 1 & \text{si} \quad t \in [c, b] \end{cases}$$

Considérons une partition $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots c_j < c_{j+1} < \ldots \ldots < c_{m-1} < c_m = b$ de l'intervalle $[a, b]$.

DEFINITION 5.1. *Une fonction opératorielle* $\psi_m : [a, b] \to L(X)$ *définie par*

$$x \in X \qquad \psi_m(t)x = Ax + \sum_{i=1}^{m} (t - c_{i-1})_+^0 D_i x$$

où $A, D_i \in L(X)$ $i = 1, \ldots, m$ *est appelée fonction opératorielle élémentaire d'ordre* 0 *sur* $[a, b]$

LEMME 5.3. *Supposons que la fonction opératorielle* : $t \in [a, b] \to T(t) \in L(X)$ *soit continue sur* $[a, b]$, *dans la topologie opératorielle forte, et* (M,K) — *non-décroissante sur* $[a, b]$. *Alors il existe une suite* $(\psi_m(t))_{m=1}^{\infty}$ *de fonctions élémentaires d'ordre* 0 *sur* $[a, b]$, (M, K) — *non-décroissantes sur* $[a, b]$, *qui converge vers* $T(t)$ *dans la topologie opératorielle forte, uniformément par rapport à* $t \in [a, b]$.

Démonstration. Elle suit une construction faite dans [13] pour les fonctions réelles.

Soit $m \in N$, $m \geqslant 1$. Divisions l'intervalle $[a, b]$ par les points

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{m-1} < c_m = b \text{ tels que}$$

$$\max (c_j - c_{j-1}) \leqslant \frac{1}{m} \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

et définissons la fonction opératorielle $\psi_m(t)$ par

$$(20) \qquad x \in X \quad \psi_m(t)x = T(a)x + \sum_{i=1}^{m} (t - c_{i-1})_+^0 [T(c_i)x - T(c_{i-1})x]$$

On vérifie que

$$\psi_m(t)x = \begin{cases} T(a)x + T(c_{j+1})x - T(a)x = T(c_{j+1})x \text{ pour } t \in [c_j, c_{j+1}) \\ \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, m-2 \\ T(a)x + T(b)x - T(a)x = T(b)x \text{ pour } t \in [c_{m-1}, b] \end{cases}$$

$$\text{Soit } \omega\left(\frac{1}{m}; T(\cdot)x\right) = \sup\left\{\|T(t)x - T(s)x\|; a \leqslant t, s \leqslant b, |t - s| \leqslant \frac{1}{m}\right\}$$

$T(t)$ étant uniformément continue sur $[a, b]$,

$$(21) \qquad \|\psi_m(t)x - T(t)x\| \leqslant \omega\left(\frac{1}{m}; T(\cdot)x\right)_{m \to \infty} \to 0$$

Par conséquent, la suite $(\psi_m(t))_{m=1}^{\infty}$ converge vers $T(t)$ dans la topologie opératorielle forte, uniformément par rapport à $t \in [a, b]$.

La fonction $\psi_m(t)$ est (M, K) — non-décroissante sur $[a, b]$. En effet si $t_1, t_2 \in [a, b]$ et $t_2 < t_1$ alors

$$(t_2 - c_{i-1})_+^0 - (t_1 - c_{i-1})_+^0 = \begin{cases} 0, & t_1, t_2 \in [a, c_{i-1}) \\ 1, & t_1 \in [a, c_{i-1}),\ t_2 \in [c_{i-1}, b] \\ 0, & t_1, t_2 \in [c_{i-1}, b] \end{cases}$$

Comme $T(t)$ est (M, K) — non-décroissante sur $[a, b]$ et $c_i > c_{i-1}$, alors

$$\forall x \in M \Rightarrow T(c_i)x - T(c_{i-1})x \in K$$

Par conséquent

$$\forall x \in M,\ \psi_m(t_2)x - \psi_m(t_1)x = \sum_{i=1}^{m} [(t_2 - c_{i-1})_+^0 - (t_1 - c_{i-1})_+^0]\,[T(c_i)x - T(c_{i-1})x] \in K$$

Le lemme est ainsi démontré.

Observation 5.1. Au cours de la démonstration du lemme 5.4, nous avons montré que si $T: [a, b] \to L(X)$ est une fonction opératorielle fortement continue sur $[a, b]$, alors pour la suite des fonctions (20) a lieu la relation (21).

Désignons par

$$(t - c_{i-1})_+^n = \varphi_{n+1, c_{i-1}}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [a, c_{i-1}) \\ (t - c_{i-1})^n & t \in [c_{i-1}, b] \end{cases}$$

et par $T^{(j)}(s)\,x = \left.\dfrac{d^j\, T(t)x}{dt^j}\right|_{t=s}$ lorsque cette dérivée existe.

LEMME 5.4. *Soit* $T: [0,1] \to L(X)$ *une fonction opératorielle telle que pour tout* $x \in X$, *la fonction* $T(t)x$ *possède des dérivées fortes, continues sur* $[0,1]$ *jusqu' à l'ordre* $n + 1$. *Alors pour tout* $m \in N$, *il existe des points* $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_m = 1$ *tels que* $T(t)x$ *puisse être représentée sous la forme* :

$$T(t)x = T(0)x + \frac{t}{1!}T'(0)x + \frac{t^2}{2!}T''(0)x + \ldots + \frac{t}{n!}T^{(n)}(0)x +$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{m}(t - c_{i-1})_+^n [T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x] + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t - s)^{n-1} r_m(s)\, ds$$

où $r_m : [0,1] \to X$ *est une fonction continue par morceaux sur* $[0,1]$, *à valeurs dans* X, *intégrable sur* $[0,1]$ *telle que*

$$\lim_{m \to \infty}\left\|\int_0^t (t - s)^{n-1} r_m(s)\, ds\right\| = 0,$$

uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.

Démonstration. Soit $x \in X$. Puisque la fonction $T(t)x$ pssède des dérivées fortes, continues jusqu' à l'ordre $n + 1$ sur $[0,1]$, la formule de

Taylor a lieu pour $t \in [0,1]$:

$$(22)\quad T(t)x = T(0)x + \frac{t}{1!}T'(0)x + \frac{t^2}{2!}T''(0)x + \ldots + \frac{t^n}{n!}T^{(n)}(0)x + Q_n$$

où

$$Q_n = \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n T^{(n+1)}(s)x\,ds$$

Comme $T^{(n+1)}(s)x$ est continue sur $[0,1]$ et $(t-s)^n$ est une fonction réelle de s continue sur $[0,1]$, nous pouvons transformer Q_n en utilisant la formule d'intégration par parties.

$$Q_n = -\frac{t^n}{n!}T^{(n)}(0)x + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}T^{(n)}(s)x\,ds.$$

Observons que $\int_0^t (t-s)^{n-1}ds = \frac{t^n}{n}$. Par suite,

$$Q_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}[T^{(n)}(s)x - T^{(n)}(0)x]\,ds$$

Pour chaque $x \in X$, la fonction $T^{(n)}(t)x - T^{(n)}(0)x$ est continue sur $[0,1]$. En vertu de l'observation 5.1, pour tout $m \in N$, il existe des points $0 = c_0 < c_1 < c_2 \ldots < c_{m-1} < c_m = 1$ indépendants de x, tels que la fonction

$$\psi_m(t)x = \sum_{i=1}^m (t-c_{i-1})_+^0 + [T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x]$$

vérifie la relation :

$$\forall x \in X, \quad \lim_{m\to\infty} \|\psi_m(t)x - (T^{(n)}(t)x - T^{(n)}(0)x)\| = 0$$

uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.
Posons pour $x \in X$

$$T^{(n)}(t)x - T^{(n)}(0)x = \psi_m(t)x + r_m(t);$$

$r_m(t)$ est une fonction continue par marceaux sur $[0,1]$ à valeurs dans l'espace de Banach X, intégrable sur $[0,1]$, telle que $\lim_{m\to\infty}\|r_m(t)\| = 0$ uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.

Par conséquent

$$Q_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}[T^{(n)}(s)x - T^{(n)}(0)x]\,ds =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}[\psi_m(s)x + r_m(s)]ds =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}\psi_m(s)ds + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}r_m(s)ds$$

$$\int_0^t (t-s)^{n-1}\psi_m(s)ds = \sum_{i=1}^m \int_0^t (t-s)^{n-1}(s-c_{i-1})_+^0[T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x]\,ds =$$

$$= \sum_{i=1}^m [T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x]\int_0^t (t-s)^{n-1}\cdot(s-c_{i-1})_+^0\,ds$$

$$\int_0^t (t-s)^{n-1}(s-c_{i-1})_+^0\,ds = \left.\begin{cases} 0 & t \in [a, c_{i-1}) \\ \frac{(t-c_{i+1})^n}{n} & t \in [c_{i-1}, 1] \end{cases}\right\} = \frac{(t-c_{i-1})_+^n}{n}.$$

Par suite

$$Q_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^m (t-c_{i-1})_+^n[T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x] + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}r_m(s)\,ds$$

$$(23)\quad \lim_{m\to\infty}\left\|\int_0^t (t-s)^{n-1}r_m(s)\,ds\right\| = 0 \text{ uniformémentpar rapport à } t \in [0,1]$$

De (22), il découle que

$$T(t)x = T(0)x + \frac{t}{1!}T'(0)x + \ldots + \frac{t^n}{n!}T^{(n)}(0)x +$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^m (t-c_{i-1})_+^n[T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x] + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}r_m(s)ds$$

et (23) a lieu

DÉFINITION 5.2. *Soit* $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{m-1} < c_m = b$ *une partition* de l'intervalle $[a, b]$. Une fonction operatorielle $H_m : [a, b] \to L(X)$

définie par : $x \in X$

$$H_m(t)x = \sum_{k=0}^{n} t^k A_k x + \sum_{i=1}^{m} (t - c_{i-1})_+^n D_i x$$

où

$$A_k, D_i \in L(X) \quad k = 0, 1, \ldots, n ; \; i = 1, \ldots, m$$

est appelée fonction opératorielle élémentaire d'ordre n sur $[a, b]$.

COROLLAIRE 5.1. *Soit $T : [0,1] \to L(X)$ une fonction opératorielle (M,K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$. Supposons que pour tout $x \in X$, la fonction $T(t)x$ possède des dérivées fortes, continues jusqu'à l'ordre $n + 1$ sur $[0,1]$. Alors il existe une suite de fonctions élémentaires d'ordre n sur $[0,1]$, (M, K) — non-concaves d'ordre n sur $[0,1]$, telle que*

$$\forall x \in X \quad \lim_{m \to \infty} \|T(t)x - H_m(t)x\| = 0 \tag{24}$$

uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.

Démonstration. Selon le lemme 5.4., pour tout $m \in N$ nous pouvons choisir les points c_i $i = 0, 1, \ldots, m$ tels que la fonction opératorielle $H_m : [0,1] \to L(X)$ définie par

$$x \in X \quad H_m(t)x = T(0)x + \frac{t}{1!} T'(0)x + \ldots + \frac{t^n}{n!} T^{(n)}(0)x +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m} (t - c_{i-1})_+^n [T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x]$$

vérifie la relation (24)

Montrons que $H_m(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$. En effet, en posant $\varphi_{n+1, c_{i-1}}(t) = (t - c_{i-1})_+^n$, nous avons pour $x \in M$ et $t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} \in [0,1]$ distincts

$$[t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} ; H_m(\cdot)x] = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m} [t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} ; \varphi_{n+1, c_{i-1}}(\cdot)(T^{(n)}(c_i)x -$$

$$- T^{(n)}(c_{i-1})x)] = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m} [t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} ; \varphi_{n+1, c_{i-1}}] \cdot (T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x)$$

Dans l'article [13], il est démontré que $[t_1, t_2, \ldots, t_{n+2} ; \varphi_{n+1, c_{i-1}}] \geqslant 0$ et de $T^{(n+1)}(t)x \in K$ (lemme 5.1) et $c_i > c_{i-1}$, il résulte que

$$T^{(n)}(c_i)x - T^{(n)}(c_{i-1})x \in K.$$

Donc $H_m(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$

THEOREME 5.1. *Soit $T : [0,1] \to L(x)$ une fonction opératorielle (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$, continue sur $[0,1]$ dans la topologie opératorielle forte. Alors il existe une suite de fonctions opératorielles élémentaires d'ordre n sur $[0,1]$, (M,K) — nonconcaves d'ordre n sur $[0,1]$ qui converge vers $T(t)$ dans la topologie opératorielle forte, uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.*

Démonstration. Soit $B_l(T)(t)$ le polynôme de S. N. Bernstein de degré $\geqslant n + 1$ attaché à $T(t)$ sur $[0,1]$.

Pour chaque $x \in X$, $B_l(T)(t)x$ possède des dérivées fortes, de n'importe quel ordre, continues sur $[0,1]$.

Du lemme 5.4., il résulte que pour tout $m \in N$, il existe des points $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_{m-1} < c_m = 1$ tels que

$$H_{l,m}(T)(t)x = B_l(T)(0)x + \frac{t}{1!} B_l'(T)(0)x + \ldots + \frac{t^n}{n!} B_l^{(n)}(T)(0)x +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m} (t - c_{i-1})_+^n [B_l^{(n)}(T)(c_i)x - B_l^{(n)}(T)(c_{i-1})x]$$

vérifie la relation

$$\forall x \in X, \lim_{m \to \infty} \|H_{l,m}(T)(t)x - B_l(T)(t)x\| = 0$$

uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.

Comme $B_l(T)(t)$ est (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$, $H_{l,m}(T)(t)$ est aussi (M, K) — non-concave d'ordre n sur $[0,1]$.

Dans l'ouvrage [6], P. L. BUTZER et H. BERENS montrent que si $T : [0,1] \to L(X)$ est une fonction opératorielle fortement continue sur $[0,1]$, alors

$$\forall x \in X \; \|B_l(T)(t)x - T(t)x\| \leqslant \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{l}} ; T(\cdot)x\right)$$

Donc, pour $T(t)$ satisfaisant aux conditions du théorème 5.1, nous avons

$$\forall x \in X, \; \|T(t)x - H_{l,m}(T)(t)x\| \leqslant \|T(t)x - B_l(T)(t)x\| +$$

$$+ \|B_l(T)(t)x - H_{l,m}(T)(t)x\| \leqslant \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{l}} ; T(\cdot)x\right) +$$

$$+ \|B_l(T)(t)x - H_{l,m}(T)(t)x\|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists l_0 \in N ; \forall l > l_0 \Rightarrow \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{l}} ; T(\cdot)x\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour ces $l > l_0$ choisissons $m_0 \in N$: $\forall m > m_0 \Rightarrow \| B_l(T)(t)x - H_{l,m}(T)(t)x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Par suite, nous avons démontré que

$$\lim_{m, l \to \infty} \|T(t)x - H_{l,m}(T)(t)\| = 0$$

uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aramă, Oleg, *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor lui S. N. Bernstein şi aplicare lor la studiul approximării funcţiilor*, Studii şi Cerc. (Cluj) **VIII** nr. 3–4, 195–210 (1957).

[2] Aramă O., Ripianu D., *Une propriété des polynôme de S. N. Bernstein*, Mathematica (Cluj) vol. 3(26) 1, 5–18 (1961).

[3] Bahtin M. A., Krasnoselskij M. A., Stetenko V., *Sur la continuité des opérateurs linéaires et positifs*, Sib. Mat Jurn 3 nr. 1 157–160 (en russe).

[4] Bojanic R. and Roulier J., *Approximation of convex functions by convex splines and convexity preserving continuons linear operators*, Revue d'Analyse numérique et de la Théorie de l'Approximation, TOME 3, nr. 2 143–150 (1974).

[5] Breckner W. W., Orban G., *Continuity properties of rationnally s-convex mappings with values in an ordered topological linear space*, Preprint Cluj-Napoca 1978.

[6] Butzer P. L., Berens H., *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag New York 1967.

[7] Chilov G., *Fonctions d'une variable réelle*, tome II Mir Moscou 1973.

[8] Cristescu, Romulus, *Spaţii liniare topologice*, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti 1974.

[9] Krasnoselskij M. A., *Solutions positives des équations opératorielles*, Moscou 1962 (en russe).

[10] Moldovan Elena (Popoviciu), *Observations sur la suite des polynômes de S. N. Bernstein d'une fonction continue*, Mathématica, Cluj 4 (27) 289–292 (1962).

[11] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Dacia, Cluj 1972.

[12] Popoviciu Tiberiu, *Sur quelques propriétés des fonction d'une ou de deux variables réelles*, Mathématica Cluj VIII 1–85 (1934).

[13] Popoviciu, Tiberiu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IX), Bull. Math de la Soc. roum. des sc. Tome 43 (1–2) 85–141 (1941).

[14] Yosida, Kcsâku, *Functional Analysis*, Springer-Verlag Berlin 1965.

Reçu le 4.VI.1981.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de matematică
Str. Kogălniceanu nr. 1
Cluj-Napoca